АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА ДВУХФАКТОРНОЙ БИНАРНОЙ ТЕОРИИ ДОСТАТОЧНЫХ ПРИЧИН

Ю.В. Нагребецкая
Екатеринбург, УрФУ
2012

Формализация эксперимента

- На изучаемое бинарное событие D воздействуют бинарные факторы $X_1, X_2 (X_1, X_2, X_3)$.
- Уровни события и факторов условно обозначаются $0{,}1$.
- Не имеет значения, какими символами обозначены уровни факторов. Каждый из факторов в данном эксперименте обязательно присутствует. В частности, уровень $X_i = 0$, $i = 1,2$ может не означать отсутствие фактора.
- Возможные значения отклика определяются сочетаниями уровней факторов X_1, X_2 .
- Отклик можно представить в виде *булевой функции от факторов*

Достаточные причины

- *Достаточная причина* - такое *минимальное* множество событий, действий, состояний природы, которые все вместе неизбежно запускают тот механизм, который приводит к исследуемому исходу (Rothman, 1975).
- Если все компоненты частной достаточной причины присутствуют, то исход с необходимостью наступает. Внутри же каждой достаточной причины каждая её компонента необходима для того, чтобы эта достаточная причина приводила к рассматриваемому исходу (Rothman, 1975).
- Компоненты называются *необходимыми причинами* или *факторами*.

Формализация бинарного эксперимента

- Как отклик *D*, так и факторы X_1, X_2 можно считать *булевыми переменными*, с естественно определенной операцией дополнения.
- Логическая структура присутствия факторов в данном эксперименте полностью соответствует операциям дизъюнкции и конъюнкции над этими булевыми переменными.
- Отклик представляет собой *булеву функцию* от данных факторов.

Достаточные причины

T.J.VanderWeele, J.M.Robins, следуя Rothman, ввели следующее определение

Опр 1. Факторы $X_1, X_2, ..., X_n$ *формируют достаточную причину*, если из того, что $X_1 = X_2 = ... = X_n = 1$, следует $D = 1$.

$$\Updownarrow$$

Конъюнкция $X_1 X_2 ... X_n$ - *импликанта* б.ф. D.

$$\Updownarrow$$

$D = X_1 X_2 ... X_n \vee u(X_1, X_2, ..., X_n)$, где u - некоторая б. ф.

Достаточные причины

$$D = a_0 \vee a_1 X_1 \vee a_2 \bar{X}_1 \vee a_3 X_2 \vee a_4 \bar{X}_2 \vee$$
$$\vee a_5 X_1 X_2 \vee a_6 \bar{X}_1 X_2 \vee a_7 X_1 \bar{X}_2 \vee a_8 \bar{X}_2 \bar{X}_1,$$

достаточные причины при $a_i = 1$

T.J.VanderWeele, J.M.Robins, S. Greendland, C.Pool

n=2

Представление отклика в виде ДНФ

$$D = a_0 \vee a_1 X_1 \vee a_2 \bar{X}_1 \vee a_3 X_2 \vee a_4 \bar{X}_2 \vee$$

$$\vee a_5 X_1 X_2 \vee a_6 \bar{X}_1 X_2 \vee a_7 X_1 \bar{X}_2 \vee a_8 \bar{X}_2 \bar{X}_1,$$

элементарные конъюнкции

n=2

Взаимодействие

- Нарушение равенства эффектов есть проявление некоторого типа взаимодействия факторов
- Наиболее интересные из них *синергизм* и *антагонизм*.
- Синергизм означает наличие *дополнительного эффекта* по сравнению с суммой эффектов от каждого фактора.
- Антагонизм – совместный эффект *меньше*, чем сумма эффектов.

Аксиомы взаимодействия факторов для двух факторов

1) Если факторы X_1, X_2 взаимодействуют, то и факторы X_2, X_1 взаимодействуют.

2) Если факторы X_1, X_2 взаимодействуют, то и факторы $\bar{X}_1, X_2$ взаимодействуют.

формализация условий Greenland-Brumback, Vander Weele-Robins

n=2

Аксиомы взаимодействия факторов для трёх факторов

1) Если факторы X_1, X_2, X_3 взаимодействуют, то и факторы $X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}$ взаимодействуют для любой перестановки i_1, i_2, i_3 индексов 1,2,3.

2) Если факторы X_1, X_2, X_3 взаимодействуют, то и факторы $\overline{X}_1, X_2, X_3$ взаимодействуют.

