© 2019 **Ю.В. Нагребецкая**[1], канд. физ.-мат. наук, **В.Г. Панов**[2], канд. физ.-мат. наук
[1]Уральский федеральный университет, Екатеринбург,
[2]Институт промышленной экологии УрО РАН, Екатеринбург

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ *n* ФАКТОРОВ В ТЕОРИИ ДОСТАТОЧНЫХ ПРИЧИН И ЕГО СВОЙСТВА

В алгебраической модели подхода достаточных причин, основанной на теории конечных булевых алгебр, рассматривается задача описания и типологизации взаимодействия некоторого числа бинарных факторов в данном отклике, зависящем от большего числа этих факторов. Показано, что можно ввести целочисленную характеристику, которая позволяет классифицировать такое взаимодействие по силе, аналогично взаимодействию *n* факторов.

Ключевые слова: теория достаточных причин, булевы алгебры, булевы функции, булев куб, симметрии булева куба, бинарный отклик, действие группы на множестве, целочисленный инвариант действия группы.

© 2019 **J.V. Nagrebetskaya**, **V.G. Panov**
Ural Federal University, Institute of Industrial Ecology, Ural Branch of RAS, Ekaterinburg

A GENERALISATION OF THE INTERACTION NOTION IN SUFFICIENT CAUSE THEORY AND ITS PROPERTIES

A problem of description and typologizing of a set of binary factors interaction in the outcome depending from more factors is considered within algebraic model of the sufficient component-cause framework based on the theory of finite Boolean algebras. An integer-valued invariant is defined which allows for classifying that interaction in a similar way to the interaction of *n* factors.

Key words: sufficient cause theory, Boolean algebra, Boolean functions, Boolean cube, symmetries of Boolean cube, binary outcome, group action on a set, integer-valued invariant of the group action.

Введение. В представленной в данном сборнике работе [1] была продолжена формализация эпидемиологической теории достаточных причин для двухуровневых факторов и такого же отклика (бинарная теория). В частности, в контексте теории булевых функций было введено формальное определение понятия взаимодействия, или совместного действия, бинарных факторов и была рассмотрена задача более детального, чем в работах [2–5], описания характера взаимодействия факторов в данном отклике.

Основой для такого описания выступает число μ_f, которое является целочисленным инвариантом относительно всех симметрий булева куба B^n, размерность которого равна числу *n* имеющихся бинарных факторов. Эти симметрии являются точным выражением особенностей постановки типичного эксперимента в эпидемиологии, медицине, фармакологии [2,3].

Важным моментом, который следует иметь в виду, состоит в том, что рассмотренные в работе [1] определения и теоремы относятся к ситуации, при которой оценивается взаимодействие именно *n* факторов в данном отклике *f*. Иначе говоря, в отклике *f*, зависящем от *n* бинарных факторов, мы определили и исследовали вопрос оценки «силы» взаимодействия этих *n* факторов. При этом оказалось, что таких классов, представляющих взаимодействие именно *n* факторов, будет заметно меньше, чем общее число классов, представляющих различные типы взаимодействия. Например, для $n=2$ будет два класса из шести, а для $n=3$ таких классов будет 8 из 22 (см. Теорему 1 из [1]).

Большая часть типов взаимодействия, которые определяются симметриями медико-биологического эксперимента, не являются типами с взаимодействием *n* факторов, хотя и представляют некоторые особые типы, так как попадают в различные орбиты действия группы симметрий [2-5]. Это делает целесообразным расширение понятия взаимодействия (бинарных) факторов таким образом, чтобы было возможным исследовать и эти классы аналогично работе [1].

Постановка задачи. Принципиальная постановка задачи и необходимые понятия и обозначения остаются таким же, как в работе [1]. Непосредственной задачей в данной работе является построение такого обобщения понятия взаимодействия и, соответственно, степени взаимодействия, которое позволит исследовать типы совместного действия, которые не являются типами с взаимодействием в смысле работы [1]. Фактически, необходимо определить корректное понятие взаимодействие *k* факторов в отклике, зависящем от *n* факторов, $2 \le k \le n$.

