СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТОК МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Б.М.Верников

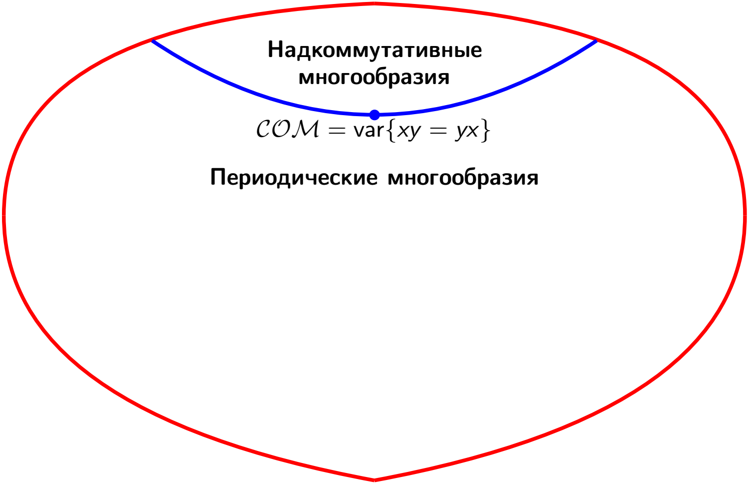
Уральский федеральный университет

Международная конференция по алгебре и комбинаторике

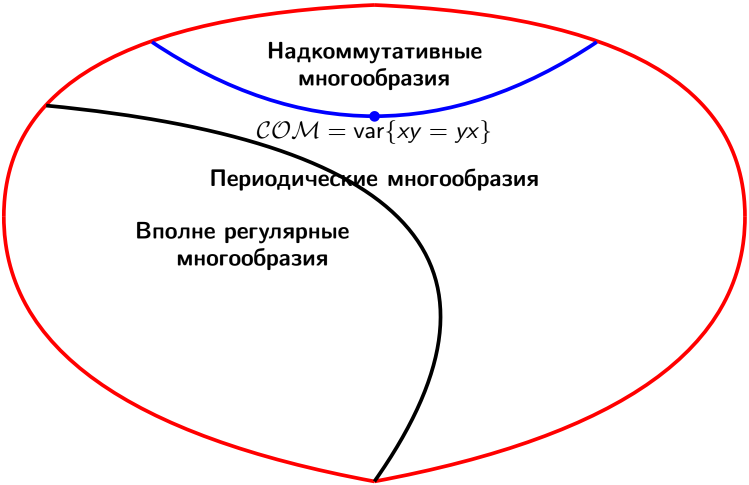
Екатеринбург

7 июня 2013 г.

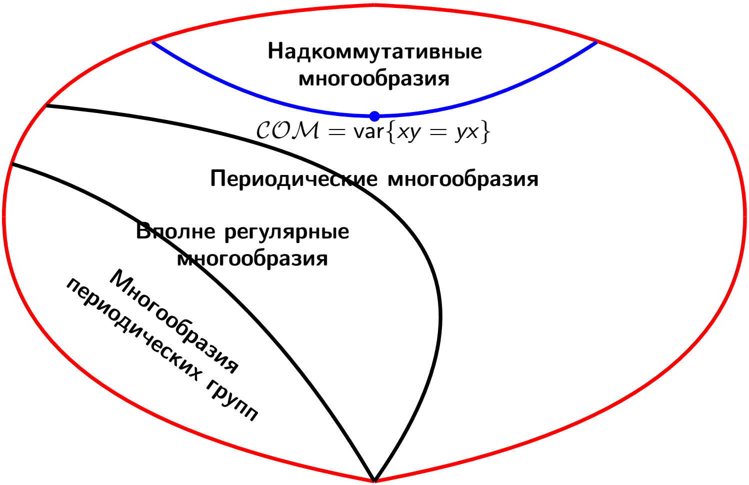
Решетка многообразий полугрупп



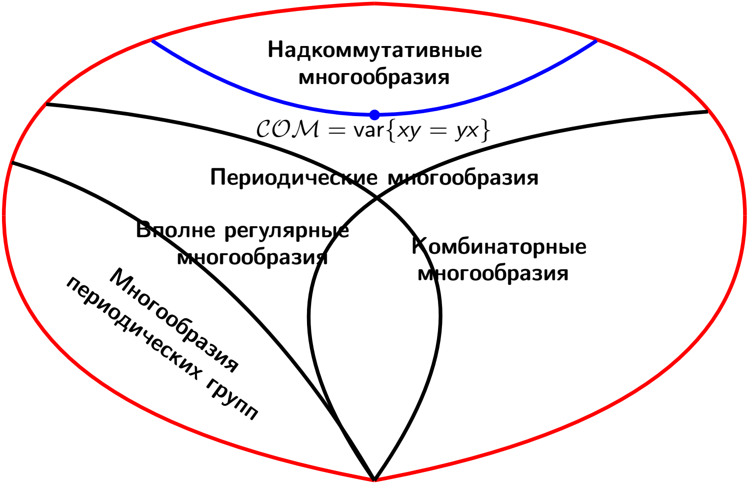
«Карта» решетки всех полугрупповых многообразий



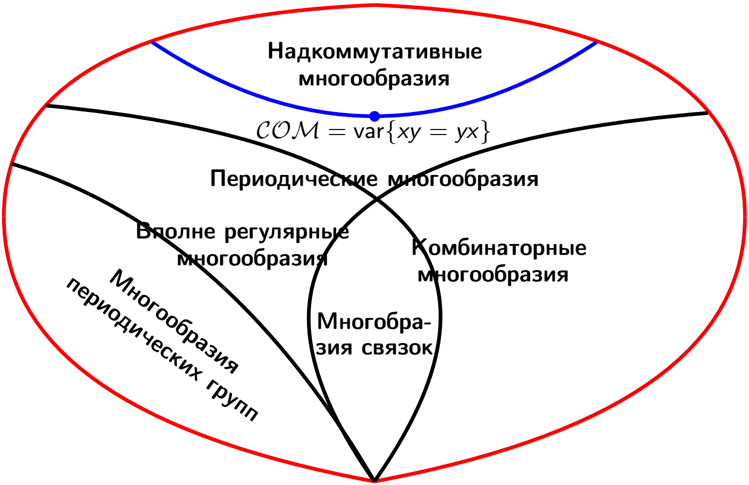
«Карта» решетки всех полугрупповых многообразий



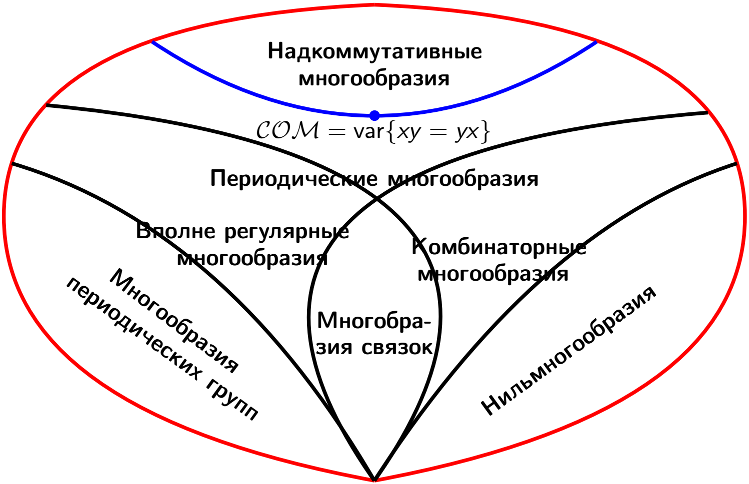
«Карта» решетки всех полугрупповых многообразий



«Карта» решетки всех полугрупповых многообразий

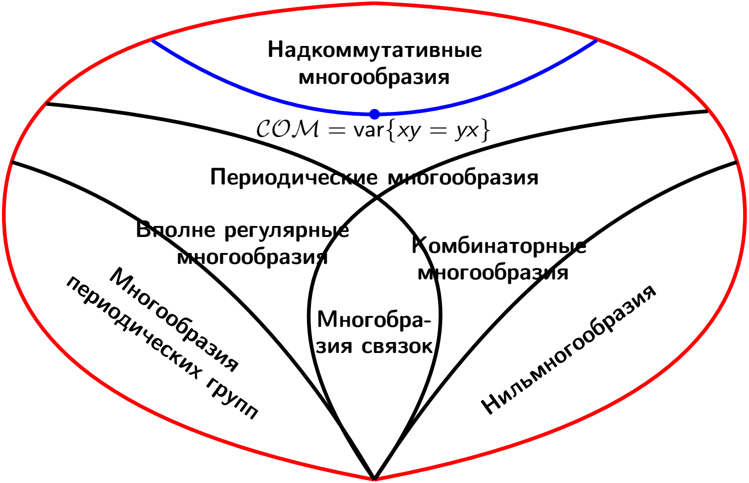


«Карта» решетки всех полугрупповых многообразий



«Карта» решетки всех полугрупповых многообразий

J.Jezek, 1976: решетка нильмногообразий содержит антиизоморфную копию решетки разбиений на счетном множестве