обобщение аксиом взаимодействия для трёх бинарных факторов

n=3

Представление отклика в виде СДНФ

Любую б. ф. $f(x_1, x_2) \in \mathbb{B}(x_1, x_2)$ можно единственным образом представить в виде

$$f(x_1, x_2) = f_{00}\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee f_{01}\bar{x}_1 x_2 \vee f_{10} x_1\bar{x}_2 \vee f_{11} x_1 x_2 =$$

$$= f_{00}\bar{x}_1\bar{x}_2 + f_{01}\bar{x}_1 x_2 + f_{10} x_1\bar{x}_2 + f_{11} x_1 x_2 =$$

$$= \bigvee_{\alpha,\beta\in\mathbb{B}} f_{\alpha\beta} x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$f_{\alpha\beta} = f(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{B}$$

n=2

Группа, формализующая аксиомы взаимодействия

$$1)\ \begin{cases} x_1 \xrightarrow{S_1} x_2 \\ x_2 \xrightarrow{S_1} x_1 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 \xrightarrow{S_2} \overline{x}_1 \\ x_2 \xrightarrow{S_2} x_2 \end{cases}$$

$$x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \xrightarrow{S_1} x_1^{\beta} x_2^{\alpha} \qquad x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \xrightarrow{S_2} x_1^{1-\alpha} x_2^{\beta}$$

$$S_i(f(x_1, x_2)) = f_{00} S_i(\overline{x}_1 \overline{x}_2) + f_{01} S_i(\overline{x}_1 x_2) +$$

$$+ f_{10} S_i(x_1 \overline{x}_2) + f_{11} S_i(x_1 x_2),\ i \in \{1, 2\}$$

n=2

Группа, формализующая аксиомы взаимодействия

- Пусть $G = \langle S_1, S_2 \rangle$.
- Группа G является группой всех автоморфизмов булева квадрата (как графа).
- Группа G изоморфна группе всех симметрий квадрата.
- Группа G является некоторой группой автоморфизмов свободной б.а. $\mathbb{B}(x_1, x_2)$.

n=2

Группа, формализующая аксиомы взаимодействия

- Пусть группа $\boldsymbol{H}$ порождена соответств. преобразованиями булева куба.
- Группа $\boldsymbol{H}$ является группой всех автоморфизмов булева куба (как графа).
- Группа $\boldsymbol{H}$ изоморфна группе всех симметрий куба.
- Группа $\boldsymbol{H}$ является некоторой группой автоморфизмов своб. б.а. $\mathbb{B}(x_1, x_2, x_3)$.

n=3

Группа, формализующая аксиомы взаимодействия

G

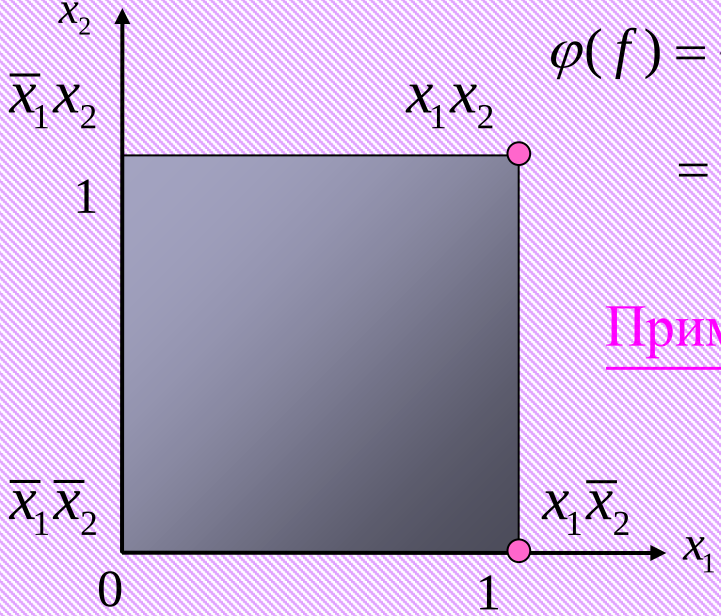
n=2

H

n=3

Геометрическая интерпретация свободной булевой алгебры

$$\varphi:\mathbb{B}(x_1,x_2)\to\mathscr{P}(\mathbb{B}^2)-\text{изоморфизм}$$



$$\varphi(f)=\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{B}^2\,\middle|\,f(\alpha,\beta)=1\right\}=$$

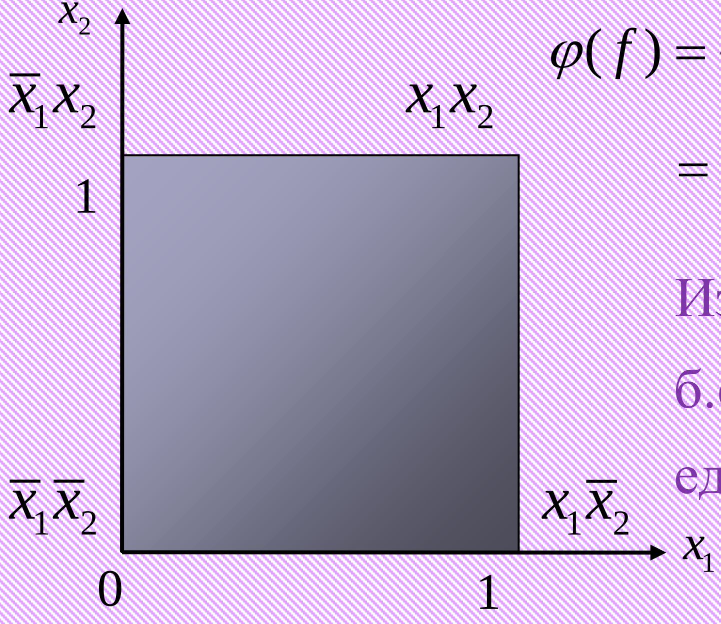
$$=\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{B}^2\,\middle|\,f_{\alpha\beta}=1\right\}$$

