

Приложение двойного интеграла

- Площадь плоской фигуры:

$$S = \iint_D dx dy$$

- Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$ и построенного на основании D :

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Приложение двойного интеграла

- Масса неоднородной пластины D с поверхностной плотностью $z = f(x, y)$:

$$m = \iint_D f(x, y) dx dy$$

- Координаты центра тяжести пластины D :

$$x_0 = \frac{\iint_D x f(x, y) dx dy}{m},$$

$$y_0 = \frac{\iint_D y f(x, y) dx dy}{m}$$

Замена переменных в двойном интеграле

Теорема 1. Пусть

- функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D ;
- непрерывно дифференцируемые функции

$$x = x(u, v), y = y(u, v)$$

отображают область D' на область D ;

- **якобиан**

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

для любой точки $N(u, v) \in D'$.

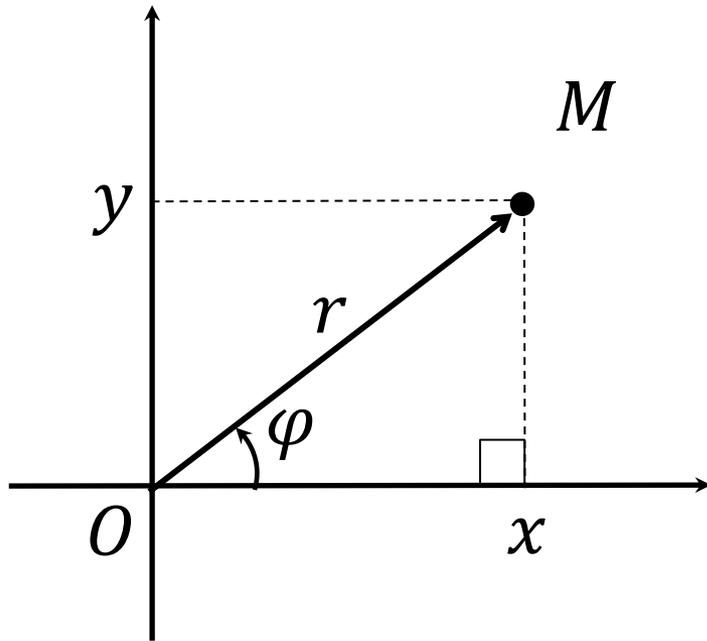
Замена переменных в двойном интеграле

Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \\ &= \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| du dv \end{aligned}$$

Без док-ва.

