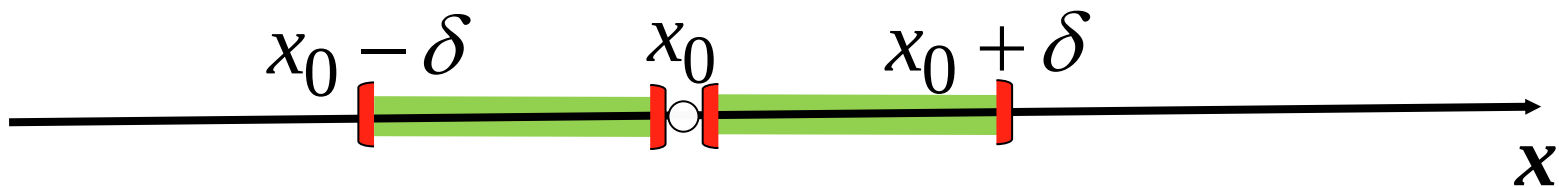


Определение выколотой δ -окрестности

Опр. **Выколотой δ -окрестностью** точки x_0 называется множество

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

т.е., объединен. интервалов $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$

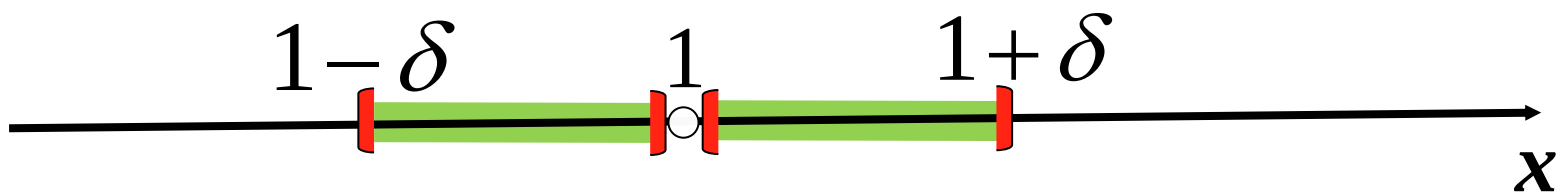


Обозначение: $\check{O}_\delta(x_0)$

Определение выколотой δ -окрестности

Пример.

$$\begin{aligned}\check{O}_\delta(1) &= \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 1| < \varepsilon\} = \\ &= (1 - \delta; 1) \cup (1; 1 + \delta)\end{aligned}$$



Определение предела функции

Пусть функция $f(x)$ определена в выколотой δ -окрестности $\check{O}_\delta(x_0)$.

Опр. (по Гейне) **Пределом функции $f(x)$ в точке x_0** называется число A , такое, что для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in \check{O}_\delta(x_0)$, предел которой равен x_0 (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$), последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$).

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Арифметические свойства предела функции

Теорема (арифметические свойства предела)

Пусть существуют $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$,

тогда существует

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ = A \cdot B;$$

Арифметические свойства предела функции

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \cdot A;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^m = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^m = A^m;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ если } B \neq 0.$$

Арифметические свойства предела функции

Примеры.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right)^2 = 0^2; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x) = \sin 0 = 0;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[\frac{0}{0} - \text{неопределенность} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)} (x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

Арифметические свойства предела функции

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \left[\frac{0}{0} - \text{неопределенность} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

Арифметические свойства предела функции

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \left[\frac{1}{\sqrt{1+3}+2} \right] = \frac{1}{4}$$

Свойства предела функции. Замена

Пример.

$$f(x) = \sin x, g(y) = y^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^2 = \left[\begin{array}{l} y = \sin x \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} y^2 = 0^2$$

Пример.

$$f(x) = x^2, g(y) = \sin y$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x^2 = \left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = \sin 0 = 0$$

Предел функции в бесконечности

Замечание. В определении предела можно считать, что x_0 может быть равно $\infty, +\infty, -\infty$.

Пример. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Тогда для $y_n = f(x_n) = \frac{1}{x_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0 \blacksquare$$

Предел функции в бескон.

Решение
«ладошки»

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 3} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2}$. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 3} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2} &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x^2} - 2} \right] \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} \right] = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^{2/3}} \right] = \left[2 \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} \right] = \infty \end{aligned}$$

Предел функции в бескон.

Математическое
решение

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 3} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2}$. $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 3} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 3} + 1}{x}}{\frac{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2}{x}} =$$

Предел функции в бескон.