<u>Пример.</u> $f=x_1=x_1\overline{x}_2+x_1x_2,$

$$\varphi(f)=\{(1,0),(1,1)\}$$

Геометрическая интерпретация свободной булевой алгебры

$$\varphi : \mathbb{B}(x_1, x_2) \to \mathscr{P}(\mathbb{B}^2) - \text{изоморфизм}$$



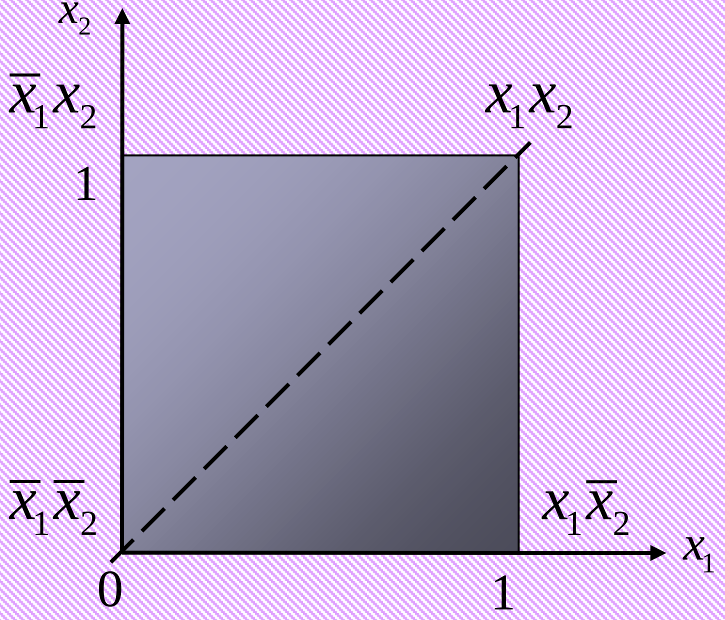
$$\varphi(f) = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{B}^2 \,\middle|\, f(\alpha, \beta) = 1 \right\} =$$

$$= \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{B}^2 \,\middle|\, f_{\alpha\beta} = 1 \right\}$$

Изоморфизм φ переводит б.ф. $x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ в вершину (α, β) единичного квадрата

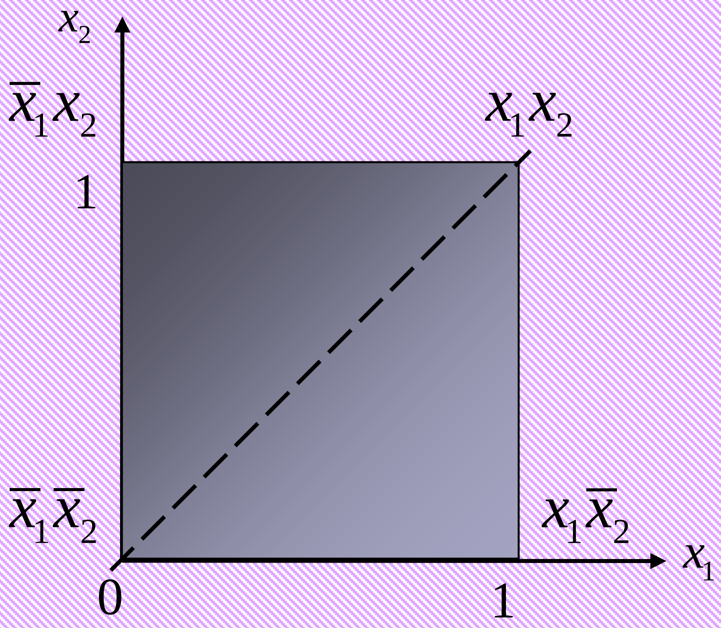
Группа, формализующая аксиомы взаимодействия