Полярные координаты



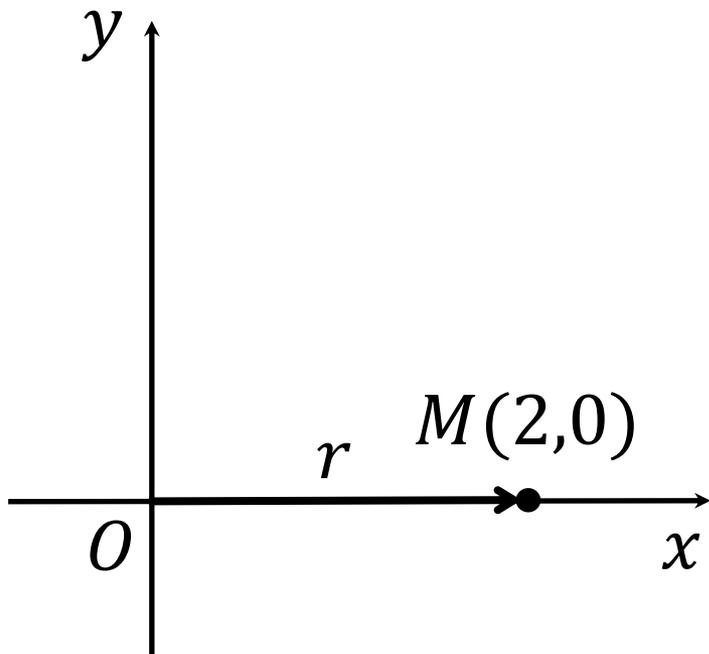
$r = |OM|$ –
полярный радиус

φ – наименьший угол от
оси Ox до вектора \overrightarrow{OM} –
полярный угол

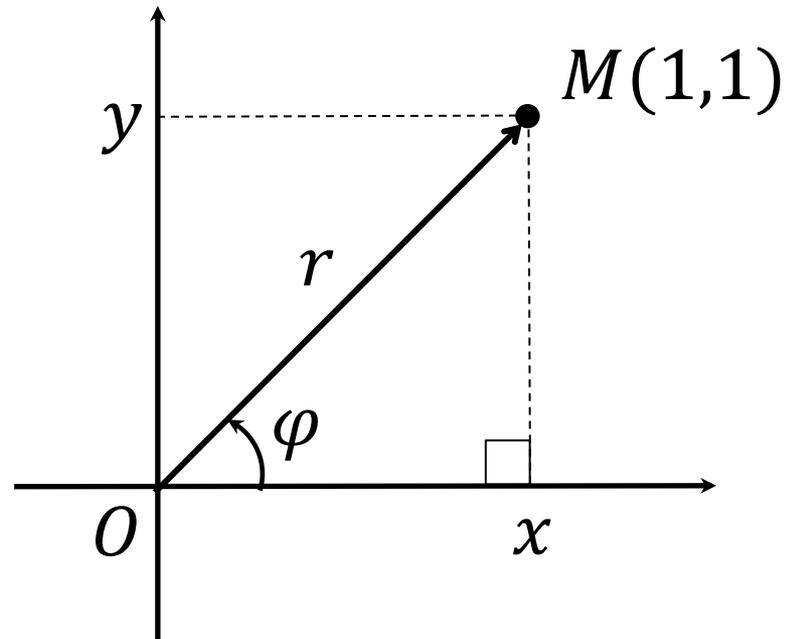
(x, y) – декартовы координаты точки M

(r, φ) – полярные координаты точки M

Полярные координаты. Примеры

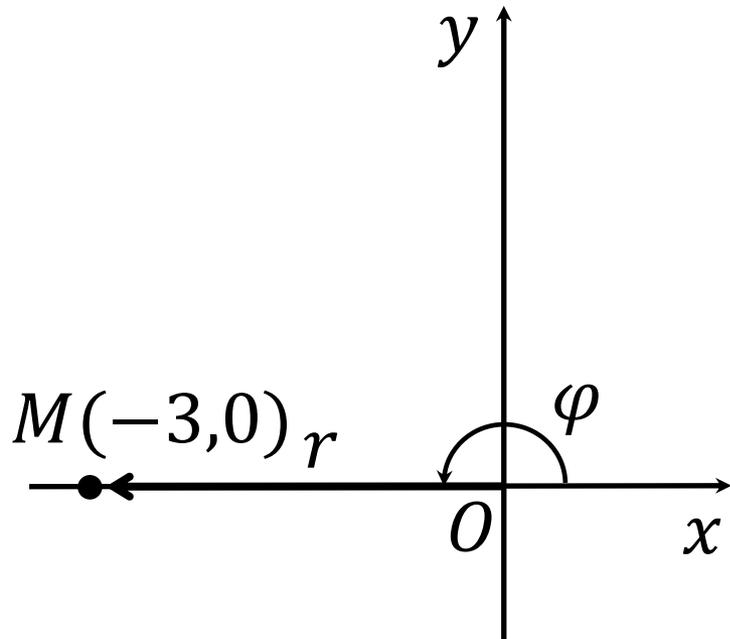


$$r = 2 \quad \varphi = 0$$

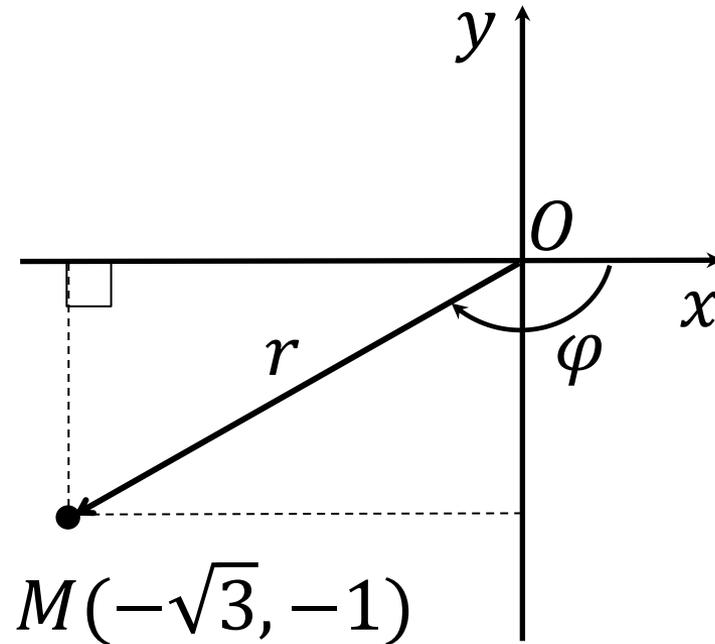


$$r = \sqrt{2} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Полярные координаты. Примеры



$$r = 3 \quad \varphi = \pi$$



$$r = ? \quad \varphi = ?$$

Двойной интеграл в полярных координатах

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{- выражение декартовых координат через полярные}$$

