Метод Гаусса решения систем линейных уравнений (СЛУ)

- ДФиПХ, I курс, I семестр
- К. ф.-м. н., доцент Нагребецкая Ю.В.

Виды систем линейных уравнений (СЛУ)

СЛУ

совместные
(имеют хотя бы одно решение)

несовместные
(не имеют ни одного решения)

определенные
(имеют единственное решение)

неопределенные
(имеют бесконечно много решений)

Основные определения для СЛУ

<u>Опр.</u> СЛУ называется следующая система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} – коэффициенты, b_j – свободные члены,
x_i – переменные

Основные определения для СЛУ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{столбец свободных членов}$$

Основные определения для СЛУ

$$\left(A\middle|b\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)-$$

расширенная матрица СЛУ

Равносильные преобразования СЛУ

Опр. К равносильным (т.е. не меняющим множество решений) преобразованиям СЛУ называют

(1) перестановку двух уравнений;

(2) умножение или деление обеих частей уравнения на ненулевое число;

(3) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число;

(4) вычеркивание лишних уравнений, например, повторяющихся уравнений или уравнений вида 0=0.

Эквивалентные преобразования СЛУ

Равносильным преобразованиям СЛУ соответствуют следующие эквивалентные преобразования расширенной матрицы системы

(1) перестановка двух уравнений;

(2) умножение или деление строки матрицы на ненулевое число;

(3) прибавление к одной строке другой, умноженной на число;

(4) вычеркивание повторяющихся строк или нулевых строк.

Метод Гаусса

Метод Гаусса решения СЛУ заключается в приведении расширенной матрицы системы к ступенчатому виду.

Задача 1

Решить СЛУ методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \end{cases}$$

Какой является данная система совместной (несовместной), определенной (неопределенной)?

Задача 1

<u>Решение.</u>

Прямой ход метод Гаусса.

Приведем расширенную матрицу

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 7 & 9 & -9 & 5 \end{array}\right)$$

системы к ступенчатому виду, преобразуя нижние строки при помощи верхних.

Задача 1

Вначале упростим матрицу, получим нули в первом столбце, если это возможно

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 7 & 9 & -9 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

III-II $\qquad$ III:3 $\qquad$ II-3·I

Задача 1

Получим в первой строке в первом столбце единицу:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 7 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)\underset{\text{II-}3\cdot\text{I}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 9 & 28 \\ 1 & 15 & -33 & -85 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)\underset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\sim}$$

Задача 1

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 15 & -33 & -85 \\ 2 & -4 & 9 & 28 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{II-2}\cdot\text{I}}{} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & -33 & -85 \\ 0 & -34 & 75 & 198 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{} \sim$$

$$\text{II-2}\cdot\text{I} \qquad\qquad \text{II}\leftrightarrow\text{III}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & -33 & -85 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -34 & 75 & 198 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & -33 & -85 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 58 & 232 \end{array}\right) \sim$$

$$\text{III}+17\cdot\text{II}$$

Задача 1

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & -33 & -85 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Прямой ход метода Гаусса отработан!

Теперь можно

а) либо написать соответствующую (равносильную) систему и решить ее;

б) либо двигаться дальше по пути упрощения расширенной матрицы, делая **обратный ход метода Гаусса.**

Задача 1

а) $\begin{cases} x+15y-33z=-85 \\ 0\cdot x+2y-z=2 \\ 0\cdot x+0\cdot y+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+15y-33z=-85 \\ 2y-z=2 \\ z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+15y-33z=-85 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

Ответ: $x=2, y=3, z=4.$
Система является совместной и определенной.

Задача 1

Обратный ход метод Гаусса.

Приведем левую часть последней матрицы к единичной матрице, преобразуя верхние строки при помощи нижних

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & -33 & -85 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & 0 & 47 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}+33\cdot\mathrm{III} \\ \mathrm{II}+\mathrm{III} \end{array} \qquad \mathrm{II}:2$$

Задача 1

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 15 & 0 & 47 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{I}\text{-}15\cdot\mathrm{II}$$

Обратный ход метода Гаусса отработан!

Напишем систему, соответствующую последней матрице, которая и будет решением исходной СЛУ.

Задача 1

$$\begin{cases} 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=2 \\ 0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=3 \\ 0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=4 \end{cases}$$

Ответ: $x = 2, y = 3, z = 4$.

Задача 2

Решить СЛУ методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 2 \\ 4x - 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

Задача 2

Решение.

Прямой ход метод Гаусса.

Приведем расширенную матрицу

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

системы к ступенчатому виду, преобразуя нижние строки при помощи верхних.

Задача 2

Вначале упростим матрицу, получим нули в первом столбце.

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

$$\text{III-}2\cdot\text{II}$$

Видно, что получилась строка, все элементы которой, кроме последнего, равны 0.

Задача 2

Напишем систему, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 2 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -7 \end{cases}$$

Видно, что она не имеет решений.

<u>Ответ</u>: Система является несовместной.

Задача 3

Решить СЛУ методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

Задача 3

Прямой ход метод Гаусса.

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right)\sim$$

$\text{II-}2\cdot\text{I}$

III-I

III-II

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim$$

Задача 3

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

II:(-3)

Прямой ход метода Гаусса отработан!

Задача 3

Обратный ход метод Гаусса.

Приведем левую часть последней матрицы к единичной матрице, преобразуя верхние строки при помощи нижних

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{I-2}\cdot\text{II}$$

Задача 3

Обратный ход метод Гаусса.

Соответствующая система имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cc:c|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Задача 3

Обратный ход метод Гаусса.

Напишем систему, соответствующую последней расширенной матрице:

$$\begin{cases} 1\cdot x+0\cdot y-2\cdot z=-1 \\ 0\cdot x+1\cdot y-1\cdot z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z-1 \\ y=z+1 \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

<u>Ответ</u>: Система является совместной и неопределенной.

Конец показа слайдов