Частная производная функции. Определение

Опр. Пусть $z = f(x,y)$ определена в области D.

Разность $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ $(y = \mathrm{const})$ называется частным приращением функции $z = f(x,y)$ по переменной x.

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, если он существует, называется частной производной функции $z = f(x,y)$ по переменной x.

Обозначение: z'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Частная производная функции. Определение

Опр. Пусть $z = f(x,y)$ определена в области D.

Разность $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x,y)$ $(x = \text{const})$ называется частным приращением функции $z = f(x,y)$ по переменной y.

Предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$, если он существует, называется частной производной функции $z = f(x,y)$ по переменной y.

Обозначение: z'_y, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Частная производная функции. Пример 1

Пример 1. Найти z'_x, z'_y для $z = x^2y + xy^3$.

Решение.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2y + xy^3\right)'_x,$$

$$z'_x = \left(x^2y\right)'_x + \left(xy^3\right)'_x = y\left(x^2\right)'_x + y^3\left(x\right)'_x =$$

$$[y = \text{const}] = y \cdot 2x + y^3 \cdot 1 = 2xy + y^3$$

Частная производная функции. Пример 1

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y + xy^3\right)'_y$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y\right)'_y + \left(xy^3\right)'_y = x^2 \left(y\right)'_y + x\left(y^3\right)'_y =$$

$$[x = \text{const}] = x^2 + x \cdot 3y^2 = x^2 + 3xy^2$$

Частная производная функции. Пример 2

<u>Пример 2</u>. Найти z'_x, z'_y для $z = x\sin(2x - y^2)$

<u>Решение</u>. $z'_x = \left(x\sin(2x - y^2)\right)'_x = [y = \text{const}] =$

$$= (x)'_x \sin(2x - y^2) + x\left(\sin(2x - y^2)\right)'_x =$$

$$= \sin(2x - y^2) + x\cos(2x - y^2)\left(2x - y^2\right)'_x =$$

$$= \sin(2x - y^2) + x\cos(2x - y^2) \cdot 2 =$$

$$= \sin(2x - y^2) + 2x\cos(2x - y^2)$$

Частная производная функции. Пример 2

Пример 2. Найти z'_x, z'_y для $z = x\sin(2x - y^2)$

Решение.

$$z'_y = \left(x\sin(2x - y^2)\right)'_y = [x = \mathrm{const}] =$$

$$= (x)'_y \sin(2x - y^2) + x\left(\sin(2x - y^2)\right)'_y =$$

$$= 0 \cdot \sin(2x - y^2) + x\cos(2x - y^2)\left(2x - y^2\right)'_y =$$

$$= x\cos(2x - y^2) \cdot (-2y) = -2xy\cos(2x - y^2)$$

Дифференциал функции двух переменных

Опр (повторение). Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется выражение $y = y'dx = f'(x)dx$.

Опр (повторение). Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется выражение

$$\boxed{dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = z'_x dx + z'_y dy}$$

Дифференциал функции двух переменных. Пример 3

Пример 3. Найти dz для $z = x^y$

$$z'_x = \left(x^y\right)'_x = [y = \text{const}] = yx^{y-1}$$

$$z'_y = \left(x^y\right)'_y = [x = \text{const}] = x^y \ln x$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy$$

Дифференцируемость функции одной переменной (повторение)

Утв. (повторение). Для определенной в $O(x)$ дифференцируемой в точке x функции $y = f(x)$

справедливо $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x$,

где $\alpha(\Delta x) -$ б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

и $dx = \Delta x$.

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{y} \approx \boldsymbol{dx}}$$

Дифференцируемость функции двух переменных

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ – **полное приращение функции** $z = f(x, y)$

<u>Опр</u> Функция $z = f(x, y)$, определенная в $O(P)$, называется дифференцируемой в точке $P(x, y)$, если в этой точке существуют z'_x, z'_y и

$$\Delta z = dz + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$, $\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ и $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$

$$\boxed{\Delta z \approx dz}$$

Связь дифференцируемой и непрерывной функции двух переменных

Теорема (о связи непрер-ти и дифференц-ти).
Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P)$.
Если функция дифференцируема в точке P, *то она непрерывна в этой точке.*