

ИМКН

Домашние задания по математической логике

Тема: «Высказывания и операции с ними»

I. Является ли формула F тождественно истинной (общезначимой)?

$$F = (X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X).$$

II. Существует ли формула F такая, что G является тождественно истинной?

$$G = (F \vee Y \rightarrow \neg X) \rightarrow F \& X.$$

III. Равносильны ли формулы F и G ?

$$1. F = \neg X; G = \neg(Z \rightarrow X) \vee \neg(Z \rightarrow Y).$$

$$2. F = [(X \rightarrow Y) \& Z] \rightarrow \neg(X \& Y); G = \neg Y \vee \neg Z$$

$$3. F = [(X \leftrightarrow Y) \& Z] \& \neg(X \rightarrow \neg Z); G = Y \& Z.$$

IV. Является ли формула G логическим следствием формул F_1, \dots, F_k ?

$$1. G = X \& \neg Y; F_1 = Y \rightarrow \neg Z; F_2 = (X \vee Y) \& Z.$$

$$2. G = \neg X \rightarrow Y; F_1 = X \leftrightarrow Y; F_2 = (X \vee Y) \& Z.$$

$$3. G = (X \& Y) \vee \neg X; F_1 = X \rightarrow Y; F_2 = (X \vee Y) \rightarrow Z.$$

$$4. G = X \vee Y; F_1 = X \vee \neg Z; F_2 = \neg X \rightarrow Y; F_3 = Y \rightarrow \neg Z.$$

V. Записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний. Будет ли логичным рассуждение?

1. *В бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся.*

2. *Если губернатор не имеет соответствующего авторитета или если он не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест, и власти не начнут примирительные действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.*

Тема: «Нормальные формы логики высказываний»

VI. Привести к ДНФ.

$$1. F = X \& [Y \rightarrow \neg(Y \rightarrow Z)]$$

$$2. F = [(X \rightarrow Z) \rightarrow Y] \& (X \& Y \rightarrow X)$$

VII. Привести к СДНФ.

$$1. F = (X \vee Z) \& \neg[(X \& Y) \vee Z]$$

$$2. F = (X \rightarrow Z) \& [\neg(X \& Y) \leftrightarrow Z]$$

VIII. Привести к КНФ.

$$1. F = \neg(X \& Y \rightarrow \neg Z) \vee (X \& \neg Y)$$

$$2. F = \neg[((X \& Y) \vee Z) \vee ((X \vee Z) \& \neg Y)]$$

Темы: «Метод резолюций» и «Контактные схемы»

IX. Доказать, что формула G является логическим следствием формул F_1, \dots, F_k , используя метод резолюций:

1. $G = X \& \neg Y$; $F_1 = Y \rightarrow \neg Z$; $F_2 = (X \vee Y) \& Z$.
2. $G = \neg X \rightarrow Y$; $F_1 = X \leftrightarrow Y$; $F_2 = (X \vee Y) \& Z$.
3. $G = (X \& Y) \vee \neg X$; $F_1 = X \rightarrow Y$; $F_2 = (X \vee Y) \rightarrow Z$.
4. $G = X \vee Y$; $F_1 = X \vee \neg Z$; $F_2 = \neg X \rightarrow Y$; $F_3 = Y \rightarrow \neg Z$.

X.

1. Построить наименьшую контактную схему, открывающую дверь при нажатии любых трех кнопок из четырех имеющихся. Записать соответствующую формулу логики высказываний.
2. Построить наименьшую контактную схему, открывающую дверь при нажатии кнопок директора и хотя бы одного из заместителей или всех кнопок заместителей директора (всего у директора три заместителя). Записать соответствующую формулу логики высказываний.

Тема: «Предикаты»

XI. Пусть M – множество точек и прямых линий на плоскости. На M заданы следующие предикаты: $S(x, y)$ – “ x принадлежит y ”, $P(x)$ – “ x есть точка”, $L(x)$ – “ x есть прямая”, $Q(x, y)$ – “ x равен y ”. Записать следующие предикаты формулами заданной сигнатуры.

1. “Прямые x и y имеют общую точку”.
2. “Прямые x и y параллельны”.
3. “Прямые x , y и z образуют треугольник”.

XII. Выбрать подходящую сигнатуру и записать следующие рассуждения в виде последовательности формул логики предикатов.

Членом правления клуба может быть каждый совершеннолетний член клуба. Игорь и Андрей – члены клуба. Игорь – совершеннолетний, а Андрей старше Игоря. Следовательно, Андрей может быть членом правления клуба.

Тема: «Равносильность формул логики предикатов»

XIII. Доказать неравносильность формул

1. $(\exists x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$ и $(\exists x)F(x) \leftrightarrow (\exists x)G(x)$.
2. $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$ и $(\forall x)F(x) \leftrightarrow (\forall x)G(x)$.

XIV. Доказать равносильность формул

$$(\exists x)(F(x) \rightarrow G(x)) \text{ и } (\forall x)F(x) \rightarrow (\exists x)G(x).$$

Тема: «Нормальные формы логики предикатов»

XV. Привести формулу к ПНФ и СНФ.

$$\neg((\forall x)(\forall y)A(x, y) \& (\forall x)(\exists y)B(x, y)) \& ((\exists x)(\forall y)C(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)A(x, y)).$$

Тема: «Логическое следствие логики предикатов»

XVI. Доказать нелогичность рассуждений.

Некоторые студенты нашей группы – болельщики «Спартака». А некоторые болельщики «Спартака» занимаются спортом. Следовательно, некоторые студенты нашей группы занимаются спортом.

Тема: «Метод резолюций логики предикатов»

XVII. Доказать логичность рассуждений.

Все студенты нашей группы – болельщики «Спартака», а некоторые занимаются спортом. Следовательно, некоторые из болельщиков «Спартака» занимаются спортом.

Тема: «Выполнимость в логике предикатов»

XVIII. Выполнимы ли формулы:

а) $(\exists x)(\forall y)(R(x, y) \& \neg R(y, x))$;

б) $(\forall x)(\exists y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$;

в) $(\forall x)(P(x) \leftrightarrow (\forall y)P(y))$?

XIX. Доказать тождественную истинность формулы

$$(\neg(\exists x)A(x) \rightarrow \neg(\forall x)A(x)).$$

XX. Доказать, что следующая формула истинна во всякой конечной модели, но не тождественно истинна:

$$((\forall x)(\forall y)(\forall z)(F(x, x) \& (F(x, z) \rightarrow (F(x, y) \vee F(y, z)))) \rightarrow (\exists u)(\forall v)F(u, v)).$$