$$S_1 : x_1 \leftrightarrow x_2$$



Группа, формализующая аксиомы взаимодействия

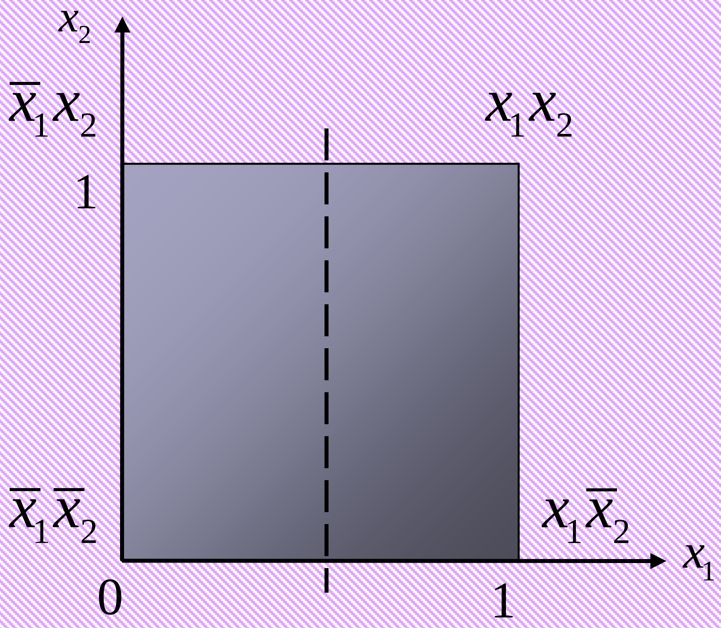
$$S_1 : x_1 \leftrightarrow x_2$$



Группа, формализующая аксиомы взаимодействия

$$S_1 : x_1 \leftrightarrow x_2$$

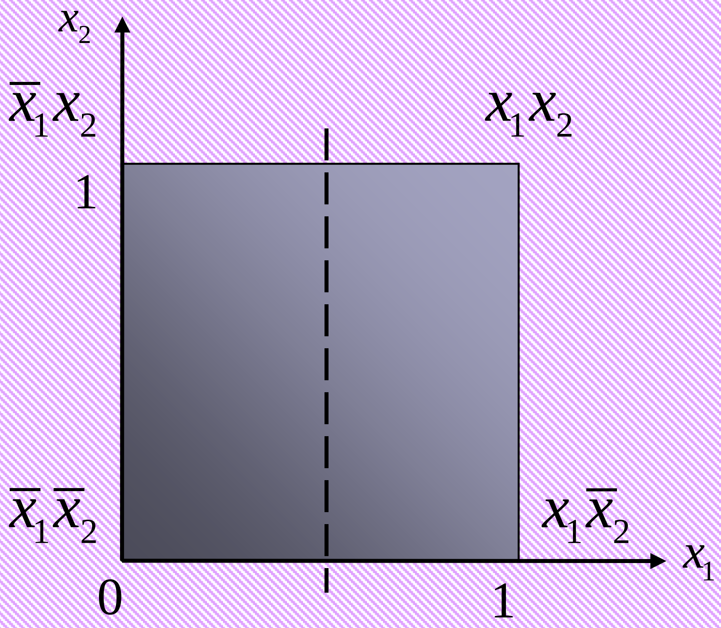
$$S_2 : x_1 \leftrightarrow \overline{x}_1$$



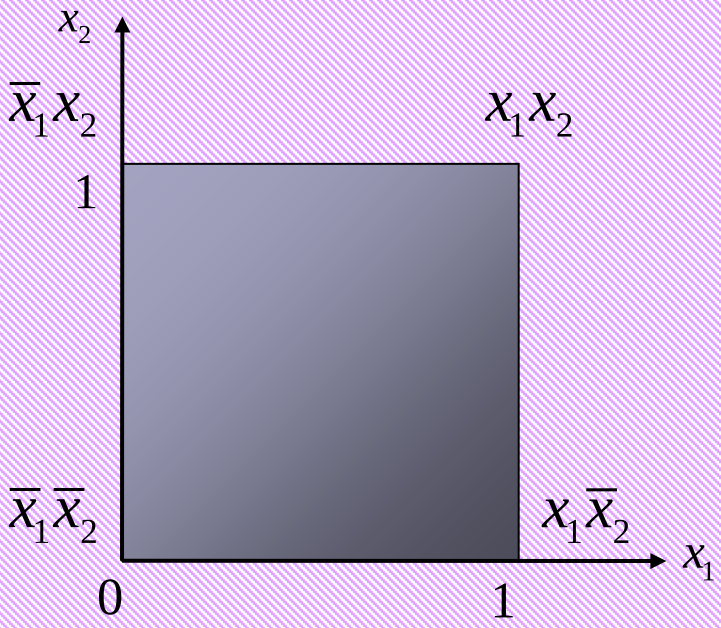
Группа, формализующая аксиомы взаимодействия