«Карта» решетки всех полугрупповых многообразий

J.Jezek, 1976: решетка нильмногообразий содержит антиизоморфную копию решетки разбиений на счетном множестве

Полностью описаны многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых:

1. модулярна (М.В.Волков, 1989–1992)
2. дезаргова, полумодулярна вверх или вниз (Б.М.Верников, М.В.Волков, 2002–2004)
(дезарговость = полумодулярность вверх = модулярность ≠ полумодулярность вниз)
3. дистрибутивна (по модулю групп) — за исключением некоторого весьма частного случая (М.В.Волков, 1989–1992)

Тождества в решетках многообразий полугрупп

Полностью описаны многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых:

1. модулярна (М.В.Волков, 1989–1992)
2. дезаргова, полумодулярна вверх или вниз (Б.М.Верников, М.В.Волков, 2002–2004)
   (дезарговость = полумодулярность вверх = модулярность $\neq$ полумодулярность вниз)
3. дистрибутивна (по модулю групп) — за исключением некоторого весьма частного случая (М.В.Волков, 1989–1992)

Полностью описаны многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых:

1. модулярна (М.В.Волков, 1989–1992)
2. дезаргова, полумодулярна вверх или вниз (Б.М.Верников, М.В.Волков, 2002–2004)
(дезарговость = полумодулярность вверх = модулярность $\neq$ полумодулярность вниз)
3. дистрибутивна (по модулю групп) — за исключением некоторого весьма частного случая (М.В.Волков, 1989–1992)

Полностью описаны многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых:

1. модулярна (М.В.Волков, 1989–1992)
2. дезаргова, полумодулярна вверх или вниз (Б.М.Верников, М.В.Волков, 2002–2004)
   (дезарговость $=$ полумодулярность вверх $=$ модулярность $\neq$ полумодулярность вниз)
3. дистрибутивна (по модулю групп) — за исключением некоторого весьма частного случая (М.В.Волков, 1989–1992)

«Локальная» дистрибутивность или модулярность «в окрестности элемента»

a — *дистрибутивный элемент*: $(\forall x, y)\ \ a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$

a — дистрибутивный $\Longleftrightarrow \varphi_a \colon x \longmapsto x \vee a$ — гомоморфизм из L в $[a)$

кодистрибутивные — двойственно к дистрибутивным

a — *стандартный элемент*: $(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee (x \wedge y)$

костандартные — двойственно к стандартным

a — *нейтральный элемент*:

$$(\forall x, y)\ \ a, x, y \text{ порождают дистрибутивную подрешетку}$$

или, эквивалентно,

$$(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

a — нейтральный $\Longrightarrow L$ — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$

«Локальная» дистрибутивность или модулярность «в окрестности элемента»

a — дистрибутивный элемент: $(\forall x, y)\ \ a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$

a — дистрибутивный $\Longleftrightarrow \varphi_a \colon x \longmapsto x \vee a$ — гомоморфизм из L в $[a)$

кодистрибутивные — двойственно к дистрибутивным

a — стандартный элемент: $(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee (x \wedge y)$

костандартные — двойственно к стандартным

a — нейтральный элемент:

$(\forall x, y)$ a, x, y порождают дистрибутивную подрешетку

или, эквивалентно,

$$(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

a — нейтральный $\Longrightarrow L$ — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$

«Локальная» дистрибутивность или модулярность «в окрестности элемента»

a — *дистрибутивный элемент*: $(\forall x, y)\ \ a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$

a — дистрибутивный $\Longleftrightarrow \varphi_a \colon x \longmapsto x \vee a$ — гомоморфизм из L в $[a)$

кодистрибутивные — двойственно к дистрибутивным

a — *стандартный элемент*: $(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee (x \wedge y)$

костандартные — двойственно к стандартным

a — *нейтральный элемент*:

$$(\forall x, y)\ \ a, x, y \text{ порождают дистрибутивную подрешетку}$$

или, эквивалентно,

$$(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

a — нейтральный $\Longrightarrow L$ — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$

«Локальная» дистрибутивность или модулярность «в окрестности элемента»

a — *дистрибутивный элемент*: $(\forall x, y)\ \ a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$

a — дистрибутивный $\Longleftrightarrow \varphi_a \colon x \longmapsto x \vee a$ — гомоморфизм из L в $[a)$

кодистрибутивные — двойственно к дистрибутивным

a — *стандартный элемент*: $(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee (x \wedge y)$

костандартные — двойственно к стандартным

a — *нейтральный элемент*:

$$(\forall x, y)\ \ a, x, y \text{ порождают дистрибутивную подрешетку}$$

или, эквивалентно,

$$(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

a — нейтральный $\Longrightarrow L$ — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$

«Локальная» дистрибутивность или модулярность «в окрестности элемента»

a — *дистрибутивный элемент*: $(\forall x, y)\ \ a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$

a — дистрибутивный $\Longleftrightarrow \varphi_a \colon x \longmapsto x \vee a$ — гомоморфизм из L в $[a)$

кодистрибутивные — двойственно к дистрибутивным

a — *стандартный элемент*: $(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee (x \wedge y)$

костандартные — двойственно к стандартным

a — *нейтральный элемент*:

$$(\forall x, y)\ \ a, x, y \text{ порождают дистрибутивную подрешетку}$$

или, эквивалентно,

$$(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

a — нейтральный $\Longrightarrow L$ — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$

«Локальная» дистрибутивность или модулярность «в окрестности элемента»

a — *дистрибутивный элемент*: $(\forall x, y)\;\; a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$

a — дистрибутивный $\Longleftrightarrow \varphi_a \colon x \longmapsto x \vee a$ — гомоморфизм из L в $[a)$

кодистрибутивные — двойственно к дистрибутивным

a — *стандартный элемент*: $(\forall x, y)\;\; (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee (x \wedge y)$

костандартные — двойственно к стандартным

a — *нейтральный элемент*:

$$(\forall x, y)\;\; a, x, y \text{ порождают дистрибутивную подрешетку}$$

или, эквивалентно,

$$(\forall x, y)\;\; (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

a — нейтральный $\Longrightarrow L$ — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$

«Локальная» дистрибутивность или модулярность «в окрестности элемента»

a — *дистрибутивный элемент*: $(\forall x, y)\ \ a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$

a — дистрибутивный $\Longleftrightarrow \varphi_a : x \longmapsto x \vee a$ — гомоморфизм из L в $[a)$

кодистрибутивные — двойственно к дистрибутивным

a — *стандартный элемент*: $(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee (x \wedge y)$

костандартные — двойственно к стандартным

a — *нейтральный элемент*:

$$(\forall x, y)\ \ a, x, y \text{ порождают дистрибутивную подрешетку}$$

или, эквивалентно,

$$(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

a — нейтральный $\Longrightarrow L$ — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$

«Локальная» дистрибутивность или модулярность «в окрестности элемента»

a — *дистрибутивный элемент*: $(\forall x, y)\ \ a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$

a — дистрибутивный $\Longleftrightarrow \varphi_a \colon x \longmapsto x \vee a$ — гомоморфизм из L в $[a)$

кодистрибутивные — двойственно к дистрибутивным

a — *стандартный элемент*: $(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee (x \wedge y)$

костандартные — двойственно к стандартным

a — *нейтральный элемент*:

$(\forall x, y)\ \ a, x, y$ порождают дистрибутивную подрешетку

или, эквивалентно,

$$(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

a — нейтральный $\Longrightarrow L$ — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$

«Локальная» дистрибутивность или модулярность «в окрестности элемента»

a — *дистрибутивный элемент*: $(\forall x, y)\ \ a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y)$

a — дистрибутивный $\Longleftrightarrow \varphi_a \colon x \longmapsto x \vee a$ — гомоморфизм из L в $[a)$

кодистрибутивные — двойственно к дистрибутивным

a — *стандартный элемент*: $(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee (x \wedge y)$

