©2022 г. **Ю.В. Нагребецкая**[1], канд. физ.-мат. наук; **В.Г. Панов**[2], канд. физ.-мат. наук;
**А.А. Немальцева**[1], студент
[1] *Уральский федеральный университет, Екатеринбург,*
[2] *Институт промышленной экологии УрО РАН, Екатеринбург*

## ТОЧНОЕ ЧИСЛО СПЕКТРОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БИНАРНЫХ ФАКТОРОВ

Вычислено замкнутое выражение для числа спектров взаимодействия в булевой формализации бинарной теории достаточных причин. Приведено утверждение о реализуемости любой последовательности со свойством спектра в виде спектра взаимодействия переменных некоторой булевой функции.
***Ключевые слова***: бинарная теория достаточных причин, булева алгебра, спектр совместного действия бинарных факторов, тождество Чу-Вандермонда.

**Ju.V. Nagrebetskaya**, **V.G. Panov**, **A.A. Nemaltseva**
[1] *Ural Federal University, Ekaterinburg,*
[2] *Institute of Industrial Ecology UrB of RAS, Ekaterinburg*

## THE EXACT NUMBER OF INTERACTION SPECTRA OF BINARY FACTORS

A closed expression for the number of interaction spectra in the Boolean formalization of the binary theory of sufficient causes is calculated. The statement about the feasibility of any sequence with a spectrum property in the form of an interaction spectrum of variables of some Boolean function is given.
***Key words***: binary sufficient-cause theory, Boolean algebra, spectrum of joint action of binary factors, Chu-Wandermond identity.

**Введение.** В медико-биологических науках поиск причины того или иного феномена является одной из основных задач. Специфика этих исследований связаны с тем, что в них участвуют биологические объекты, которые выступают не только в качестве испытуемых, но и активно действующих субъектов, реакция которых на одни и те же действующие факторы может быть различной в зависимости от состояния субъекта. Сложность и важность исследования причинности в медико-биологических науках стимулировали активные исследования в этой области, которые привели к разработке концепции достаточных причин (sufficient causes) [1-3]. Эта конструкция оказывается достаточно продуктивной как в отношении разнообразных приложений, так и возможности развития формального аппарата [4-7]. В частности, в бинарном варианте этой теории (двухуровневые факторы и двухуровневый отклик) возможно эффективное применение аппарата булевых алгебр и булевых функций [1-9]. В рамках построенной математической модели бинарной теории достаточных причин удается формализовать понятия взаимодействия (совместного действия) факторов, ввести понятие типа взаимодействия действующих факторов в данном отклике и охарактеризовать эти типы взаимодействия исчерпывающим образом. Для оценки силы совместного действия в [4-7], [9] были введены понятия степени совместного действия факторов и спектра совместного действия факторов в данном отклике [8]. Один из важных вопросов этой теории состоит в оценке того, насколько много может быть спектров совместного действия факторов для откликов, зависящих от данного числа факторов. В работе [8] была приведена верхняя оценка количества спектров совместного действия для откликов, зависящих от данного числа факторов, которая, кроме того, была дана в виде выражения, сложного с вычислительной точки зрения. Основной результат настоящей работы (Следствие 2) дает замкнутое выражение для точного числа спектров совместного действия данного числа факторов

**Необходимые понятия и определения.** Все необходимые определения и обозначения приведены в работах [1-9]. Ниже приведены некоторые определения и факты, существенно используемые в последующем изложении.

**Определение 1.** *Спектром совместного действия* факторов $x_1,\ldots,x_n$ в отклике (булевой функции) $f \in \mathrm{B}(x_1,\ldots,x_n)$ назовем набор $M_f = (\mu_{f,1},...,\mu_{f,n})$, где $\mu_{f,k}$ – степень совместного действия $k$ факторов в отклике $f$.

Связь степеней совместного действия, а значит, и строение спектра дано в следующем утверждении [7].

**Теорема 1.** Для любого отклика $f \in \mathrm{B}(x_1,\ldots,x_n)$ существует единственное число $m_f \in \{1,\ldots,n\}$ такое, что выполняются неравенства

(1) $\mu_{f,i} = i$ для любого $i \in \{0,1,\ldots,m_f\}$;

(2) $\mu_{f,j} \le \mu_{f,j-1}$ для любого $j \in \{m_f+1,\ldots,n\}$, если $m_f < n$.