$$S_1 : x_1 \leftrightarrow x_2$$

$$S_2 : x_1 \leftrightarrow \overline{x}_1$$



Группа, формализующая аксиомы взаимодействия

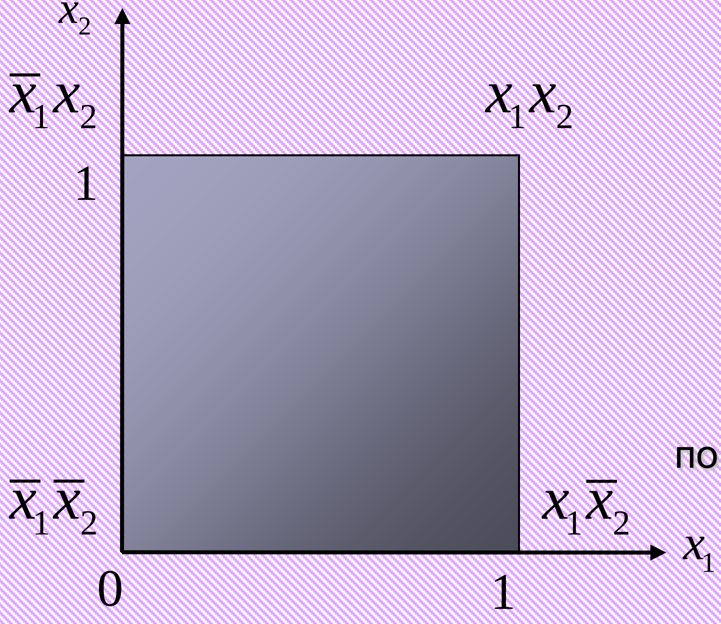


$$S_1 : x_1 \leftrightarrow x_2$$

$$S_2 : x_1 \leftrightarrow \bar{x}_1$$

$$G = \langle S_1, S_2 \rangle$$

Группа, формализующая аксиомы взаимодействия для *n*=2



$$S_1 : x_1 \leftrightarrow x_2$$

$$S_2 : x_1 \leftrightarrow \bar{x}_1$$

$$G = \langle S_1, S_2 \rangle$$

$$G \cong \langle a \rangle \times \langle \varepsilon \rangle$$

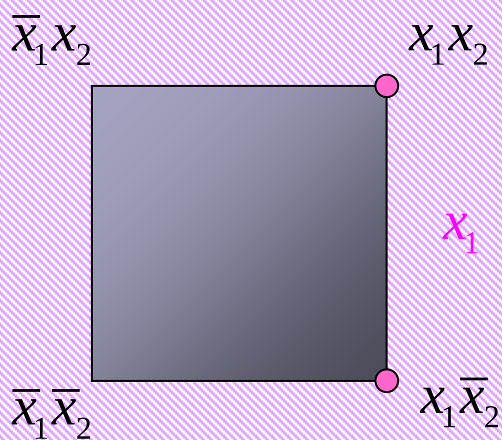
поворот на 90^0

центральная симметрия

Описание типов взаимодействия двух бинарных факторов

Пример. $f = x_1 = x_1\overline{x}_2 + x_1 x_2, \left\langle f \right\rangle = \left\{ x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2 \right\},$

$$f \xrightarrow{\varphi} \{(1,0),(1,1)\}$$

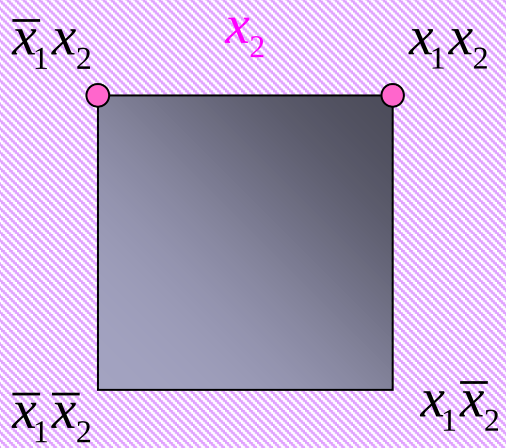


$$\left\langle f \right\rangle \xrightarrow{\varphi} \begin{array}{c} \{\{(1,0),(1,1)\}, \\ \{(0,1),(1,1)\}, \\ \{(0,0),(0,1)\}, \\ \{(0,0),(1,0)\}\} \end{array}$$

Описание типов взаимодействия двух бинарных факторов

<u>Пример.</u> $f = x_1 = x_1\overline{x}_2 + x_1 x_2, \langle f \rangle = \{x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2\},$

$$f \xrightarrow{\varphi} \{(1,0),(1,1)\}$$

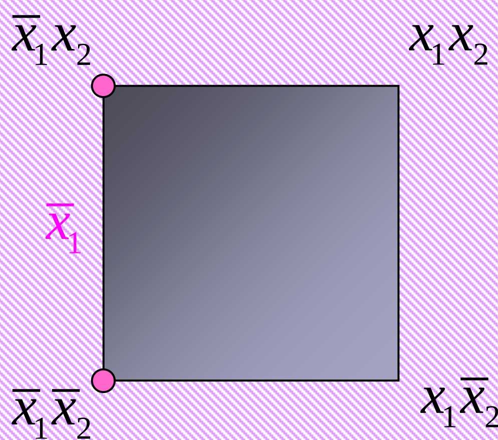


$$\langle f \rangle \xrightarrow{\varphi} \begin{array}{c} \{\{(1,0),(1,1)\}, \\ \{(0,1),(1,1)\}, \\ \{(0,0),(0,1)\}, \\ \{(0,0),(1,0)\}\} \end{array}$$