костандартные — двойственно к стандартным

a — *нейтральный элемент*:

$$(\forall x, y)\ \ a, x, y \text{ порождают дистрибутивную подрешетку}$$

или, эквивалентно,

$$(\forall x, y)\ \ (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

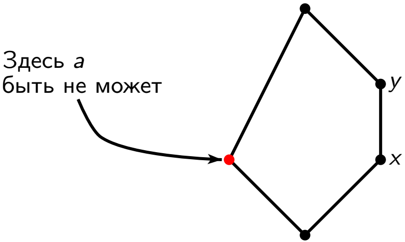
a — нейтральный $\Longrightarrow L$ — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$

a — модулярный элемент:

$$(\forall x, y) \;\; x \leq y \longrightarrow (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee x$$

a — *модулярный элемент*:

$$(\forall x, y)\ \ x \leq y \longrightarrow (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee x$$



a — *модулярный элемент*:

$$(\forall x, y)\ \ x \le y \longrightarrow (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee x$$

a — *верхнемодулярный элемент*:

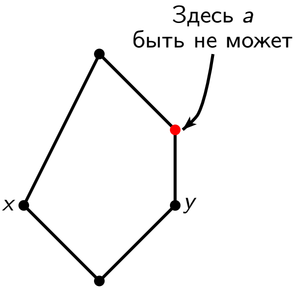
$$(\forall x, y)\ \ y \le a \longrightarrow (x \vee y) \wedge a = (x \wedge a) \vee y$$

a — *модулярный элемент*:

$$(\forall x, y)\ \ x \leq y \longrightarrow (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee x$$

a — *верхнемодулярный элемент*:

$$(\forall x, y)\ \ y \leq a \longrightarrow (x \vee y) \wedge a = (x \wedge a) \vee y$$

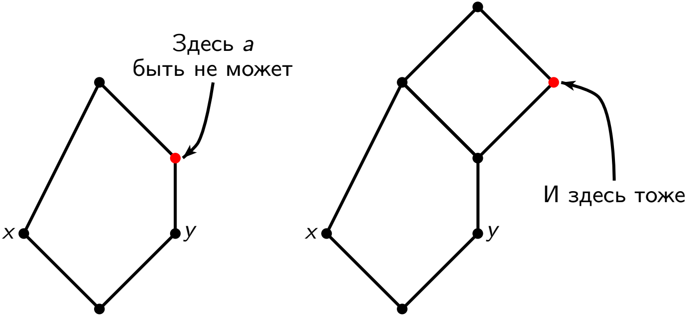


a — модулярный элемент:

$$(\forall x, y)\ \ x \leq y \longrightarrow (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee x$$

a — верхнемодулярный элемент:

$$(\forall x, y)\ \ y \leq a \longrightarrow (x \vee y) \wedge a = (x \wedge a) \vee y$$



a — модулярный элемент:

$$(\forall x, y) \;\; x \leq y \longrightarrow (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee x$$

a — верхнемодулярный элемент:

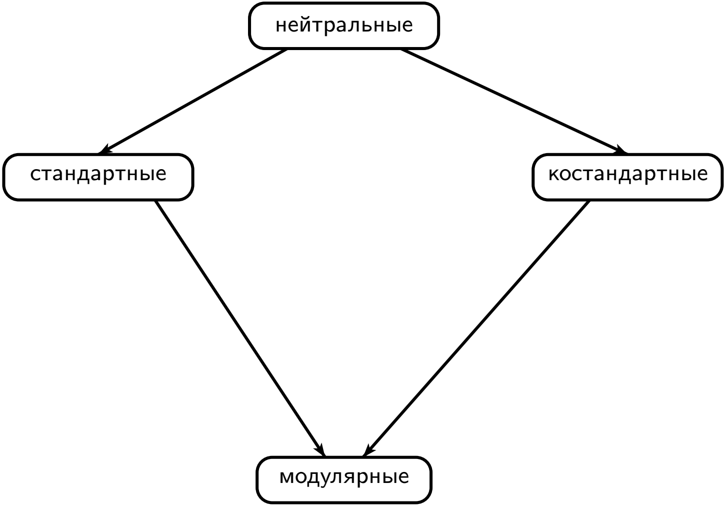
$$(\forall x, y) \;\; y \leq a \longrightarrow (x \vee y) \wedge a = (x \wedge a) \vee y$$

нижнемодулярные — двойственно к верхнемодулярным

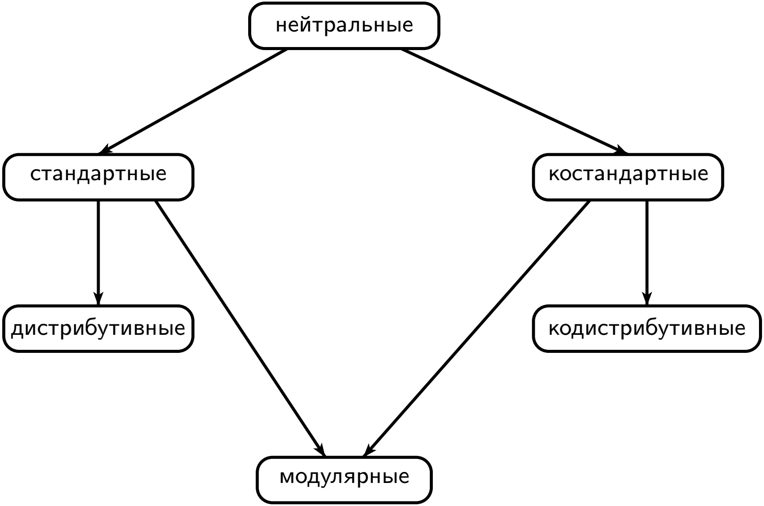
$\boxed{\text{нейтральные}}$

Взаимосвязи между типами элементов в абстрактных решетках

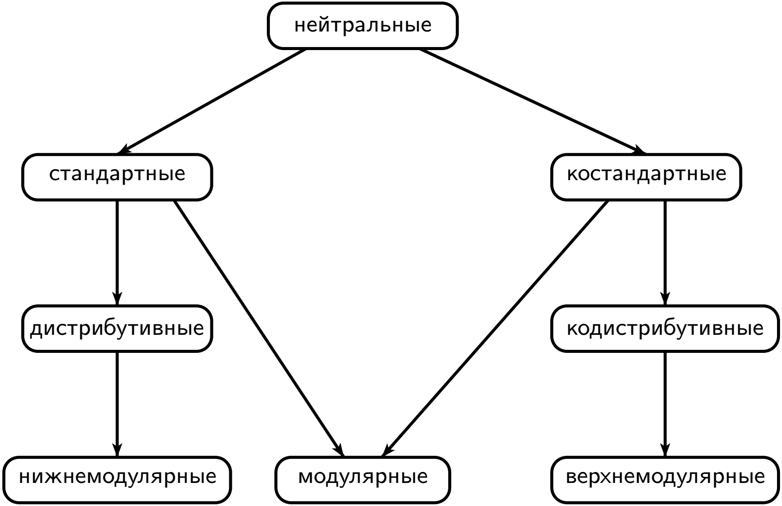
Взаимосвязи между типами элементов в абстрактных решетках



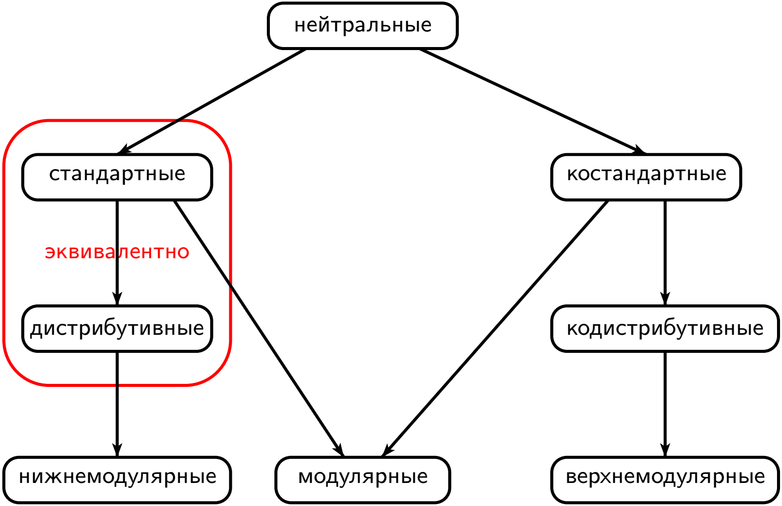
Взаимосвязи между типами элементов в абстрактных решетках



