Определение функции двух переменных

Обозначим через $\mathbb{R}^2$ множество точек плоскости.

Опр. Функцией двух переменных, определенной на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^2$ называется правило, которое каждой паре значений $(x, y) \in D$ единственным образом сопоставляет число $z = f(x, y)$.

Множество D называется *областью определения* функции $z = f(x, y)$.

Геометрическая интерпретация функции двух переменных

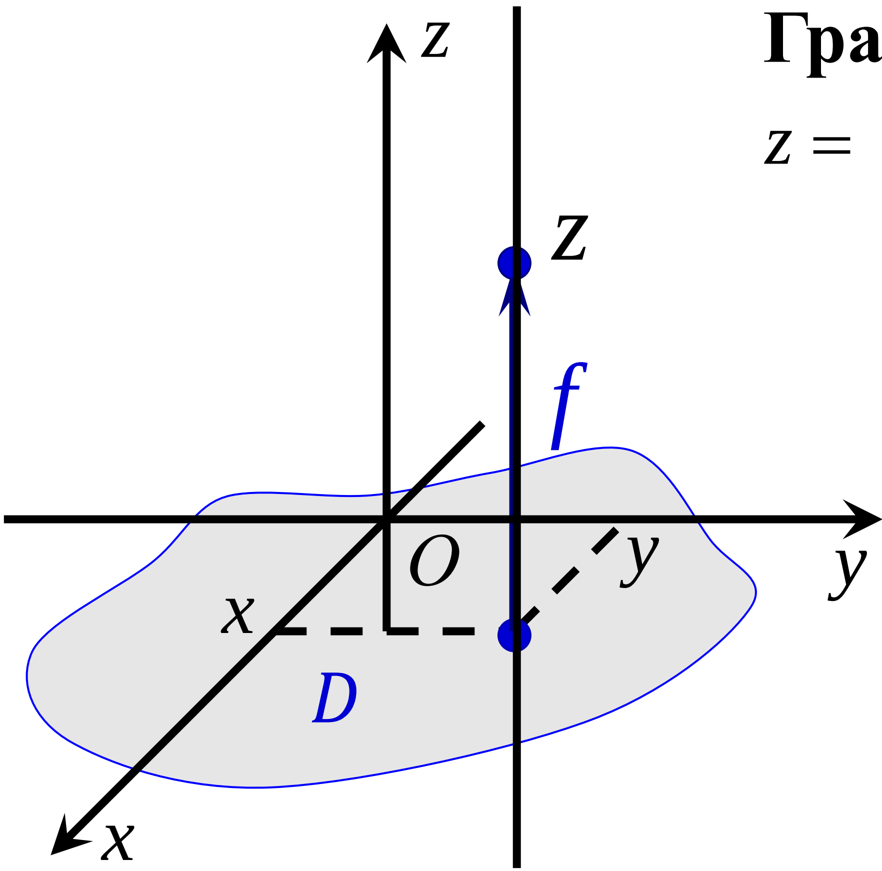


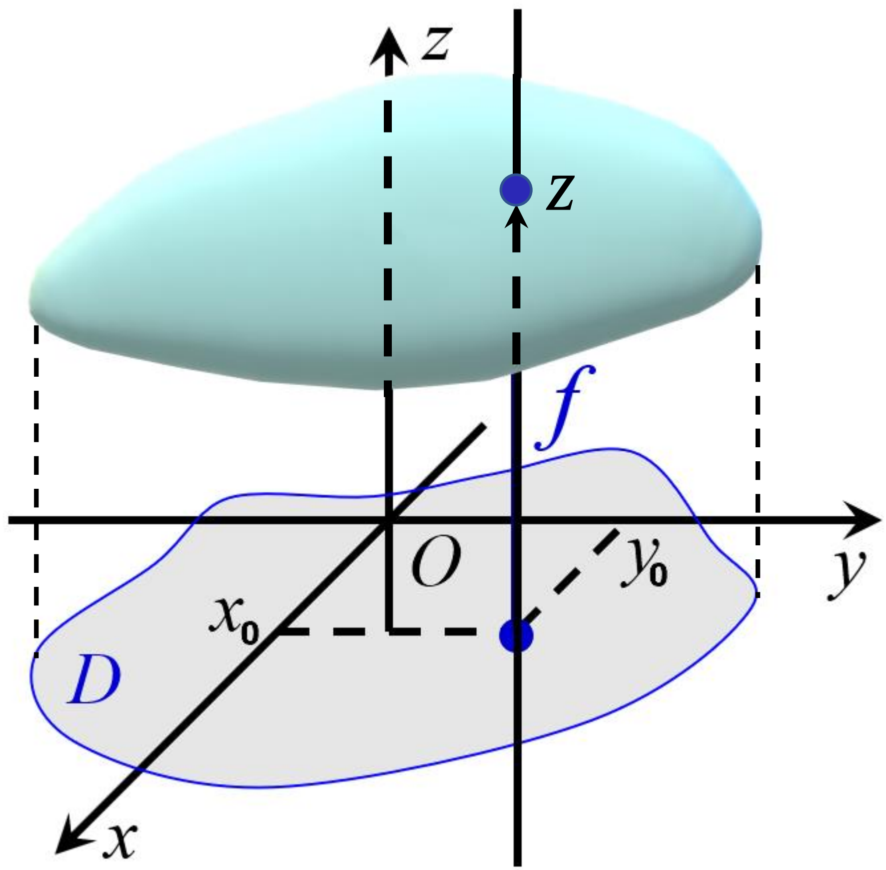
График функции

$z = f(x, y)$ – поверхность в пространстве

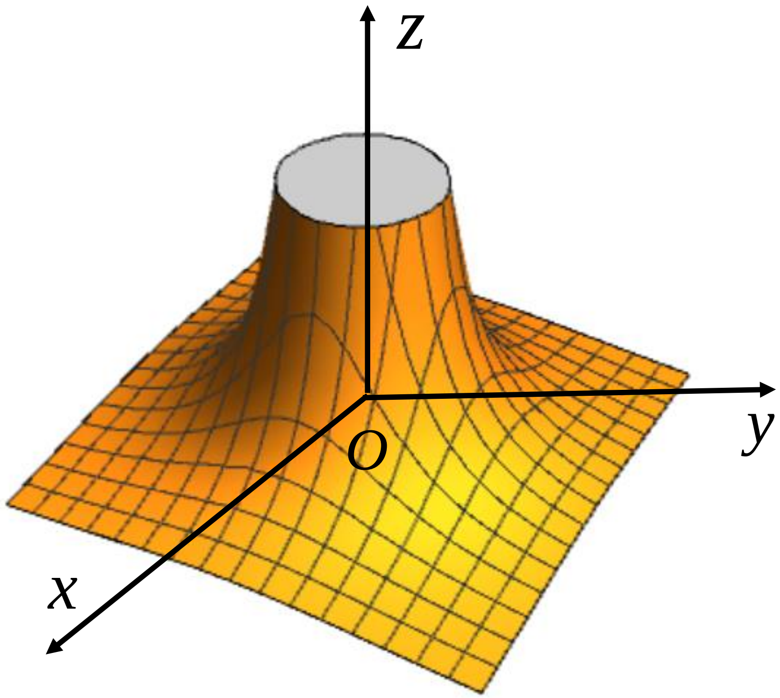
Область определения

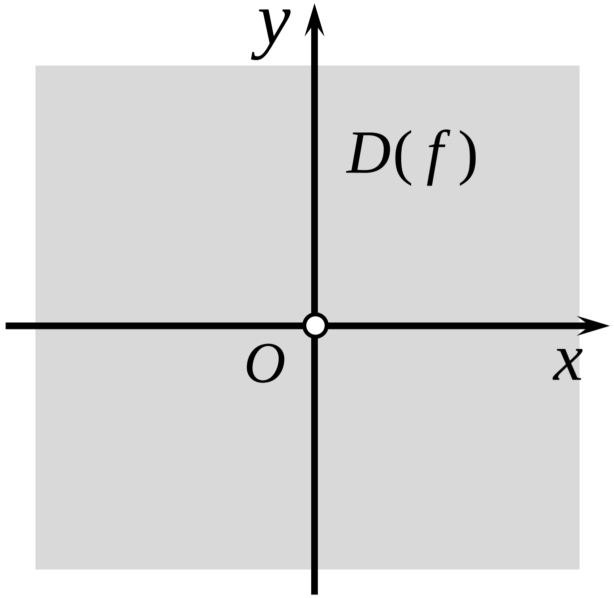
$D(f)=D$ – проекция графика на плоскость Oxy