Последовательности, удовлетворяющие условиям теоремы 1, в [8] были названы обладающими свойством спектра.

**Определение 2.** Будем говорить, что последовательность $M = (m_1,...,m_n)$ целых чисел $1 \le m_i \le n$ обладает свойством спектра, если существует единственное число $K \in \{1,\ldots,n\}$ такое, что выполняются неравенства

(1) $m_i = i$ для любого $i \in \{0,1,\ldots,K\}$;

(2) $m_j \le m_{j-1}$ для любого $j \in \{K+1,\ldots,n\}$, если $K < n$.

В [8] была приведена формула для количества таких последовательностей.

**Теорема 2.** Для любого $n \in \mathrm{N}$ число $S_n$ последовательностей, обладающих свойством спектра равно

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{k+1} C_{k+1}^{l} C_{n-k-1}^{l-1} + 1,$$

где $C_j^i$ – число сочетаний из *j* по *i*.

Здесь и ниже считается, что $C_a^b = 0,$ если *a* < *b*.

**Доказательство.** Число $num(p,r)$ всех целочисленных последовательностей $\{x_i\}_{i=1}^{p}$ таких, что $1 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_p \le r$ равно $C_r^p$ [10]. Вычислим число $N(p,r,l)$ всех целочисленных последовательностей $\{y_i\}_{i=1}^{p}$ таких, что $1 \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_p \le r$ и мощность множества $\{y_1, y_2,\ldots,y_p\}$ равна $l$ $(1 \le l \le p)$. Пусть $l > 1,$ тогда $p > 1$. И пусть

$$x_1 = y_1 = y_2 = ... = y_{i_1} < x_2 = y_{i_1+1} = ... = y_{i_2} < ... < x_{l-1} = y_{i_{l-2}+1} = ... = y_{i_{l-1}} <$$
$$< x_l = y_{i_{l-1}+1} = ... = y_p,$$

где $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{l-1} \le p-1$. Число таких последовательностей $\{i_j\}_{j=1}^{l-1}$ равно

$num(l-1, p-1),$ а последовательностей $\{x_i\}_{i=1}^{p}$ таких, что $1 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_l \le r,$ равно $num(l,r).$ Следовательно, $N(p,r,l) = num(l-1, p-1) \cdot num(l,r) = C_{p-1}^{l-1} C_r^l.$ Заметим, что формула $N(p,r,l) = C_{p-1}^{l-1} C_r^l$ справедлива и при $l = 1.$ Поэтому число всех последовательностей $1 \le y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_p \le r$, а значит, и число всех последовательностей $r \ge y_1 \ge \ldots \ge y_p \ge 1,$ равно

$$N(p,r) = \sum_{l=1}^{p} N(p,r,l) = \sum_{l=1}^{p} C_{p-1}^{l-1} C_r^l = \sum_{l=1}^{r} C_{p-1}^{l-1} C_r^l.$$

В силу определения 2 последовательность $M = (m_1, \ldots, m_n),$ обладающая свойством спектра, при $K < n$ взаимно однозначно соответствует невозрастающей последовательности $\{m_i\}_{i=K+1}^{n}$ такой, что $K \ge m_{K+1} \ge m_{K+2} \ge \ldots \ge m_n \ge 0.$ Ясно, что число таких последовательностей равно

$$N(n-K, K+1) = \sum_{l=1}^{K+1} C_{n-K-1}^{l-1} C_{K+1}^l.$$

Таким образом, ввиду того, что $K \in \{0, \ldots, n-1\}$ для рассмотренных выше последовательностей $M$ и $K = n$ для единственной последовательности $M = (1, 2, \ldots, n),$ обладающей свойством спектра, получаем

$$S_n = \sum_{K=0}^{n-1} N(n-K, K+1) + 1 = \sum_{K=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{K+1} C_{n-K-1}^{l-1} C_{K+1}^l + 1$$

**Основные результаты.** Формула для числа $S_n$ последовательностей, обладающих свойством спектра, может быть существенна упрощена.