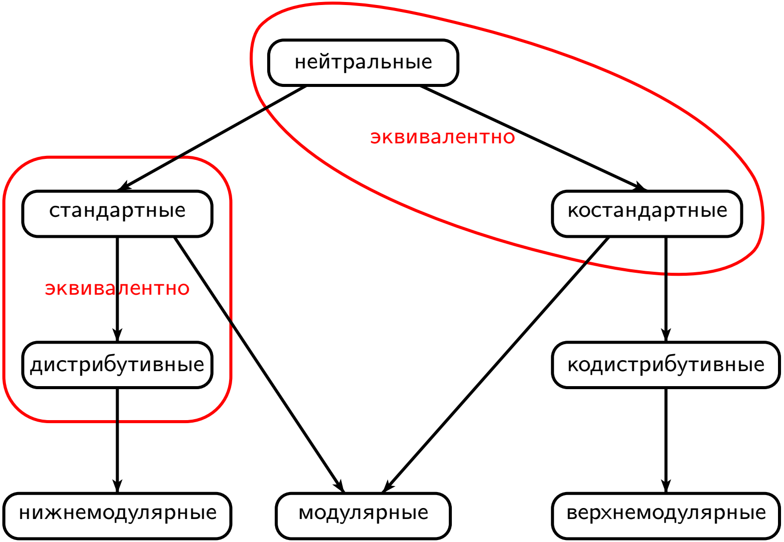
Взаимосвязи между типами элементов в абстрактных решетках



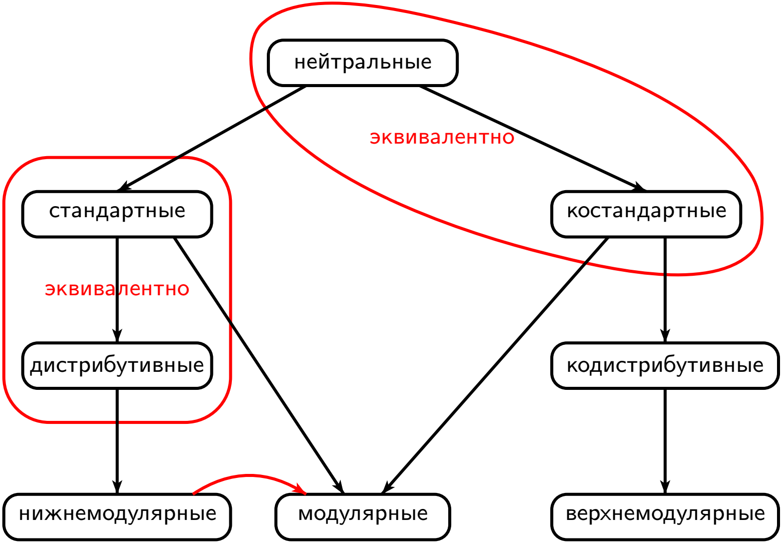
Взаимосвязи между типами элементов в решетке многообразий полугрупп

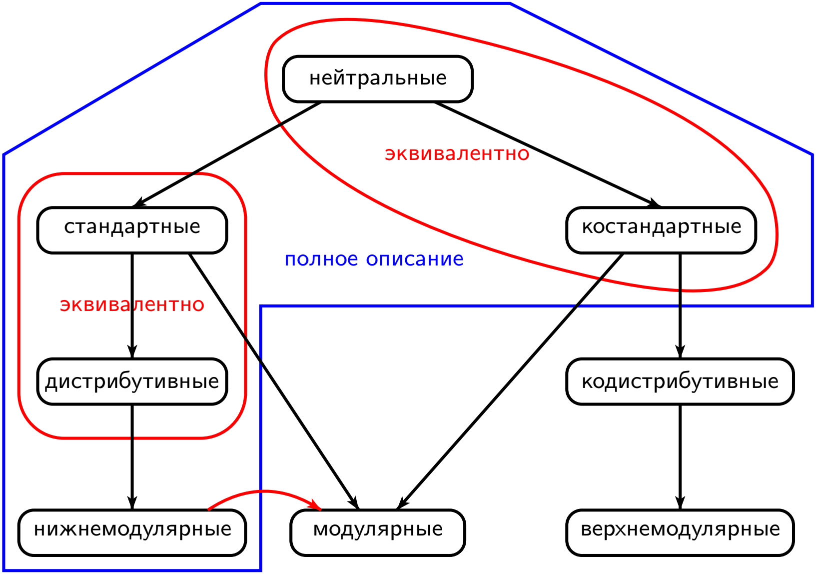


Взаимосвязи между типами элементов в решетке многообразий полугрупп

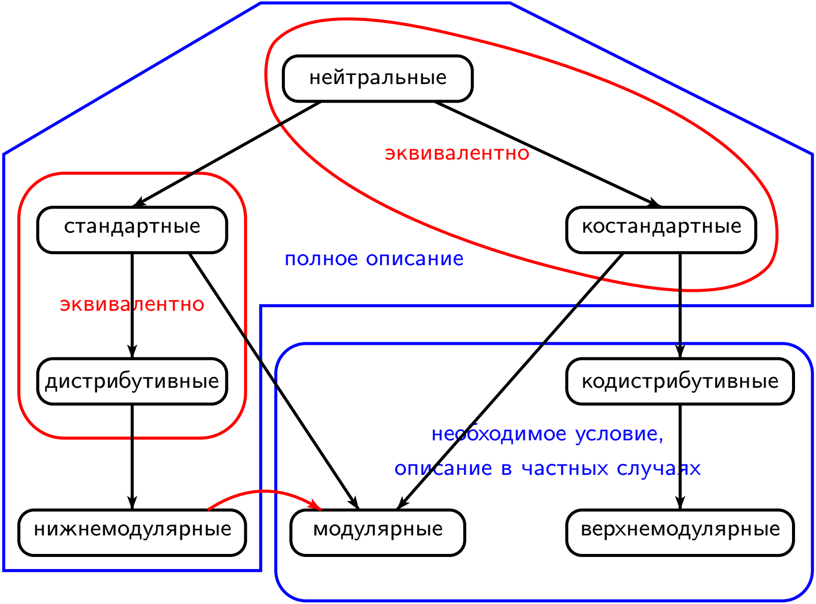


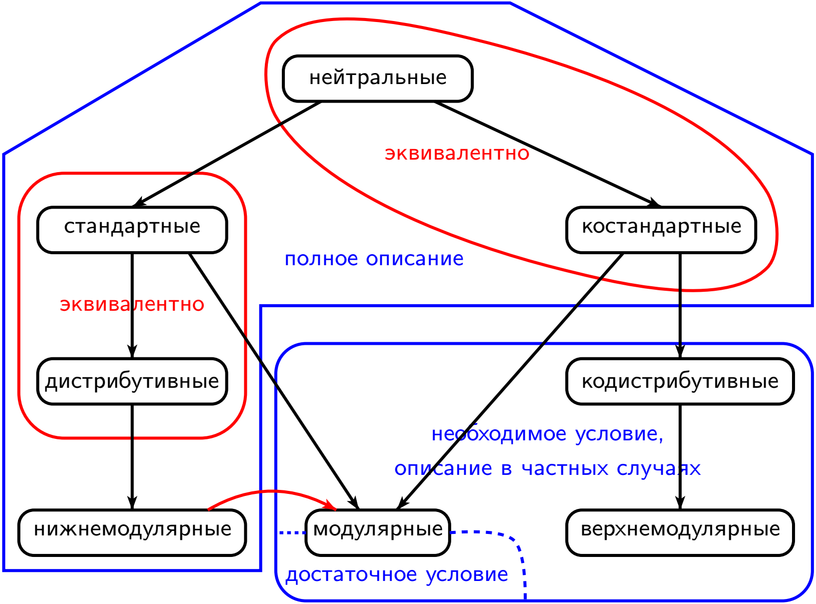
Взаимосвязи между типами элементов в решетке многообразий полугрупп