Геометрическая интерпретация функции двух переменных



Геометрическая интерпретация. Пример 1





Поверхность - график

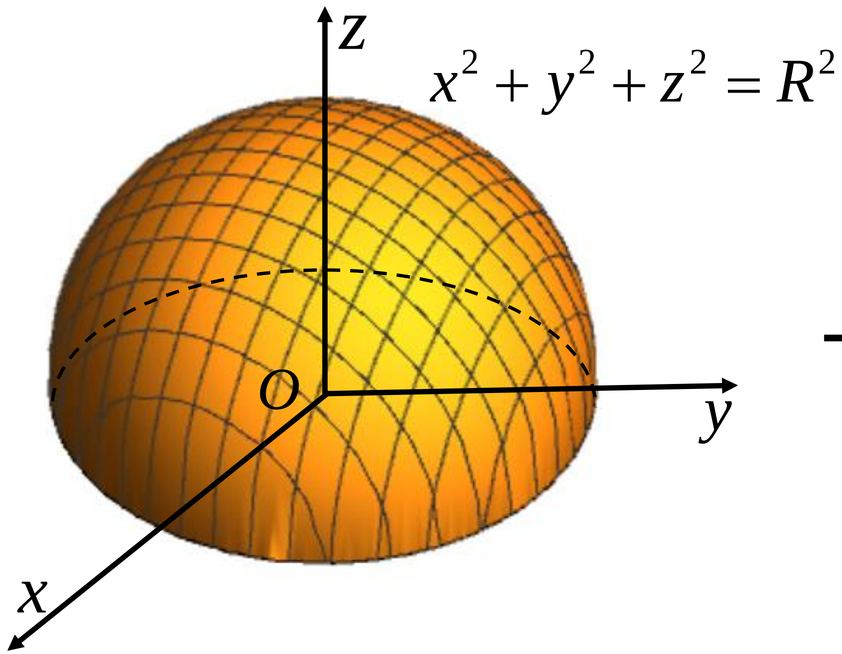
фунции $z = f_1(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

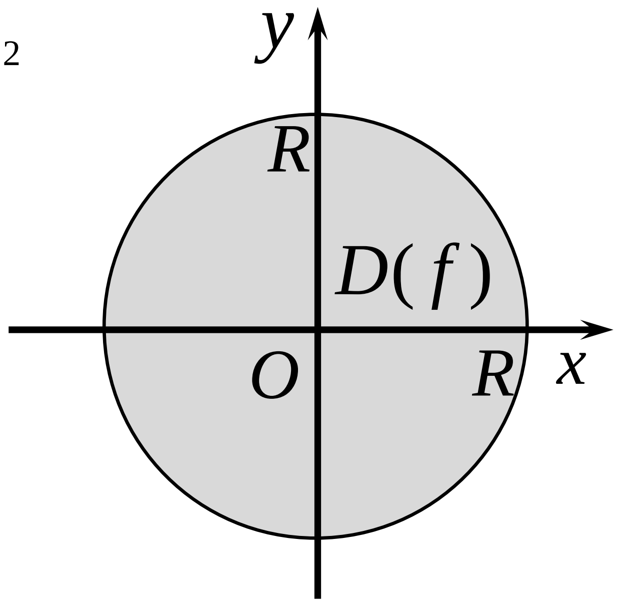
Область определения:

$D(f_1)$: $x \neq 0$,

$y \neq 0$ одновременно

Геометрическая интерпретация. Пример 2





Поверхность - полусфера, график фунции

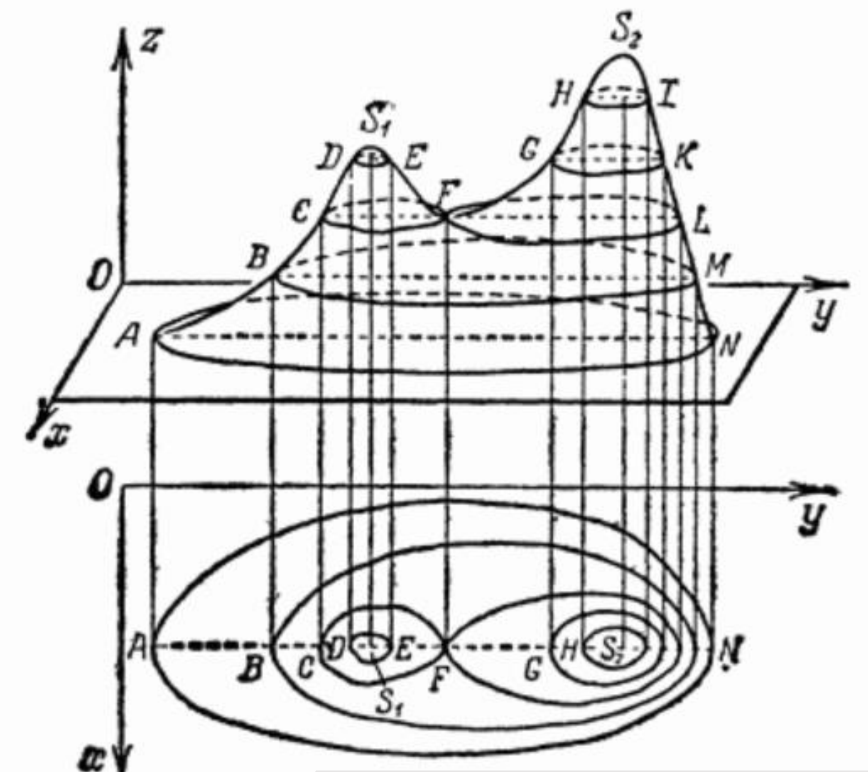
$$z = f_2(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Область определения:

$$D(f_2)\colon\ x^2 + y^2 \leq R^2$$

Линии уровня функции двух переменных

<u>Опр</u>. Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется кривая, заданная уравнением $f(x, y) = C$ $(z = C)$.



Пискунов В.Т. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т.1

Линии уровня. Пример 3

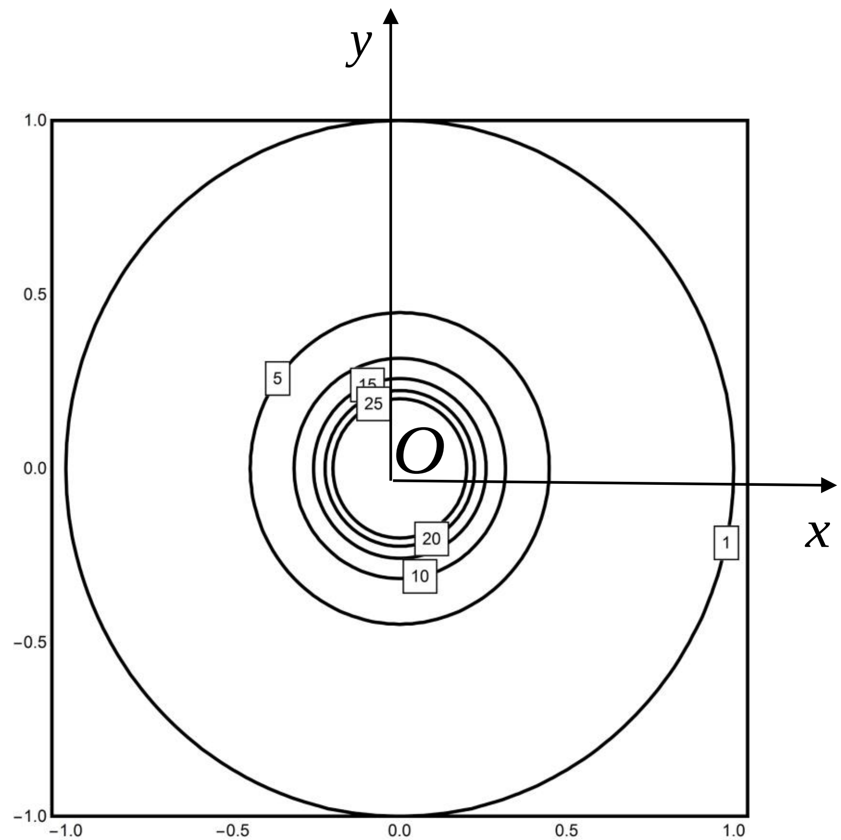
<u>Пример 3</u>. Линии уровня функции $z=\frac{1}{x^2+y^2}$:

$$z=1 \quad \frac{1}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2=1$$

$$z=5 \quad x^2+y^2=\frac{1}{5}$$

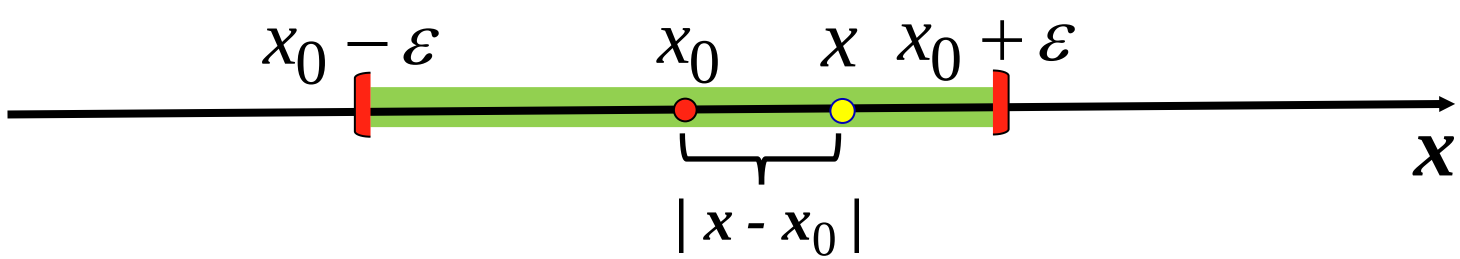
$$z=10 \quad x^2+y^2=\frac{1}{10}$$



Определение ε-окрестности на числовой прямой (повторение)

Опр. ε-окрестностью точки x_0 называется множество

$$O_{\varepsilon}(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon \} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$



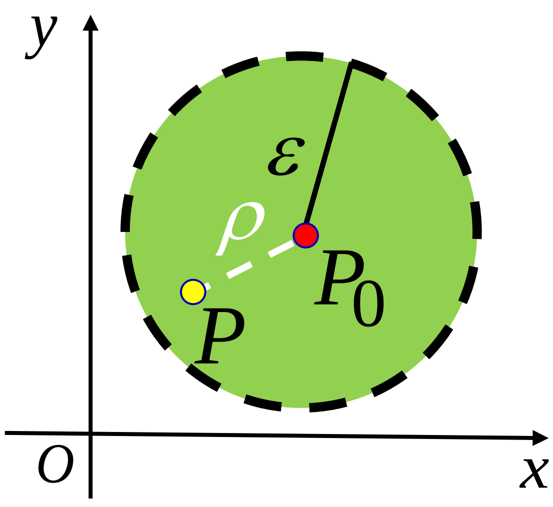
Определение ε-окрестности на плоскости $\mathbb{R}^2$

Опр. ε-окрестностью точки $P_0(x_0, y_0)$ на плоскости называется множество

$$O_\varepsilon(P_0) = \left\{ P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho(P, P_0) < \varepsilon \right\},$$

где $\rho(P, P_0)$ – расстояние от точки P до точки P_0, равное

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$



Определение внутренней точки и открытого множества

Опр. Пусть точка P_0 принадлежит множеству D точек плоскости.

Если существует $\varepsilon > 0$ т. ч. $O_\varepsilon(P_0) \subseteq D$, то точка P_0 называется внутренней точкой множества D.

Опр. Если все точки множества D внутренние для этого множества, то оно называется открытым.

Определение граничной точки, границы множества и замкнутого множества

Опр. Точка $P_0 \in D$ называется граничной точкой множества D, если

для любого $\varepsilon > 0$ окрестность $O_\varepsilon(P_0)$ не включается во множество D.

Определение границы множества и замкнутого множества

Опр. Множество всех граничных точек множества D называется границей этого множества.