Формализация задачи. Дополнительно к этому разделу из работы [1] введем следующие обозначения и соглашения. Везде ниже будем считать, что $2 \le k \le n$. Для множества $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ обозначим через $\boldsymbol{x}_I$ набор переменных $\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\right)$, а через $\boldsymbol{x}_I^{\boldsymbol{\alpha}}$ – конъюнкцию $x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{B}^k$. Через $\overline{I}$ будем обозначать дополнение множества *I* в множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Для булевой функции f и $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{B}^{n-k}$ через $f_{I,\boldsymbol{\beta}} = f_{I,\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}_I)$ обозначим булеву функцию *f* от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, в которой переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ – свободные, а $x_j = \boldsymbol{\beta}_j$ для $j \in \overline{I}$. Для согласованности будем также считать, что $f_{I,\boldsymbol{\beta}} = f$ при $k = n$ и $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{B}^0$. С точки зрения предметной трактовки можно сказать, что равенство $\boldsymbol{x}_{\overline{I}} = \boldsymbol{\beta}$ является выражением условий эксперимента, в котором действуют данные факторы.

Основные результаты. ***Определение*** 1. Будем говорить, что в отклике *f* *имеется взаимодействие* между *k* факторами, если существует *k*-элементное подмножество *I* множества $\{1,2,\dots,n\}$ и набор $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{B}^{n-k}$ такие, что в отклике $f_{I,\boldsymbol{\beta}}$ есть взаимодействие между *k* факторами $\boldsymbol{x}_I$. Если это взаимодействие достигается при $\boldsymbol{x}_I = \boldsymbol{\alpha}$ для некоторого $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{B}^k$, то будем говорить, что имеет место взаимодействие между *k* факторами для $\boldsymbol{x}_I = \boldsymbol{\alpha}$ при $\boldsymbol{x}_{\overline{I}} = \boldsymbol{\beta}$. Это определение обобщает Определение 1 из [1] для *n* факторов и является строгим выражением конструкции из работы [6].

Этому определению можно придать следующий геометрический смысл. Рассмотрим булев куб B^n как граф, вершинами которого являются вершины куба (0-грани, или точки), а рёбрами – рёбра куба (или 1-грани). Пусть Γ_f – подграф графа B^n, вершинно-порожденный точками из C_f [7]. Тогда имеет место

Теорема 1. В отклике *f* есть взаимодействие *k* факторов тогда и только тогда, когда в графе Γ_f есть вершина, степень которой меньше или равна $n - k$.

Отсюда следует, что если в отклике *f* имеется взаимодействие между *k* факторами, то имеется взаимодействие и между *l* факторами для любого $2 \le l \le k$. Кроме того, из Теоремы 1, в частности, следует, что в отклике *f* есть взаимодействие *n* факторов тогда и только тогда, когда в графе Γ_f есть хотя бы одна изолированная вершина.

Таким образом, настоящее Определение 1 обобщает Определение 1 из [1] и позволяет говорить о взаимодействии меньшего числа факторов в отклике, зависящем от большего числа факторов. Кроме того, возникает естественная упорядоченность по «силе» взаимодействия: если в данном отклике имеет место взаимодействие k факторов, то тем более имеет место взаимодействие меньшего числа факторов. Однако кроме этого порядка есть возможность сравнивать между собой различные отклики с взаимодействием k факторов, аналогично работе [1].

Как и для понятия взаимодействия n факторов, понятие взаимодействия k факторов инвариантно относительно действия симметрий булева куба и, следовательно, это свойство одновременно выполняется или не выполняется для всех булевых функций класса эквивалентности, т.е. это понятие корректно определено для классов.

В качестве примера приведем следующее утверждение.

Теорема 2. Типами взаимодействия двух факторов, не являющихся типами взаимодействия трёх факторов при n=3, являются только следующие типы $\{x_1x_2\}, \{x_1x_2 \vee x_3\}, \{x_1x_2 \vee x_1x_3\}, \{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3\}, \{x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3\}, \{x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\}$, $\{x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3\}, \{x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3\}$

Теперь рассмотрим обобщение понятия *степени взаимодействия* для понятия взаимодействия k факторов (используются Определения 2 и 3 из [1]).

Определение 2. С*тепенью взаимодействия k факторов* в отклике f назовём число $\boldsymbol{\mu}_{f,k} = \max\left\{\boldsymbol{\mu}_{f_{I,\boldsymbol{\beta}}} \middle| I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, |I| = k, \boldsymbol{\beta} \in \mathrm{B}^{n-k}\right\}$. При этом будем считать, что $\boldsymbol{\mu}_{0,I} = 0$ для любого $I \subseteq \{1,2,\dots,n\}$.

Очевидно, выполняются неравенства $0 \le \boldsymbol{\mu}_{f,k} \le k$ и $\boldsymbol{\mu}_{f,n} = \boldsymbol{\mu}_f$. Следовательно, Определение 2 обобщает Определение 3 работы [1].

Также выполняется следующее обобщение Теоремы 3 из работы [1].

Теорема 3. В отклике f есть взаимодействие k факторов тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\boldsymbol{\mu}_{f,k} \ge 1$.