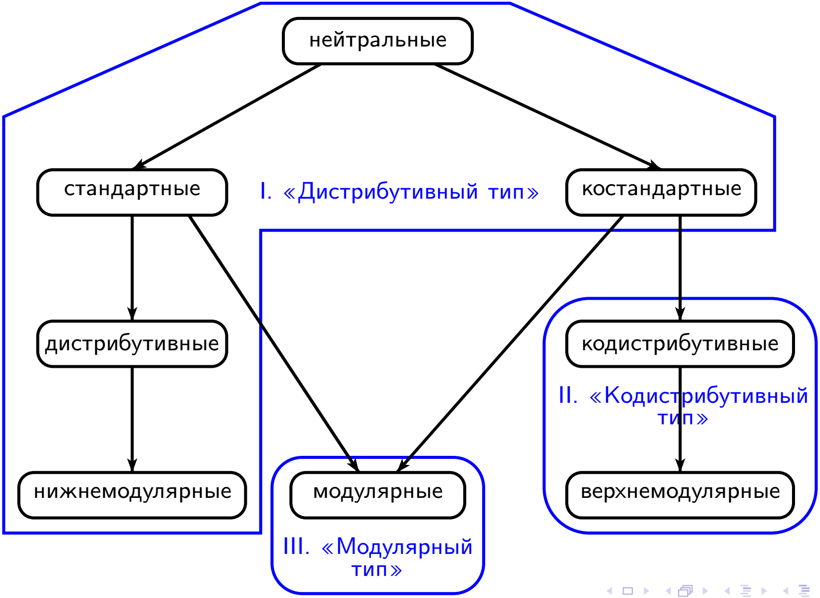



нейтральные
эквивалентно
стандартные
костандартные
полное описание
эквивалентно
дистрибутивные
кодистрибутивные
нижнемодулярные
модулярные
верхнемодулярные

Что известно




нейтральные
эквивалентно
стандартные
костандартные
полное описание
эквивалентно
дистрибутивные
кодистрибутивные
необходимое условие,
описание в частных случаях
нижнемодулярные
модулярные
верхнемодулярные
достаточное условие


нейтральные
стандартные
I. «Дистрибутивный тип»
костандартные
дистрибутивные
кодистрибутивные
II. «Кодистрибутивный тип»
нижнемодулярные
модулярные
верхнемодулярные
III. «Модулярный тип»

$wx = xw = w$, буква x не входит в слово w

S содержит 0 и все значения w в S равны 0

$w = 0$ — 0-*приведенные тождества*

$\mathrm{var}\{w_i = 0 \mid i \in I\}$ — 0-*приведенные многообразия*

$\mathcal{SEM}$ — многообразие всех полугрупп

$\mathcal{SL} = \mathrm{var}\{x = x^2, xy = yx\}$

$wx = xw = w$, буква x не входит в слово w

S содержит 0 и все значения w в S равны 0

$w = 0$ — 0-*приведенные тождества*

$\mathrm{var}\{w_i = 0 \mid i \in I\}$ — 0-*приведенные многообразия*

$\mathcal{SEM}$ — многообразие всех полугрупп

$\mathcal{SL} = \mathrm{var}\{x = x^2, xy = yx\}$

$wx = xw = w$, буква x не входит в слово w

S содержит 0 и все значения w в S равны 0

$w = 0$ — 0-*приведенные тождества*

$\mathrm{var}\{w_i = 0 \mid i \in I\}$ — 0-*приведенные многообразия*

$\mathcal{SEM}$ — многообразие всех полугрупп

$\mathcal{SL} = \mathrm{var}\{x = x^2, xy = yx\}$

$wx = xw = w$, буква x не входит в слово w

S содержит 0 и все значения w в S равны 0

$w = 0$ — 0-*приведенные тождества*

$\mathrm{var}\{w_i = 0 \mid i \in I\}$ — 0-*приведенные многообразия*

$\mathcal{SEM}$ — многообразие всех полугрупп

$\mathcal{SL} = \mathrm{var}\{x = x^2, xy = yx\}$

$wx = xw = w$, буква x не входит в слово w

S содержит 0 и все значения w в S равны 0

$w = 0$ — 0-*приведенные тождества*

$\mathrm{var}\{w_i = 0 \mid i \in I\}$ — 0-*приведенные многообразия*

$\mathcal{SEM}$ — многообразие всех полугрупп

$\mathcal{SL} = \mathrm{var}\{x = x^2, xy = yx\}$

$wx = xw = w$, буква x не входит в слово w

S содержит 0 и все значения w в S равны 0

$w = 0$ — 0-*приведенные тождества*

$\mathrm{var}\{w_i = 0 \mid i \in I\}$ — 0-*приведенные многообразия*

$\mathcal{SEM}$ — многообразие всех полугрупп

$\mathcal{SL} = \mathrm{var}\{x = x^2, xy = yx\}$

Некоторые определения и обозначения

$wx = xw = w$, буква x не входит в слово w

S содержит 0 и все значения w в S равны 0

$w = 0$ — 0-*приведенные тождества*

$\mathrm{var}\{w_i = 0 \mid i \in I\}$ — 0-*приведенные многообразия*

$\mathcal{SEM}$ — многообразие всех полугрупп

$\mathcal{SL} = \mathrm{var}\{x = x^2, xy = yx\}$

Элементы «дистрибутивного типа»: общий вид, нижнемодулярные, дистрибутивные

Нижнемодулярные, дистрибутивные (= стандартные), нейтральные (= костандартные)

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие такое, что ...

Нижнемодулярные элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010; В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) элементы

$\mathcal{V}$ дистрибутивно (стандартно) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = xyx = yx^2 = 0$

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010

Нижнемодулярные, дистрибутивные (= стандартные), нейтральные (= костандартные)

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие такое, что ...

Нижнемодулярные элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010; В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) элементы

$\mathcal{V}$ дистрибутивно (стандартно) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = xyx = yx^2 = 0$

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010

Нижнемодулярные, дистрибутивные (= стандартные), нейтральные (= костандартные)

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие такое, что ...

Нижнемодулярные элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010; В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) элементы

$\mathcal{V}$ дистрибутивно (стандартно) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = xyx = yx^2 = 0$

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010

Нижнемодулярные, дистрибутивные (= стандартные), нейтральные (= костандартные)

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие такое, что ...

Нижнемодулярные элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010; В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) элементы

$\mathcal{V}$ дистрибутивно (стандартно) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = xyx = yx^2 = 0$

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010

Нижнемодулярные, дистрибутивные (= стандартные), нейтральные (= костандартные)

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа $\iff$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие такое, что ...

Нижнемодулярные элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно $\iff$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010; В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) элементы

$\mathcal{V}$ дистрибутивно (стандартно) $\iff$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = xyx = yx^2 = 0$

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010

Элементы «дистрибутивного типа»: общий вид, нижнемодулярные, дистрибутивные

Нижнемодулярные, дистрибутивные (= стандартные),
нейтральные (= костандартные)

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие такое, что ...

Нижнемодулярные элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010; В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) элементы

$\mathcal{V}$ дистрибутивно (стандартно) $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = xyx = yx^2 = 0$

Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2010

Нейтральные (= костандартные) элементы

$\mathcal{V}$ нейтрально (костандартно) $\Longleftrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$ и $\mathcal{N} \models xy = 0$

5 многообразий: $\mathcal{SEM}$, $\mathcal{T}$ (тривиальное многообразие), $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM} = \mathrm{var}\{xy = 0\}$, $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$

Описание нейтральных — М.В.Волков, 2005; эквивалентность нейтральности и костандартности — Б.М.Верников, 2011

Нейтральные (= костандартные) элементы

$\mathcal{V}$ нейтрально (костандартно) $\Longleftrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$ и $\mathcal{N} \models xy = 0$

5 многообразий: $\mathcal{SEM}$, $\mathcal{T}$ (тривиальное многообразие), $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM} = \mathrm{var}\{xy = 0\}$, $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$

Описание нейтральных — М.В.Волков, 2005; эквивалентность нейтральности и костандартности — Б.М.Верников, 2011

Нейтральные (= костандартные) элементы

$\mathcal{V}$ нейтрально (костандартно) $\Longleftrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$ и $\mathcal{N} \models xy = 0$

5 многообразий: $\mathcal{SEM}$, $\mathcal{T}$ (тривиальное многообразие), $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM} = \mathrm{var}\{xy = 0\}$, $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$

Описание нейтральных — М.В.Волков, 2005; эквивалентность нейтральности и костандартности — Б.М.Верников, 2011

Нейтральные (= костандартные) элементы

$\mathcal{V}$ нейтрально (костандартно) $\Longleftrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$ и $\mathcal{N} \models xy = 0$

5 многообразий: $\mathcal{SEM}$, $\mathcal{T}$ (тривиальное многообразие), $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM} = \mathrm{var}\{xy = 0\}$, $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$

Описание нейтральных — М.В.Волков, 2005; эквивалентность нейтральности и костандартности — Б.М.Верников, 2011

Кодистрибутивные, верхнемодулярные

Необходимое условие для кодистрибутивных элементов

$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{SEM}$ либо $\mathcal{V} \models xy = (xy)^{n+1}$ для некоторого n