Математическое
решение

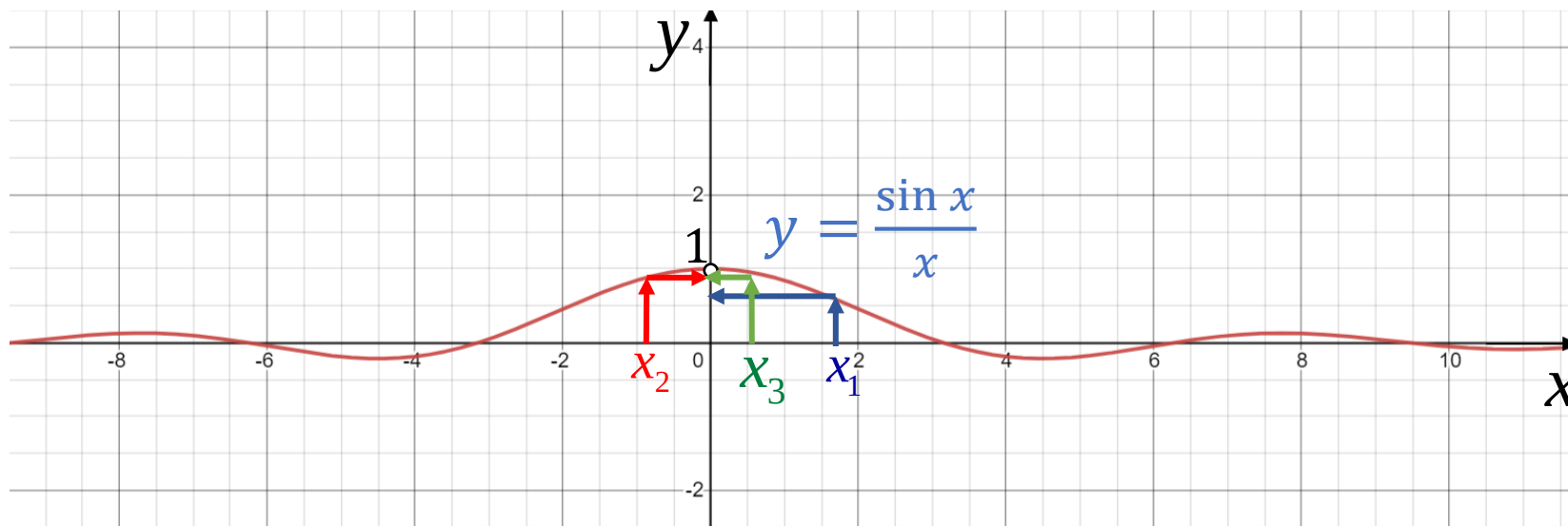
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2 + 2x - 3}{x^2}} + \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\frac{x^2 + 3}{x^3}} - \frac{2}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x}}} = \left[\frac{\sqrt{4+0-0+0}}{\sqrt[3]{0+0-0}} \right] = \left[\frac{2}{0} \right] = \infty$$

Первый замечательный предел

Теорема.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Первый замечательный предел

Следствия

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Первый замечательный предел

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \sin y}{y} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2$$

Второй замечательный предел

Теорема.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad [1^\infty]$$

Следствия

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Второй замечательный предел

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^{2x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^{2x+1} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+3) - 3 - 2}{x+3} \right)^{2x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+3) - 5}{x+3} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{x+3} \right)^{2x+1} =$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1 \right]$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{\text{😊} \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\text{😊}}\right)^{\text{😊}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{\text{⚽} \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\text{⚽})}{\text{⚽}} = 1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+3}{-5}} \right)^{2x+1} = \lim_{\text{☺} \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\text{☺}} \right)^{\text{☺} \cdot \frac{1}{\frac{x+3}{-5}} \cdot 2x+1} =$$

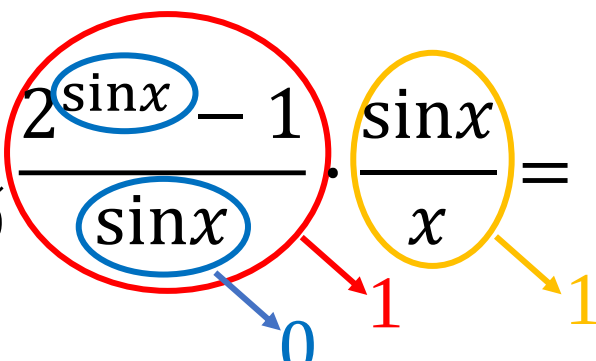
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{\frac{x+3}{-5}} \cdot 2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-5(2x+1)}{x+3}} = e^{-10}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5(2x+1)}{x+3} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5 \cdot 2x}{x} \right] = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} (-10) \right] = -10$$

Второй замечательный предел

Пример. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} =$$



$$= \ln 2 \cdot 1 = \ln 2$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{x} = \left[\begin{matrix} y = \sin x \\ y \rightarrow 0 \end{matrix} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2^y - 1}{y} = \ln 2 \right]$$