Описание типов взаимодействия двух бинарных факторов

Пример. $f = x_1 = x_1\overline{x}_2 + x_1 x_2, \left\langle f \right\rangle = \left\{ x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2 \right\},$

$$f \xrightarrow{\varphi} \{(1,0),(1,1)\}$$

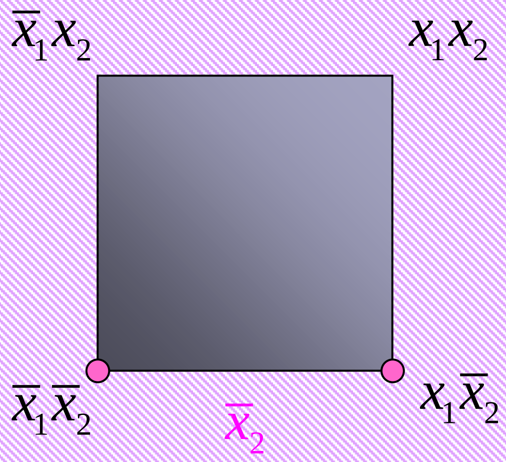


$$\left\langle f \right\rangle \xrightarrow{\varphi} \begin{array}{l} \{\{(1,0),(1,1)\}, \\ \{(0,1),(1,1)\}, \\ \{(0,0),(0,1)\}, \\ \{(0,0),(1,0)\}\} \end{array}$$

Описание типов взаимодействия двух бинарных факторов

<u>Пример.</u> $f = x_1 = x_1\overline{x}_2 + x_1 x_2, \left\langle f \right\rangle = \left\{ x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2 \right\},$

$$f \xrightarrow{\varphi} \{(1,0),(1,1)\}$$



$$\left\langle f \right\rangle \xrightarrow{\varphi} \begin{array}{l} \{\{(1,0),(1,1)\}, \\ \{(0,1),(1,1)\}, \\ \{(0,0),(0,1)\}, \\ \{(0,0),(1,0)\}\} \end{array}$$

Описание типов взаимодействия двух бинарных факторов

- Группа G действует на свободной булевой алгебре $\mathbb{B}(x_1, x_2)$.
- Действие группы G вызывает разбиение булевой алгебры $\mathbb{B}(x_1, x_2)$ на непересе-кающиеся орбиты.
- Полученное разбиение можно интерпре-тировать как некоторую классификацию типов взаимодействия двух бинарных факторов.

n=2

Описание действия группы

Теорема. Орбитами действия группы G на б.а. $\mathbb{B}(x_1, x_2)$ являются следующие множества булевых функций

$$\langle 0 \rangle = 0,\ \langle 1 \rangle = 1,\ \langle x_1 \rangle = \{x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2\},$$

$$\langle x_1 \vee x_2 \rangle = \{x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \vee x_2\},$$

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \{x_1 x_2,\ \bar{x}_1 x_2,\ x_1 \bar{x}_2,\ \bar{x}_1 \bar{x}_2\},$$

$$\langle x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \rangle = \{x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x},\ x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2\}$$

n=2

Классификация типов трёх бинарных факторов

Теорема. Взаимодействие трёх бинарных факторов описывается следующими представителями типов

$$0,\ 1,\ x_1,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 x_2,\ x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2,$$

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ x_1 \vee x_2 x_3,\ x_1 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3,\ x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_3,$$

$$x_1 x_2 \vee x_1 x_2 \vee x_2 x_3,\ x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3,\ x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3$$

$$x_1 x_2 x_3,\ x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3,$$

$$x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3,\ x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3,$$

$$x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2,\ x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3,\ x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3$$

n=3

Простая импликанта

Простой импликантой булевой функции f называется импликанта (т.е. элементарная дизъюнкция ДНФ, представляющей булеву функцию f), из которой нельзя вычеркнуть ни один литерал так, чтобы она перестала быть импликантой.

Пример. Для ДНФ $f = x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_2 = x_1 \vee x_2$ импликанты x_1, x_2 являются простыми, а импликанта x_1x_2 не является простой.

Тупиковая ДНФ

- *Тупиковой* ДНФ булевой функции f называется ДНФ этой функции, состоящая из простых импликант, из которой нельзя вычеркнуть ни одной простой импликанты так, чтобы не нарушилась равносильность исходной ДНФ.
- В тупиковой ДНФ нет *избыточных* импликант.