$$\begin{aligned} \text{Якобиан } J(r, \varphi) &= \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r \end{aligned}$$

Применим теорему 1:

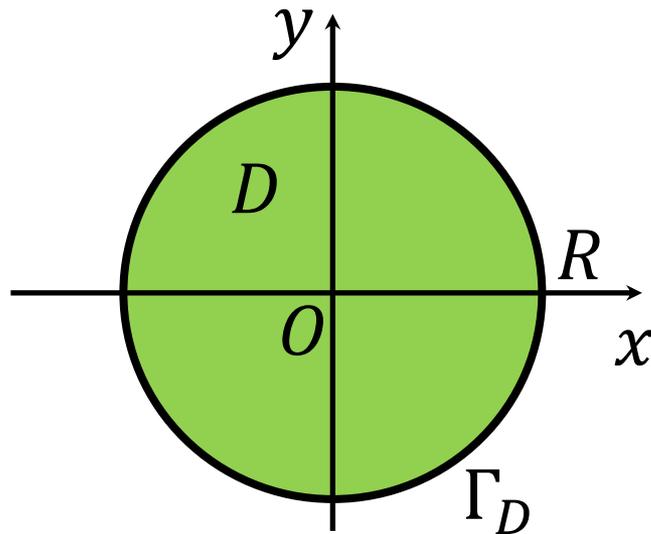
Двойной интеграл в полярных координатах

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi$$

формула перехода от декартовых координат к полярным в двойном интеграле

Двойной интеграл в полярных координатах. Пример 1

Пример 1. Найти площадь *круга* D радиуса R .



$$D: x^2 + y^2 \leq R^2 - \text{круг}$$

\Downarrow

$$\Gamma_D: x^2 + y^2 = R^2 - \text{окружность}$$

Пример 1

Решение. Перейдем к полярным координатам:

в уравнении окружности Γ_D :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