**Теорема 3.** Для любого $n \in \mathrm{N}$ число $S_n = 2^n.$

**Доказательство**. Преобразуем сумму $S(k) = \sum_{l=1}^{k+1} C_{k+1}^l C_{n-k-1}^{l-1}$ из теоремы 2: $S(k) = \sum_{l=1}^{k+1} C_{k+1}^l C_{n-k-1}^{n-k-l}.$ Тождество Чу-Вандермонда [11] $\sum_{i=0}^{m} C_t^i C_s^{m-i} = C_{t+s}^m$ можно переписать в виде $\sum_{i=0}^{t} C_t^i C_s^{m-i} = C_{t+s}^m,$ учитывая, что $C_t^i = 0$ при $i > t$ и $C_s^{m-i} = 0$ при $i > m.$ Из последнего следует тождество $\sum_{i=1}^{t} C_t^i C_s^{m-i} = C_{t+s}^m - C_t^0 C_s^m.$ Применим это тождество к сумме $S(k),$ взяв в качестве $t = k+1,$ $i = l,$ $s = n-k-1,$ $m = n-k.$ Тогда получим $S(k) = C_n^{n-k} - C_{k+1}^0 C_{n-k-1}^{n-k},$ откуда имеем $S(k) = C_n^k,$ ввиду того, что, как отмечено выше, $C_a^b = 0,$ если $a < b$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} S(k) + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k + 1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

**Пример.** В [8] было вычислены количества всех спектров для двух и трех факторов $S_2 = 4,$ $S_3 = 8$ по формуле из теоремы 2. Это вполне согласуется с результатом теоремы 3.

Поскольку по определению 2 любой спектр совместного действия факторов является последовательностью, обладающей свойством спектра, из теоремы 3 имеем

**Следствие 1.** Для любого $n \in \mathrm{N}$ число всевозможных спектров совместного действия для откликов, зависящих от *n* факторов, не превосходит $2^n$.

В [8] была выдвинута гипотеза о том, что для любой последовательности, обладающей свойством спектра, существует хотя бы один отклик, спектр которой равен данной последовательности ([8, Гипотеза 1, с. 8]). Следующее утверждение доказывает данную гипотезу.

**Теорема 4.** Для любого $n \in \mathrm{N}$ и для любой последовательности $M = (m_1, ..., m_n)$ чисел $1 \le m_i \le n,$ обладающей свойством спектра, существует хотя бы один отклик $f$ такой, что $M_f = M.$

Таким образом, при помощи теоремы 4 доказана гипотеза ([8, Гипотеза 2, с. 9]): число всех спектров откликов от $n$ факторов равно $S_n.$ Из теорем 3, 4 имеем

**Следствие 2.** Для любого $n \in \mathrm{N}$ число всевозможных спектров совместного действия для откликов, зависящих от *n* факторов, равно $2^n$.

**Обсуждение.** Мы видим, что при числе всех откликов (булевых функций) от $n$ факторов (переменных), равном $2^{2^n}$, количество спектров значительно меньше. В то же время, спектр вполне характеризует совместное действие факторов в данном отклике [7]-[9], что еще раз подтверждает правильный выбор этого понятия для характеризации типов совместного действия факторов.