Приведём значения степени взаимодействия двух факторов для классов из Теоремы 2.

Теорема 3. Для классов откликов f, зависящих от трёх факторов, у которых нет взаимодействия трёх факторов ($\boldsymbol{\mu}_{f,3} = 0$), степень взаимодействия двух факторов равна

Таблица 1.

Классы откликов, зависящих от трёх булевых переменных	Степень $\boldsymbol{\mu}_{f,2}$	Отклик $f_{I,\boldsymbol{\beta}}$ и условие $x_{\bar{I}} = \boldsymbol{\beta}$, для которых выполняется равенство $\boldsymbol{\mu}_{f,2} = \boldsymbol{\mu}_{f,\boldsymbol{\beta}}$
$\{x_1x_2\}$ $\{x_1x_2 \vee x_3\}$ $\{x_1x_2 \vee x_1x_3\}$ $\{x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3\}$ $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3\}$	2	$x_1x_2,\ x_3 = 0$
$\{x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\}$ $\{x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3\}$ $\{x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3\}$	1	$x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2,\ x_3 = 0$

Обсуждение. Формализация теории достаточных причин на основе теории булевых алгебр предоставляет эффективный аппарат решения задач анализа механизмов причинности в рамках этой теории. Полученные методами теории булевых алгебр результаты уже дали возможность построения классов откликов, эквивалентных относительно симметрий эксперимента [2–5]. Дальнейшее развитие этого направления сделало возможным не только провести более тонкую классификацию типов взаимодействия, чем простое разбиение на классы, но и определить новые целочисленные характеристики (инварианты симметрий эксперимента) для сопоставления этих классов по силе взаимодействия. При этом формализм булевых алгебр позволяет определить такое нетривиальное понятие как степень взаимодействия некоторого числа факторов в отклике, зависящем от большего числа факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нагребецкая Ю.В., Панов В.Г. Степень взаимодействия бинарных факторов в теории достаточных причин // Материалы XIII международной научной конференции «Системный анализ в медицине» (САМ 2019) / под общ. ред. В.П.Колосова. Благовещенск, 2019. С. 31-34.
2. Панов В.Г., Нагребецкая Ю. В. Алгебраическая трактовка двухфакторной теории достаточных причин // Труды СПИИРАН. 2013. Т. 3(26). С. 277–296.
3. Панов В. Г., Нагребецкая Ю. В. Алгебраическая классификация совместного действия n бинарных факторов // Материалы IX Междунар. конф. «Системный анализ в медицине». Благовещенск, 2015. С. 31–34.
4. Panov V. G. and Nagrebetskaya J. V. Boolean algebras and classification of interactions in sufficient-component cause model // Int. J. Pure Appl. Math. 2015. V. 98(2). P. 239–259.
5. Panov V. G. and Nagrebetskaya J. V. Classification of combined action of binary factors and Coxeter groups // J. Discr. Math. Sci. & Cryptography. 2018. V. 21(3). P. 661–677.
6. VanderWeele T. J., Richardson T. S. General theory for interactions in sufficient cause models with dichotomous exposures // Ann. Statistics. 2012. V. 40. P. 2128–2161.
7. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.

E-mail: I.V.Nagrebetckaia@urfu.ru, vpanov@ecko.uran.ru

© 2019 **Ю.А. Кукушкин**, д-р техн. наук, проф.; **С.Д. Чистов**, канд. мед. наук; **Ю.Ю. Кисляков**, канд. биол. наук, доц.; **Е.Г. Герасимова**; **Ж.А. Поташникова**; **А.А. Кривко**
ЦНИИ Военно-воздушных сил Минобороны России, Москва

МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ОПЕРАТОРА ЭРГАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Изложена методика оценивания профессиональной работоспособности оператора авиационной эргатической системы, подтвердившая эффективность при решении многих прикладных задач оценивания профессиональной работоспособности оператора авиационной эргатической системы в условиях воздействия неблагоприятных факторов условий деятельности.

Ключевые слова: авиационная эргатическая система, работоспособность оператора, профессиональная работоспособность.

Yu.A. Kukushkin, S.D. Chistov, Yu.Yu. Kislyakov, E.G. Gerasimova, J.A. Potashnikova, A.A. Krivko
Central Research Institute of the Air Force of the Ministry of Defense of Russia, Moscow

METHODOLOGY FOR ESTIMATING PROFESSIONAL OPPORTUNITY OF THE OPERATOR OF THE ERGATIC SYSTEM

A methodology for assessing the professional working capacity of an operator of an aviation ergatic system is stated, which confirmed the effectiveness in solving many ap-