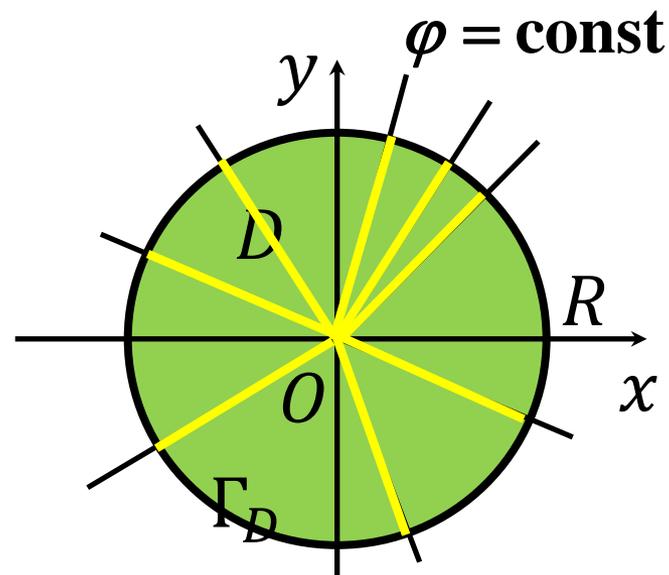
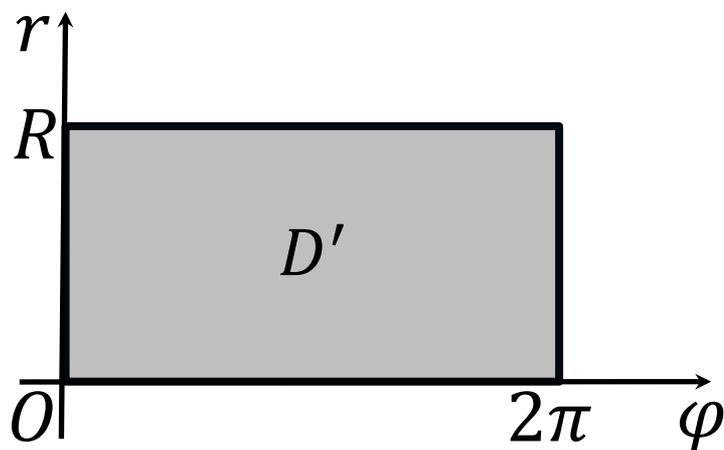
$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = R^2$$

$$r^2 = R^2$$

$r = R$ – уравнение окружности Γ_D в полярных координатах ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

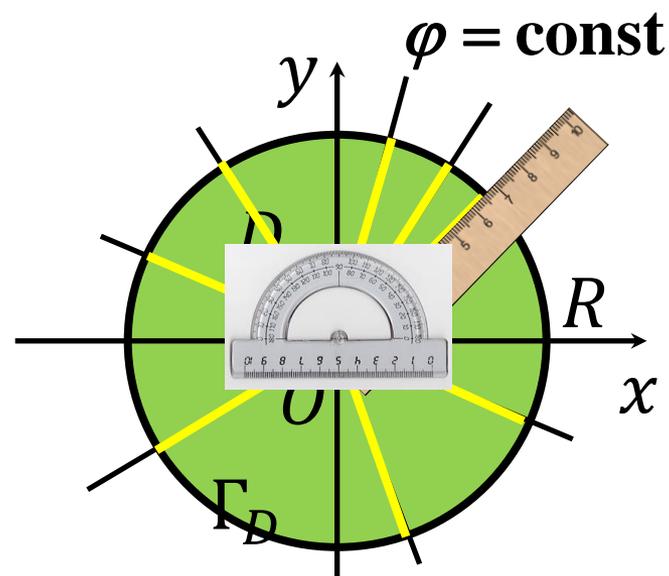
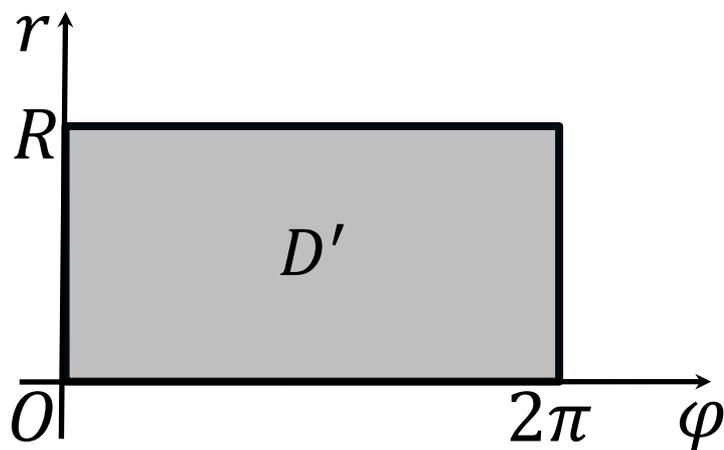
Пример 1