Опр. Множество D называется замкнутым, если граница множества D принадлежит этому множеству.

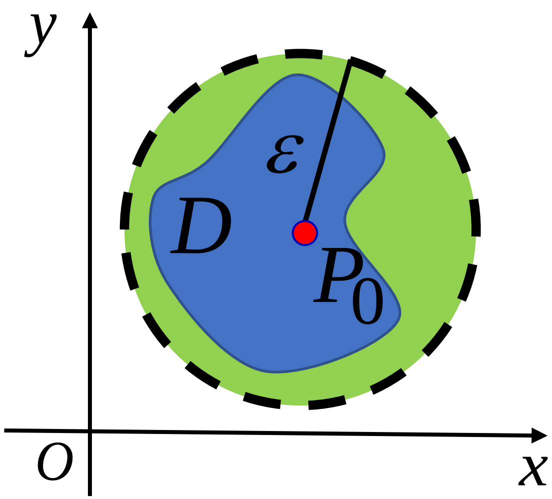
Определение связного множества и области

Опр. Множество D называется связным (точнее, линейно связным), если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной линией, лежащей внутри множества D.

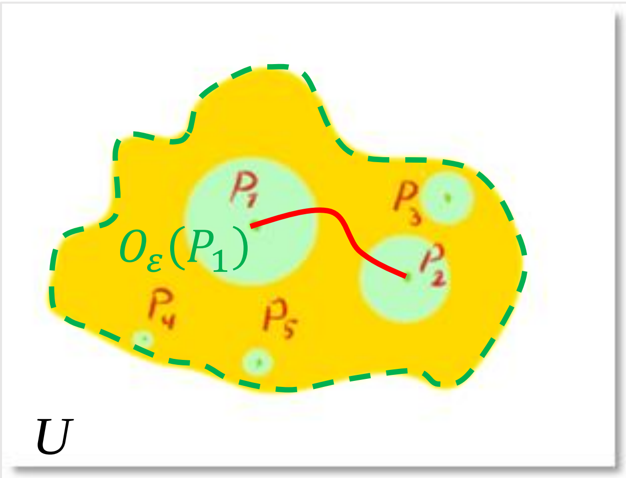
Опр. Множество D называется областью, если оно открыто и связно.

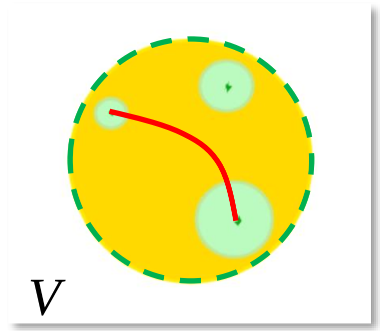
Определение ограниченного множества

Опр. Множество D называется ограниченным, если это множество можно поместить в некоторую окрестность некоторой точки.

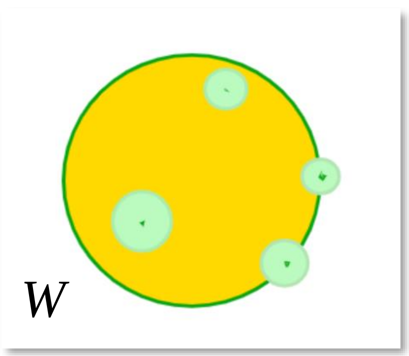


Открытое, замкнутое, связное множества. Примеры 4,5,6





U,V – открытые, не замкнутые, огранич, связные множества (области).
Граница множества U – *окружность.*
Она не принадлежит множеству U.



W – не открытое, замкнутое, ограниченное, связное множество
Граница множества W – *окружность.*
Она принадлежит множеству U.

Открытое, замкнутое, связное множества. Примеры 7, 8

Упр. Охарактеризовать области определения: $D(f_1), D(f_2)$ функций

$$z = f_1(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$z = f_2(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Определение предела функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в выколотой δ-окрестности $\check{O}_\delta(P_0) = O_\delta(P_0)\backslash\{P_0\}$.