**Заключение.** Вычислено точное число спектров совместного действия бинарных факторов для бинарных откликов, зависящих от данного количества факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панов В.Г., Нагребецкая Ю.В. Алгебраическая трактовка двухфакторной теории достаточных причин // Труды СПИИРАН. 2013. №26(3). С. 277-296.
2. Panov V.G., Nagrebetskaya J.V. Boolean algebras and classification of interactions in sufficient-component cause model // Int. J. Pure Appl. Math. 2015. Vol. 98(2). P. 239-259.
3. Panov V.G., Nagrebetskaya J.V. Classification of combined action of binary factors and Coxeter groups // J. Discr. Math. Sci. & Cryptography. 2018. Vol. 21(3). P. 661-677.
4. Нагребецкая Ю. В., Панов, В.Г. Степень взаимодействия бинарных факторов в теории достаточных причин // Системный анализ в медицине: материалы XIII Междунар. конф., Благовещенск, 19-20 сентября 2019 г. Благовещенск: ДНЦ ФПД, 2019. С. 31-34.
5. Нагребецкая Ю.В., Панов В.Г. Обобщение понятия взаимодействия n факторов в теории достаточных причин и его свойства // Системный анализ в медицине: материалы XIII Междунар. конф., Благовещенск, 19-20 сентября 2019 г. Благовещенск: ДНЦ ФПД, 2019. С. 35–38.
6. Nagrebetskaya J.V., Panov V.G. Joint action of binary factors in the sufficient causes theory and its classification // Int. J. Innovative Technology and Exploring Engineering. 2019. Vol. 9(1). P. 2146-2152.
7. Нагребецкая Ю.В., Панов В.Г. Максимальное взаимодействие бинарных факторов // Системный анализ в медицине: материалы XIII Междунар. конф., Благовещенск, 15-16 октября 2020 г. Благовещенск: ДНЦ ФПД, 2020. С. 28-32.
8. Нагребецкая Ю.В., Панов В.Г. Число спектров взаимодействия факторов // Системный анализ в медицине: материалы XIII Междунар. конф., Благовещенск, 15-16 октября 2020 г. Благовещенск: ДНЦ ФПД, 2020. С. 6-9.
9. Нагребецкая Ю.В., Панов В.Г. Булева модель частичного взаимодействия бинарных факторов.

// Вестник Омского университета. 2021. Т. 26, №3. С. 10-19.
10. Виленкин Н. Я. Индукция. Комбинаторика: пособие для учителей. Просвещение, 1976.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. В 3т. Т.1. Элементарные функции. 2-е изд., исправл. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 632с.

*I.V.Nagrebetckaia@urfu.ru, vpanov@ecko.uran.ru, anna.en.study@mail.ru*

**Е.А. Колесник**, д-р. биол. наук
*Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, Челябинск*

## ТЕРМИН, ПОНЯТИЕ ОБ АДАПТАЦИОННОМ ГОМЕОСТАЗИСЕ, ЕГО ГИПОТЕЗА, ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

По концепциям научных школ характеризуется формирование термина, гипотезы и основных положений теории адаптационного гомеостаза, разработанных исходя из результатов применения многомерных методов математического анализа экспериментальных данных авторского исследования.

***Ключевые слова:*** адаптационный гомеостаз, функциональные системы, внутренняя среда, онтогенез, методы многомерного анализа.

**E.A. Kolesnik**
*South Ural State Humanitarian Pedagogical University, Chelyabinsk*

## TERM, CONCEPT OF ADAPTIVE HOMEOSTASIS, ITS HYPOTHESIS, THEORY AND PRACTICE

According to the concepts of scientific schools, the formation of the term, hypothesis and main provisions of the theory of adaptive homeostasis, developed on the basis of the results of applying multidimensional methods of mathematical analysis of experimental data of the author's research, is characterized.

***Key words:*** adaptive homeostasis, functional systems, internal environment, ontogenesis, methods of multidimensional analysis.

**Введение.** Впервые представления об адаптационных процессах обеспечивающих функциональную систему гомеостаза отмечались в работах Б.С. Кулаева [1], В.П. Казначеева [2], Л.Е. Панина [3].

Функциональные системы организма, освещённые в теории П. К. Анохина [4] и характеризуемые в исследованиях И. И. Шмальгаузена [5] представляют собой нейрогуморально регулируемые тканево-органные комплексы морфофункционально объединённые филогенетически сформированной целью в полезном онтогенетическом физиологическом результате. Так, В. М. Дильманом [6] был предложен термин «адаптационный гомеостат» впервые характеризующий фактическую связь приспособления к изменению факторов окружающей среды и относительное, динамическое и регулируемое постоянство внутренней среды организма, обеспечивающее сохранение и развитие витальных функций в процессах роста и развития, то есть гомеостаз (*synonymum*: гомеостазис) [7-9].

В 2010 – 2020-хх гг. было разработано понятие и предложен термин адаптационный гомеостаз [7, 10-12]. В итоге исследований были сформулированы гипотеза и теория адаптационного гомеостазиса [11, 12].

Применение многомерных методов математического анализа экспериментальных данных позволило получить релевантные результаты, характеризующие функциональную систему адаптационного гомеостазиса [10, 12].