Кодистрибутивные элементы: описание в коммутативном случае

$\mathcal{V}$ коммутативно
$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longleftrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, где
$\mathcal{A}_n = \mathrm{var}\{x^n y = y, xy = yx\}$

Б.М.Верников, 2011

Верхнемодулярные элементы:

- полное описание для многообразий, содержащих хотя бы одну 3-ступенно нильпотентную полугруппу;
- необходимое условие для многообразий, не содержащих таких полугрупп
- полное описание в коммутативном случае

Б.М.Верников, 2008

Кодистрибутивные, верхнемодулярные

Необходимое условие для кодистрибутивных элементов

$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{SEM}$ либо $\mathcal{V} \models xy = (xy)^{n+1}$ для некоторого n

Кодистрибутивные элементы: описание в коммутативном случае

$\mathcal{V}$ коммутативно
$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longleftrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, где
$\mathcal{A}_n = \mathrm{var}\{x^n y = y, xy = yx\}$

Б.М.Верников, 2011

Верхнемодулярные элементы:

- полное описание для многообразий, содержащих хотя бы одну 3-ступенно нильпотентную полугруппу;
- необходимое условие для многообразий, не содержащих таких полугрупп
- полное описание в коммутативном случае

Б.М.Верников, 2008

Кодистрибутивные, верхнемодулярные

Необходимое условие для кодистрибутивных элементов

$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{SEM}$ либо $\mathcal{V} \models xy = (xy)^{n+1}$ для некоторого n

Кодистрибутивные элементы: описание в коммутативном случае

$\mathcal{V}$ коммутативно
$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longleftrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, где
$\mathcal{A}_n = \mathrm{var}\{x^n y = y, xy = yx\}$

Б.М.Верников, 2011

Верхнемодулярные элементы:

- полное описание для многообразий, содержащих хотя бы одну 3-ступенно нильпотентную полугруппу;
- необходимое условие для многообразий, не содержащих таких полугрупп
- полное описание в коммутативном случае

Б.М.Верников, 2008

Кодистрибутивные, верхнемодулярные

Необходимое условие для кодистрибутивных элементов

$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{SEM}$ либо $\mathcal{V} \models xy = (xy)^{n+1}$ для некоторого n

Кодистрибутивные элементы: описание в коммутативном случае

$\mathcal{V}$ коммутативно
$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longleftrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, где
$\mathcal{A}_n = \mathrm{var}\{x^n y = y, xy = yx\}$

Б.М.Верников, 2011

Верхнемодулярные элементы:

- полное описание для многообразий, содержащих хотя бы одну 3-ступенно нильпотентную полугруппу;
- необходимое условие для многообразий, не содержащих таких полугрупп
- полное описание в коммутативном случае

Б.М.Верников, 2008

Кодистрибутивные, верхнемодулярные

Необходимое условие для кодистрибутивных элементов

$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{SEM}$ либо $\mathcal{V} \models xy = (xy)^{n+1}$ для некоторого n

Кодистрибутивные элементы: описание в коммутативном случае

$\mathcal{V}$ коммутативно
$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longleftrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, где
$\mathcal{A}_n = \mathrm{var}\{x^n y = y, xy = yx\}$

Б.М.Верников, 2011

Верхнемодулярные элементы:

- полное описание для многообразий, содержащих хотя бы одну 3-ступенно нильпотентную полугруппу;
- необходимое условие для многообразий, не содержащих таких полугрупп
- полное описание в коммутативном случае

Б.М.Верников, 2008

Кодистрибутивные, верхнемодулярные

Необходимое условие для кодистрибутивных элементов

$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{SEM}$ либо $\mathcal{V} \models xy = (xy)^{n+1}$ для некоторого n

Кодистрибутивные элементы: описание в коммутативном случае

$\mathcal{V}$ коммутативно
$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longleftrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, где
$\mathcal{A}_n = \mathrm{var}\{x^n y = y, xy = yx\}$

Б.М.Верников, 2011

Верхнемодулярные элементы:

- полное описание для многообразий, содержащих хотя бы одну 3-ступенно нильпотентную полугруппу;
- необходимое условие для многообразий, не содержащих таких полугрупп
- полное описание в коммутативном случае

Б.М.Верников, 2008

Кодистрибутивные, верхнемодулярные

Необходимое условие для кодистрибутивных элементов

$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{SEM}$ либо $\mathcal{V} \models xy = (xy)^{n+1}$ для некоторого n

Кодистрибутивные элементы: описание в коммутативном случае

$\mathcal{V}$ коммутативно
$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longleftrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, где
$\mathcal{A}_n = \mathrm{var}\{x^n y = y, xy = yx\}$

Б.М.Верников, 2011

Верхнемодулярные элементы:

- полное описание для многообразий, содержащих хотя бы одну 3-ступенно нильпотентную полугруппу;
- необходимое условие для многообразий, не содержащих таких полугрупп
- полное описание в коммутативном случае

Б.М.Верников, 2008

Кодистрибутивные, верхнемодулярные

Необходимое условие для кодистрибутивных элементов

$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{SEM}$ либо $\mathcal{V} \models xy = (xy)^{n+1}$ для некоторого n

Кодистрибутивные элементы: описание в коммутативном случае

$\mathcal{V}$ коммутативно
$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longleftrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, где
$\mathcal{A}_n = \mathrm{var}\{x^n y = y, xy = yx\}$

Б.М.Верников, 2011

Верхнемодулярные элементы:

- полное описание для многообразий, содержащих хотя бы одну 3-ступенно нильпотентную полугруппу;
- необходимое условие для многообразий, не содержащих таких полугрупп
- полное описание в коммутативном случае

Б.М.Верников, 2008

Элементы «кодистрибутивного типа»

Кодистрибутивные, верхнемодулярные

Необходимое условие для кодистрибутивных элементов

$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{SEM}$ либо $\mathcal{V} \models xy = (xy)^{n+1}$ для некоторого n

Кодистрибутивные элементы: описание в коммутативном случае

$\mathcal{V}$ коммутативно
$\mathcal{V}$ кодистрибутивно $\Longleftrightarrow \mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}_n \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, где
$\mathcal{A}_n = \mathrm{var}\{x^n y = y, xy = yx\}$

Б.М.Верников, 2011

Верхнемодулярные элементы:

- полное описание для многообразий, содержащих хотя бы одну 3-ступенно нильпотентную полугруппу;
- необходимое условие для многообразий, не содержащих таких полугрупп
- полное описание в коммутативном случае

Б.М.Верников, 2008

1-е необходимое условие (редукция к ниль-случае)

$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильмногообразие

J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993; В.Ю.Шапрынский, 2012

Подстановочное тождество: $u = v$, v получается из u переименованием переменных.

Примеры: $xy = yx$, $xyzt = zxty$, $x^2y = y^2x$, $xyx = yxy$

2-е необходимое условие (в ниль-случае)

$\mathcal{V}$ — нильмногообразие
$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ задается только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами

Б.М.Верников, 2007

Достаточное условие

0-приведенное многообразие модулярно

Б.М.Верников, М.В.Волков, 1988; J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993

1-е необходимое условие (редукция к ниль-случае)

$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильмногообразие

J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993; В.Ю.Шапрынский, 2012

Подстановочное тождество: $u = v$, v получается из u переименованием переменных.

Примеры: $xy = yx$, $xyzt = zxty$, $x^2y = y^2x$, $xyx = yxy$

2-е необходимое условие (в ниль-случае)

$\mathcal{V}$ — нильмногообразие
$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow$ $\mathcal{V}$ задается только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами

Б.М.Верников, 2007

Достаточное условие

0-приведенное многообразие модулярно

Б.М.Верников, М.В.Волков, 1988; J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993

1-е необходимое условие (редукция к ниль-случае)

$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильмногообразие

J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993; В.Ю.Шапрынский, 2012

Подстановочное тождество: $u = v$, v получается из u переименованием переменных.

Примеры: $xy = yx$, $xyzt = zxty$, $x^2y = y^2x$, $xyx = yxy$

2-е необходимое условие (в ниль-случае)

$\mathcal{V}$ — нильмногообразие
$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ задается только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами

Б.М.Верников, 2007

Достаточное условие

0-приведенное многообразие модулярно

Б.М.Верников, М.В.Волков, 1988; J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993

Модулярные элементы (начало)

1-е необходимое условие (редукция к ниль-случае)

$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильмногообразие

J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993; В.Ю.Шапрынский, 2012

Подстановочное тождество: $u = v$, v получается из u переименованием переменных.