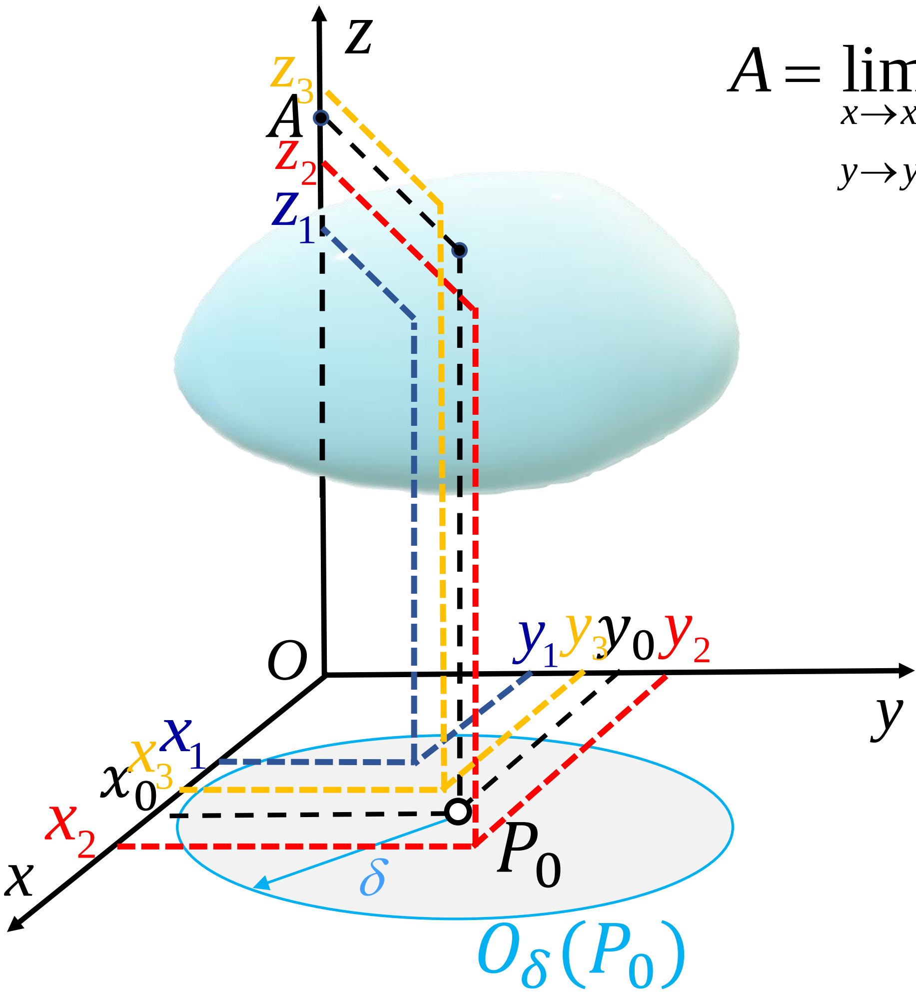
<u>Опр. (по Гейне)</u> Пределом функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ называется число A такое, что для любых последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}$ таких, что $(x_n, y_n) \in \check{O}_\delta(P_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$,

$x_n \neq x_0$, $y_n \neq y_0$,

имеем $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = A}$.

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A$.

Геометрическая интерпретация функции двух переменных



$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$$

Определение предела функции двух переменных. Пример 9

Пример 9. Показать, что для функции $z = f(x, y) = x + y$ имеет место $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0$.

Возьмем $\{x_n\}, \{y_n\}$ такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$ $x_n \neq x_0$, $y_n \neq y_0$.

Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n + y_n) =$

$$= \lim_{n \to \infty} x_n + \lim_{n \to \infty} y_n = 0 + 0 = 0$$

Свойства предела функции двух переменных

Свойства пределов функции двух переменных аналогичны свойствам предела функции одной переменной

Пример 10.

$$A = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \left[\rho = \sqrt{x^2+y^2}\right] = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin\rho}{\rho} = 1$$

Определение непрерывности функции двух переменных

Опр. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$. Говорят, что функции $f(x, y)$ непрерывна в точке $P_0(x_0, y_0)$, если

1) существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ и

2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Или равносильно $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f = 0$,

где $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

Свойства непрерывности функции двух переменных

Свойства непрерывности функции двух переменных аналогичны свойствам непрерывности функции одной переменной.