Длина ДНФ

- *Рангом* элементарной конъюнкции называется число входящих в неё неповторяющихся литералов.
- Ранг константы считается равным нулю.
- *Длиной ДНФ* называется сумма рангов входящих в неё элементарных конъюнкций.

Пример. Длина ДНФ $x_1 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee 0$ равна 5

n=2

Минимальная ДНФ

Минимальной ДНФ для данной булевой функции называется ДНФ минимальной длины, представляющая эту функцию.

Пример. Минимальной ДНФ для функции

$$f = x_1 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1 x_2 \vee 0$$

является ДНФ $f = x_1$

$$(f = x_1 \vee (x_1\overline{x}_2 \vee x_1 x_2) = x_1 \vee x_1 = x_1)$$

Минимальная и тупиковые ДНФ

- Любая *минимальной ДНФ* является тупиковой ДНФ.
- *Минимальная* ДНФ описывает характер взаимодействия в наиболее простой форме.
- Для булевой функции от двух переменных *минимальная* ДНФ и тупиковая ДНФ *единственны* и совпадают между собой.

Минимальная и тупиковые ДНФ

- T.J.VanderWeele, J.M.Robins неявно используют понятие *минимальной* и *тупиковой* ДНФ для определения взаимодействия факторов.

- Тупиковая ДНФ не содержит ни одной *избыточной* простой импликанты (достаточной причины), которую можно вычеркнуть без потери равносильности исходному отклику.

n=2

Типы взаимодействия

Утв. Любое преобразование из группы G переводит минимальную (тупиковую) ДНФ в минимальную (тупиковую) ДНФ

Опр 2. *Типом взаимодействия* двух бинарных факторов назовем представителя орбиты действия группы G на б. а. $\mathbb{B}(x_1, x_2)$, записанного в виде минимальной ДНФ.

n=2

Классификация взаимодействия двух бинарных факторов

Следствие 1. Взаимодействие двух бинарных факторов описывается следующими типами

$$0,\ 1,\ x_1,\ x_1 \vee x_2,$$

$$x_1 x_2,\ x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

n=2

Взаимодействие достаточных причин

Опр 3. Конъюнкция $X_1^{\alpha} X_2^{\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{B}$, представляет *взаимодействие факторов* X_1, X_2 *в отклике* $D(X_1, X_2)$ *при значениях уровней* $X_1 = \alpha,\ X_2 = \beta$, если она является простой импликантой минимальной ДНФ, представляющей отклик D.

(строгая математическая формулировка описательного определения для двух бинарных факторов, данного T.J.VanderWeele и J.M.Robins)

n=2

Примеры взаимодействия факторов

- **Пример 1.** В б. ф. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, представимой в в виде минимальной ДНФ, конъюнкция (простая импликанта) $x_1 x_2$ представляет взаимодействие факторов x_1, x_2 при значениях уровней $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, поскольку простая импликанта $x_1 x_2$ есть в единственной минимальной (и тупиковой) ДНФ, представляющей f.

n=2

Взаимодействие факторов

Утв 1. Конъюнкция $X_1^{\alpha} X_2^{\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{B}$, представляет *взаимодействие факторов в отклике* $D(x_1, x_2) \Leftrightarrow$ она является элементарной конъюнкцией каждой ДНФ, представляющей отклик D .

(утвержд., доказанное в других терминах T.J.VanderWeele и J.M.Robins, как одно из мотиваций для введения опр. взаимодействия факторов)

n=2

Взаимодействие факторов

Опр 3. Конъюнкция $X_1^{\alpha} X_2^{\beta} X_3^{\gamma}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{B}$, представляет *взаимодействие факторов* X_1, X_2, X_3 *в отклике* $D(X_1, X_2, X_3)$ *при значениях уровней* $X_1 = \alpha, X_2 = \beta, X_3 = \gamma$, если она является простой импликантой каждой тупиковой ДНФ, представляющей отклик D.

(строгая математическая формулировка определения для трех бинарных факторов, данного T.J.VanderWeele и J.M.Robins)

n=3

Примеры взаимодействия факторов

- **Пример 2.** В б. ф. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$, представимой в виде минимальной ДНФ, конъюнкция $x_1 x_2 x_3$ (простая импликанта) представляет взаимодействие факторов x_1, x_2, x_3 при значениях уровней $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1,$ поскольку она есть в единственной минимальной (и тупиковой) ДНФ, представляющей f. А конъюнкция $\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3$ (простая импликанта) представляет взаимодействие достаточных причин x_1, x_2, x_3 при значениях уровней

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

n=3

Взаимодействие факторов

Утв 2. Конъюнкция $X_1^{\alpha} X_2^{\beta} X_3^{\gamma}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{B}$, представляет *взаимодействие факторов в отклике* $D(X_1, X_2, X_3) \Leftrightarrow$ она является элементарной конъюнкцией каждой ДНФ, представляющей отклик D.