Примеры: $xy = yx$, $xyzt = zxty$, $x^2y = y^2x$, $xyx = yxy$

2-е необходимое условие (в ниль-случае)

$\mathcal{V}$ — нильмногообразие
$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ задается только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами

Б.М.Верников, 2007

Достаточное условие

0-приведенное многообразие модулярно

Б.М.Верников, М.В.Волков, 1988; J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993

Модулярные элементы (начало)

1-е необходимое условие (редукция к ниль-случае)

$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильмногообразие

J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993; В.Ю.Шапрынский, 2012

Подстановочное тождество: $u = v$, v получается из u переименованием переменных.

Примеры: $xy = yx$, $xyzt = zxty$, $x^2y = y^2x$, $xyx = yxy$

2-е необходимое условие (в ниль-случае)

$\mathcal{V}$ — нильмногообразие
$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ задается только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами

Б.М.Верников, 2007

Достаточное условие

0-приведенное многообразие модулярно

Б.М.Верников, М.В.Волков, 1988; J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993

1-е необходимое условие (редукция к ниль-случае)

$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильмногообразие

J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993; В.Ю.Шапрынский, 2012

Подстановочное тождество: $u = v$, v получается из u переименованием переменных.

Примеры: $xy = yx$, $xyzt = zxty$, $x^2y = y^2x$, $xyx = yxy$

2-е необходимое условие (в ниль-случае)

$\mathcal{V}$ — нильмногообразие
$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ задается только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами

Б.М.Верников, 2007

Достаточное условие

0-приведенное многообразие модулярно

Б.М.Верников, М.В.Волков, 1988; J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993

1-е необходимое условие (редукция к ниль-случае)

$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильмногообразие

J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993; В.Ю.Шапрынский, 2012

Подстановочное тождество: $u = v$, v получается из u переименованием переменных.

Примеры: $xy = yx$, $xyzt = zxty$, $x^2y = y^2x$, $xyx = yxy$

2-е необходимое условие (в ниль-случае)

$\mathcal{V}$ — нильмногообразие
$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow \mathcal{V}$ задается только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами

Б.М.Верников, 2007

Достаточное условие

0-приведенное многообразие модулярно

Б.М.Верников, М.В.Волков, 1988; J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993

1-е необходимое условие (редукция к ниль-случае)

$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильмногообразие

J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993; В.Ю.Шапрынский, 2012

Подстановочное тождество: $u = v$, v получается из u переименованием переменных.

Примеры: $xy = yx$, $xyzt = zxty$, $x^2y = y^2x$, $xyx = yxy$

2-е необходимое условие (в ниль-случае)

$\mathcal{V}$ — нильмногообразие
$\mathcal{V}$ модулярно $\Longrightarrow$ $\mathcal{V}$ задается только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами

Б.М.Верников, 2007

Достаточное условие

0-приведенное многообразие модулярно

Б.М.Верников, М.В.Волков, 1988; J.Jezek, R.N.McKenzie, 1993

Описание в коммутативном случае

$\mathcal{V}$ — коммутативно
$\mathcal{V}$ модулярно $\iff \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N} \models x^2y = 0$

Б.М.Верников, 2007

Модулярные элементы (окончание)

Описание в коммутативном случае

$\mathcal{V}$ — коммутативно

$\mathcal{V}$ модулярно $\Longleftrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N} \models x^2y = 0$

Б.М.Верников, 2007

Com — решетка коммутативных многообразий

Burris and Nelson, 1971: **Com** содержит антиизоморфную копию решетки разбиений произвольного конечного множества

Perkins, 1969: **Com** счетна

Kisielewicz, 1994: некоторая характеризация **Com**

Com — решетка коммутативных многообразий

Burris and Nelson, 1971: **Com** содержит антиизоморфную копию решетки разбиений произвольного конечного множества

Perkins, 1969: **Com** счетна

Kisielewicz, 1994: некоторая характеризация **Com**

Com — решетка коммутативных многообразий

Burris and Nelson, 1971: **Com** содержит антиизоморфную копию решетки разбиений произвольного конечного множества

Perkins, 1969: **Com** счетна

Kisielewicz, 1994: некоторая характеризация **Com**

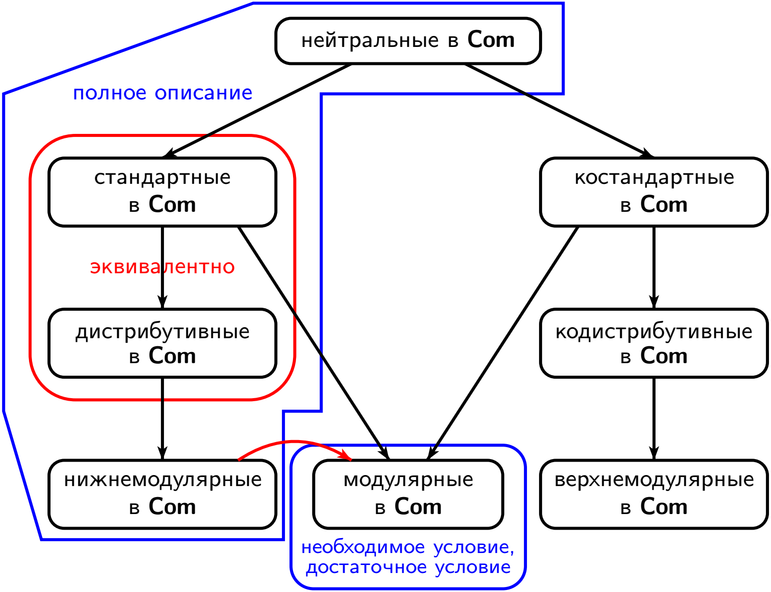
Com — решетка коммутативных многообразий

Burris and Nelson, 1971: **Com** содержит антиизоморфную копию решетки разбиений произвольного конечного множества

Perkins, 1969: **Com** счетна

Kisielewicz, 1994: некоторая характеризация **Com**

Что известно



0-*приведенные в* **Com**: $\mathrm{var}\{u_i = 0, xy = yx \mid i \in I\}$

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие такое, что ...

Нижнемодулярные в Com элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие

В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) в **Com**, нейтральные в **Com** элементы — В.Ю.Шапрынский, 2011

Нейтральные в Com элементы

$\mathcal{V}$ нейтрально в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = 0$

0-*приведенные в* **Com**: $\mathrm{var}\{u_i = 0, xy = yx \mid i \in I\}$

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие такое, что ...

Нижнемодулярные в Com элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие

В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) в **Com**, нейтральные в **Com** элементы — В.Ю.Шапрынский, 2011

Нейтральные в Com элементы

$\mathcal{V}$ нейтрально в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = 0$

0-*приведенные в* **Com**: $\mathrm{var}\{u_i = 0, xy = yx \mid i \in I\}$

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа в **Com** $\iff$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие такое, что . . .

Нижнемодулярные в Com элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно в **Com** $\iff$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие

В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) в **Com**, нейтральные в **Com** элементы — В.Ю.Шапрынский, 2011

Нейтральные в Com элементы

$\mathcal{V}$ нейтрально в **Com** $\iff$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = 0$

0-*приведенные в* **Com**: $\mathrm{var}\{u_i = 0, xy = yx \mid i \in I\}$

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие такое, что ...

Нижнемодулярные в **Com** элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие

В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) в **Com**, нейтральные в **Com** элементы — В.Ю.Шапрынский, 2011

Нейтральные в **Com** элементы

$\mathcal{V}$ нейтрально в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = 0$

0-*приведенные в* **Com**: $\mathrm{var}\{u_i = 0, xy = yx \mid i \in I\}$

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие такое, что ...

Нижнемодулярные в Com элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие

В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) в **Com**, нейтральные в **Com** элементы — В.Ю.Шапрынский, 2011

Нейтральные в Com элементы

$\mathcal{V}$ нейтрально в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = 0$

0-*приведенные в* **Com**: $\mathrm{var}\{u_i = 0, xy = yx \mid i \in I\}$

«Общий вид» результатов:

$\mathcal{V}$ — такого-то типа в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие такое, что ...