А также аналогичны определение элементарной функции и док-во ее непрерывности.

Частная производная функции. Определение

Опр. Пусть $z = f(x, y)$ определена в области D.

Разность $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ $(y = \text{const})$ называется частным приращением функции $z = f(x, y)$ по переменной x.

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, если он существует, называется частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x.

Обозначение: z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Частная производная функции. Определение

Опр. Пусть $z = f(x, y)$ определена в области D.

Разность $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ $(x = \text{const})$ называется частным приращением функции $z = f(x, y)$ по переменной y.

Предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$, если он существует,

называется частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной y.

Обозначение: z'_y, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Частная производная функции. Пример 12

Пример 12. Найти z'_x, z'_y для $z = x^2y + xy^3$.

Решение.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2y + xy^3\right)'_x,$$

$$z'_x = \left(x^2y\right)'_x + \left(xy^3\right)'_x = y\left(x^2\right)'_x + y^3\left(x\right)'_x =$$

$$[y = \text{const}] = y \cdot 2x + y^3 \cdot 1 = 2xy + y^3$$

Частная производная функции. Пример 12

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y + xy^3 \right)'_y$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y \right)'_y + \left(xy^3 \right)'_y = x^2 \left(y \right)'_y + x\left(y^3 \right)'_y =$$

$$[x = \text{const}] = x^2 + x \cdot 3y^2 = x^2 + 3xy^2$$

Частная производная функции. Пример 13

Пример 13. Найти z'_x, z'_y для $z = x\sin(2x - y^2)$

Решение. $z'_x = \left(x\sin(2x-y^2)\right)'_x = [y = \mathrm{const}] =$

$$= (x)'_x \sin(2x-y^2) + x\left(\sin(2x-y^2)\right)'_x =$$

$$= \sin(2x-y^2) + x\cos(2x-y^2)\left(2x-y^2\right)'_x =$$

$$= \sin(2x-y^2) + x\cos(2x-y^2)\cdot 2 =$$

$$= \sin(2x-y^2) + 2x\cos(2x-y^2)$$

Частная производная функции. Пример 14

<u>Пример 14</u>. Найти z'_x, z'_y для $z = x\sin(2x - y^2)$

<u>Решение</u>.

$$z'_y = \left(x\sin(2x - y^2)\right)'_y = [x = \text{const}] =$$

$$= (x)'_y \sin(2x - y^2) + x\left(\sin(2x - y^2)\right)'_y =$$

$$= 0 \cdot \sin(2x - y^2) + x\cos(2x - y^2)\left(2x - y^2\right)'_y =$$

$$= x\cos(2x - y^2) \cdot (-2y) = -2xy\cos(2x - y^2)$$

Дифференциал функции двух переменных

<u>Опр (повторение)</u>. Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется выражение $y = y'dx = f'(x)dx$.

<u>Опр (повторение)</u>. Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется выражение

$$\boxed{dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = z'_x dx + z'_y dy}$$

Дифференциал функции двух переменных. Пример 15

Пример 15. Найти dz для $z = x^y$

$$z'_x = \left(x^y\right)'_x = [y = \text{const}] = yx^{y-1}$$

$$z'_y = \left(x^y\right)'_y = [x = \text{const}] = x^y \ln x$$

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy$$

Дифференцируемость функции одной переменной (повторение)

Утв. (повторение). Для определенной в $O(x)$ дифференцируемой в точке x функции $y = f(x)$

справедливо $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x$,

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

и $dx = \Delta x$.

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{y} \approx \boldsymbol{dx}}$$

Дифференцируемость функции двух переменных

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ – **полное приращение функции** $z = f(x,y)$

<u>Опр</u> Функция $z = f(x,y)$, определенная в $O(P)$, называется дифференцируемой в точке $P(x,y)$, если в этой точке существуют z'_x, z'_y и

$$\Delta z = dz + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$, $\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ и $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$

$$\boxed{\Delta z \approx dz}$$

Связь дифференцируемой и непрерывной функции двух переменных

Теорема (о связи непрер-ти и дифференц-ти).
Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P)$.
Если функция дифференцируема в точке P, *то она непрерывна в этой точке.*