(утвержд., доказанное T.J.VanderWeele и J.M.Robins, как одно из мотиваций для введения опр. вз-я факторов)

n=3

Взаимодействие факторов

Опр 4. Конъюнкция $X_{i_1}^{\alpha} X_{i_2}^{\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{B}$, представляет *взаимодействие факторов* X_{i_1}, X_{i_2} *в отклике* $D(X_1, X_2, X_3)$, если для каждой тупиковой ДНФ, представляющей отклик D, она является подконъюнкцией некоторой ее простой импликанты.

(строгая математическая формулировка определения для двух бинарных факторов, данного T.J.VanderWeele и J.M.Robins)

n=2,3

Примеры взаимодействия факторов

- **Пример 3.** В б. ф. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3$, представимой в виде минимальной ДНФ, конъюнкция $x_1 x_2$ представляет взаимодействие факторов x_1, x_2, поскольку она является подконъюнкцией простой импликанты $x_1 x_2 x_3$ единственной минимальной (и тупиковой) ДНФ, представляющей б.ф. f.

n=3

Взаимодействие факторов

Утв 3. Конъюнкция $X_1^{\alpha} X_2^{\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{B}$, представляет *взаимодействие факторов в отклике* $D(X_1, X_2, X_3) \Leftrightarrow$ для каждой ДНФ, представляющей отклик D, она является подконъюнкцией некоторой элементарной дизъюнкции.

Конъюн. $X_1^{\alpha} X_2^{\beta}$ присутствует в качестве достат. причины в любом наборе достат. причин для отклика D.

n=3

Взаимодействие факторов

- Итак, *взаимодействие* имеет место *между факторами* X_1, X_2, если для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{B}$ конъюнкция $X_1^{\alpha} X_2^{\beta}$ представляет взаимодействие достаточных причин в отклике D.
- Будем говорить, что соответствующая булева функция *представляет взаимодействие факторов*.

n=2,3

Взаимодействие факторов

- Утв. Если б. ф. $f \in \mathbb{B}(x_1, x_2)$ представляет взаимодействие факторов, то и б. ф. $S(f)$ для любого преобразования $S \in G$ представляет взаимодействие факторов.

- Взаимодействие между факторами можно характеризовать при помощи *типов взаимодействия*

n=2

Классификация взаимодействия двух бинарных факторов

- Типы 0,1 постоянны при всех уровнях двух факторов и поэтому вообще не характеризуют действия и, тем более взаимодействия этих факторов.

- Тип x_1 представляет действие только одного фактора, т.е. не характеризует взаимодействие двух факторов.

n=2

Классификация взаимодействия двух бинарных факторов

- Типы $x_1 x_2, \; x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2$ представляют *взаимодействие факторов*.

Для откликов этого типа всегда есть *синергизм* между факторами.

- Тип $x_1 \vee x_2$ представляют совместное действие *факторов*, но не является синергизмом.

n=2

Примеры взаимодействия двух бинарных факторов

- **Пример 4.** $D=1$ $(D=0)$ - у пациента неудовлетв. (удовлетв.) состояние организма.
- $X_i=1$ $(X_i=0)$ - воздействие (не воздействие) на пациента i-го токсина.
- Пациент заболевает только в случае воздействия сразу двух токсинов.
- Б. ф. $f=x_1x_2$ описывает тип взаимодействия бинарных факторов X_1, X_2 в данном случае.

n=2

Примеры взаимодействия

- **Пример 5.** $D = 1$ $(D = 0)$ - у пациента неудовлетв. (удовлетв.) состояние организма.
- $X_i = 1$ $(X_i = 0)$ - приём (неприём) пациентом i-го лекарст. средства, $i = 1, 2.$
- Пациент заболевает как при отсутствии лечения, так и при одновременном приёме двух несовместимых для него препаратов.
- Б. ф. $f = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2$ описывает тип взаимодействия бинарных факторов X_1, X_2.

Примеры взаимодействия

- **Пример 6.** $D = 1$ $(D = 0)$ - у пациента неудовлетв. (удовлетв.) состояние организма.
- $X_i = 1$ $(X_i = 0)$ - воздействие (невоздействие) на пациента i -го токсина.
- Пациент заболевает в случае воздействия только одного токсина.
- Факторы взаимодействуют по типу

$$f = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2$$

n=2

Заключение

- Построена математическая модель концепции достаточных причин для двух бинарных факторов на основе теории булевых функций.
- В качестве основы для классификации типов взаимодействия предложено брать представление булевой функции в виде минимальной ДНФ.
- Свойства рассматриваемого бинарного эксперимента формализованы в виде преобразований на модельной свободной булевой алгебре, которые порождают группу автоморфизмов этой алгебры.
- Построенная модель обобщена на случай трёх бинарных факторов, что позволило полностью классифицировать типы взаимодействия этих факторов