Нижнемодулярные в **Com** элементы

$\mathcal{V}$ нижнемодулярно в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие

В.Ю.Шапрынский, 2012

Дистрибутивные (= стандартные) в **Com**, нейтральные в **Com** элементы — В.Ю.Шапрынский, 2011

Нейтральные в **Com** элементы

$\mathcal{V}$ нейтрально в **Com** $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — 0-приведенное в **Com** многообразие и $\mathcal{N} \models x^2y = 0$

Модулярные в **Com** элементы

1-е необходимое условие (редукция к ниль-случае)

$\mathcal{V}$ модулярно в **Com** $\Longrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — коммутативное нильмногообразие

2-е необходимое условие (в ниль-случае)

$\mathcal{V}$ — коммутативное нильмногообразие
$\mathcal{V}$ модулярно в **Com** $\Longrightarrow \mathcal{V}$ задается внутри **Com** только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами

Достаточное условие

0-приведенное в **Com** многообразие модулярно в **Com**

В.Ю.Шапрынский, 2012

1-е необходимое условие (редукция к ниль-случае)

$\mathcal{V}$ модулярно в **Com** $\Longrightarrow \mathcal{V}$ — либо $\mathcal{COM}$, либо $\mathcal{N}$, либо $\mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — коммутативное нильмногообразие

2-е необходимое условие (в ниль-случае)

$\mathcal{V}$ — коммутативное нильмногообразие
$\mathcal{V}$ модулярно в **Com** $\Longrightarrow \mathcal{V}$ задается внутри **Com** только 0-приведенными и/или подстановочными тождествами

Достаточное условие

0-приведенное в **Com** многообразие модулярно в **Com**

В.Ю.Шапрынский, 2012

$$I: \quad s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = t(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

a — *I-элемент*: $(\forall x_1, \ldots, x_n)\ s(a, x_1, \ldots, x_n) = t(a, x_1, \ldots, x_n)$

id-*элемент* — I-элемент для некоторого нетривиального I

$L(\mathcal{V}) \models \varepsilon \Longrightarrow \mathcal{V}$ — id-многообразие

$L(\mathcal{V}) \models p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathcal{V}$ — I-многообразие, где
$I: p(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n) = q(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n)$

Периодичность id-многообразий

$\mathcal{V} \neq \mathcal{SEM}$
$\mathcal{V}$ — id-многообразие $\Longrightarrow \mathcal{V}$ периодично

Обратное неверно.

В.Ю.Шапрынский, 2012

$I: \quad s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = t(x_0, x_1, \ldots, x_n)$

a — *I-элемент*: $(\forall x_1, \ldots, x_n) \; s(a, x_1, \ldots, x_n) = t(a, x_1, \ldots, x_n)$

id-*элемент* — I-элемент для некоторого нетривиального I

$L(\mathcal{V}) \models \varepsilon \Longrightarrow \mathcal{V}$ — id-многообразие

$L(\mathcal{V}) \models p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathcal{V}$ — I-многообразие, где
I: $p(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n) = q(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n)$

Периодичность id-многообразий

$\mathcal{V} \neq \mathcal{SEM}$
$\mathcal{V}$ — id-многообразие $\Longrightarrow \mathcal{V}$ периодично

Обратное неверно.

В.Ю.Шапрынский, 2012

$I: \quad s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = t(x_0, x_1, \ldots, x_n)$

a — *I-элемент*: $(\forall x_1, \ldots, x_n) \; s(a, x_1, \ldots, x_n) = t(a, x_1, \ldots, x_n)$

id-*элемент* — I-элемент для некоторого нетривиального I

$L(\mathcal{V}) \models \varepsilon \Longrightarrow \mathcal{V}$ — id-многообразие

$L(\mathcal{V}) \models p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathcal{V}$ — I-многообразие, где
$I: p(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n) = q(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n)$

Периодичность id-многообразий

$\mathcal{V} \neq \mathcal{SEM}$
$\mathcal{V}$ — id-многообразие $\Longrightarrow \mathcal{V}$ периодично

Обратное неверно.

В.Ю.Шапрынский, 2012

$I: \quad s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = t(x_0, x_1, \ldots, x_n)$

a — I-*элемент*: $(\forall x_1, \ldots, x_n) \; s(a, x_1, \ldots, x_n) = t(a, x_1, \ldots, x_n)$

id-*элемент* — I-элемент для некоторого нетривиального I

$L(\mathcal{V}) \models \varepsilon \Longrightarrow \mathcal{V}$ — id-многообразие

$L(\mathcal{V}) \models p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathcal{V}$ — I-многообразие, где
$I: \; p(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n) = q(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n)$

Периодичность id-многообразий

$\mathcal{V} \neq \mathcal{SEM}$
$\mathcal{V}$ — id-многообразие $\Longrightarrow \mathcal{V}$ периодично

Обратное неверно.

В.Ю.Шапрынский, 2012

$I: \quad s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = t(x_0, x_1, \ldots, x_n)$

a — *I-элемент*: $(\forall x_1, \ldots, x_n)\ s(a, x_1, \ldots, x_n) = t(a, x_1, \ldots, x_n)$

id-*элемент* — I-элемент для некоторого нетривиального I

$L(\mathcal{V}) \models \varepsilon \Longrightarrow \mathcal{V}$ — id-многообразие

$L(\mathcal{V}) \models p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathcal{V}$ — I-многообразие, где
$I\colon\ p(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n) = q(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n)$

Периодичность id-многообразий

$\mathcal{V} \neq \mathcal{SEM}$
$\mathcal{V}$ — id-многообразие $\Longrightarrow \mathcal{V}$ периодично

Обратное неверно.

В.Ю.Шапрынский, 2012

$I: \quad s(x_0, x_1, \dots, x_n) = t(x_0, x_1, \dots, x_n)$

a — *I-элемент*: $(\forall x_1, \dots, x_n)\ s(a, x_1, \dots, x_n) = t(a, x_1, \dots, x_n)$

id-*элемент* — I-элемент для некоторого нетривиального I

$L(\mathcal{V}) \models \varepsilon \Longrightarrow \mathcal{V}$ — id-многообразие

$L(\mathcal{V}) \models p(x_1, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_n) \Longrightarrow \mathcal{V}$ — I-многообразие, где
$I\colon\ p(x_0 \wedge x_1, \dots, x_0 \wedge x_n) = q(x_0 \wedge x_1, \dots, x_0 \wedge x_n)$

Периодичность id-многообразий

$\mathcal{V} \neq \mathcal{SEM}$
$\mathcal{V}$ — id-многообразие $\Longrightarrow \mathcal{V}$ периодично

Обратное неверно.

В.Ю.Шапрынский, 2012

$$I: \quad s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = t(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

a — *I-элемент*: $(\forall x_1, \ldots, x_n)\ s(a, x_1, \ldots, x_n) = t(a, x_1, \ldots, x_n)$

id-*элемент* — I-элемент для некоторого нетривиального I

$L(\mathcal{V}) \models \varepsilon \Longrightarrow \mathcal{V}$ — id-многообразие

$L(\mathcal{V}) \models p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathcal{V}$ — I-многообразие, где
$I\colon\ p(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n) = q(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n)$

Периодичность id-многообразий

$\mathcal{V} \neq \mathcal{SEM}$
$\mathcal{V}$ — id-многообразие $\Longrightarrow \mathcal{V}$ периодично

Обратное неверно.

В.Ю.Шапрынский, 2012

$I: \quad s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = t(x_0, x_1, \ldots, x_n)$

a — *I-элемент*: $(\forall x_1, \ldots, x_n)\ s(a, x_1, \ldots, x_n) = t(a, x_1, \ldots, x_n)$

id-*элемент* — I-элемент для некоторого нетривиального I

$L(\mathcal{V}) \models \varepsilon \Longrightarrow \mathcal{V}$ — id-многообразие

$L(\mathcal{V}) \models p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow \mathcal{V}$ — I-многообразие, где
$I\colon\ p(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n) = q(x_0 \wedge x_1, \ldots, x_0 \wedge x_n)$

Периодичность id-многообразий

$\mathcal{V} \neq \mathcal{SEM}$
$\mathcal{V}$ — id-многообразие $\Longrightarrow \mathcal{V}$ периодично

Обратное неверно.

В.Ю.Шапрынский, 2012


Надкоммутативные многообразия
$\mathcal{COM} = \mathrm{var}\{xy = yx\}$
Периодические многообразия

Решетка надкоммутативных многообразий — **ОС**


нейтральные в **ОС**
эквивалентно
стандартные
в **ОС**
костандартные
в **ОС**
полное описание
Б.М.Верников, В.Ю.Шапрынский, 2011
дистрибутивные
в **ОС**
кодистрибутивные
в **ОС**
нижнемодулярные
в **ОС**
модулярные
в **ОС**
верхнемодулярные
в **ОС**

Спасибо за внимание!