$$D' : \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{— уравнение круга } D \text{ в полярных координатах}$$



Пример 1

$$D' : \begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{— уравнение круга } D \text{ в полярных координатах}$$



Пример 1

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \iint_{D'} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^R = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^2}{2} = \\ &= \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi R^2 \end{aligned}$$

Полярная замена в двойном интеграле

Замечание. Интегрирование в полярной системе координат удобно использовать, когда область D ограничена дугами окружностей.

Тогда границы D' имеют более простую форму по сравнению с границами области D .

Замена переменных в двойном интеграле

Теорема 2. Пусть

- функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D ;
- область D' в полярной системе координат задана неравенствами

$$\alpha \leq \varphi \leq \beta, \quad r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$$

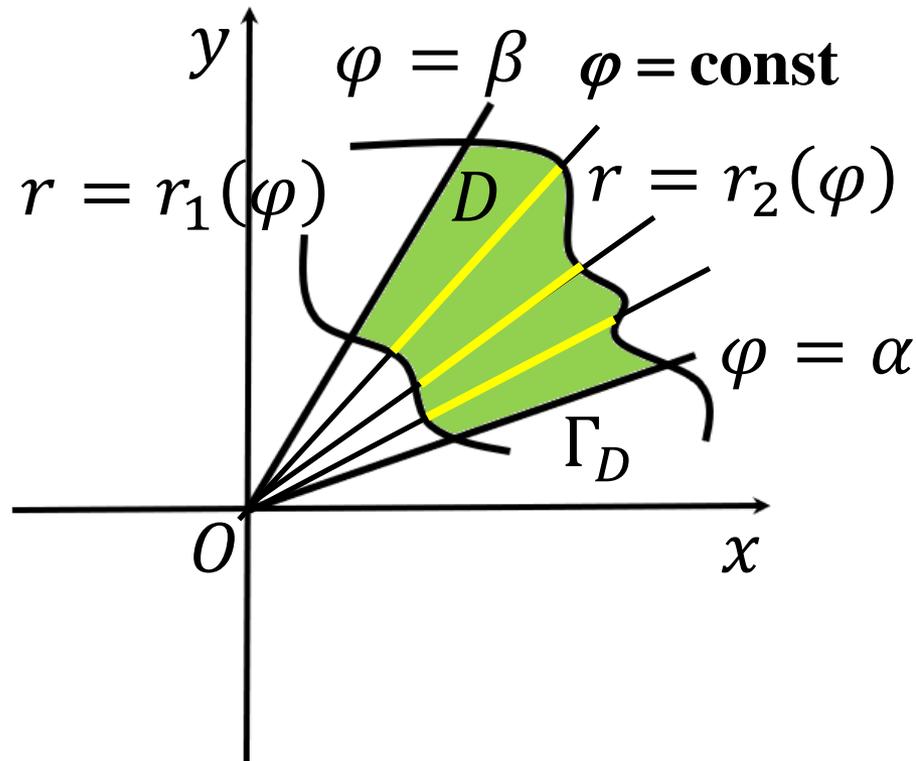
для непрерывно дифференцируемых функций $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$.

Замена переменных в двойном интеграле

Тогда

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(x \cos \varphi, y \sin \varphi) r dr d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(x \cos \varphi, y \sin \varphi) r dr \end{aligned}$$

Замена переменных в двойном интеграле (иллюстрация)

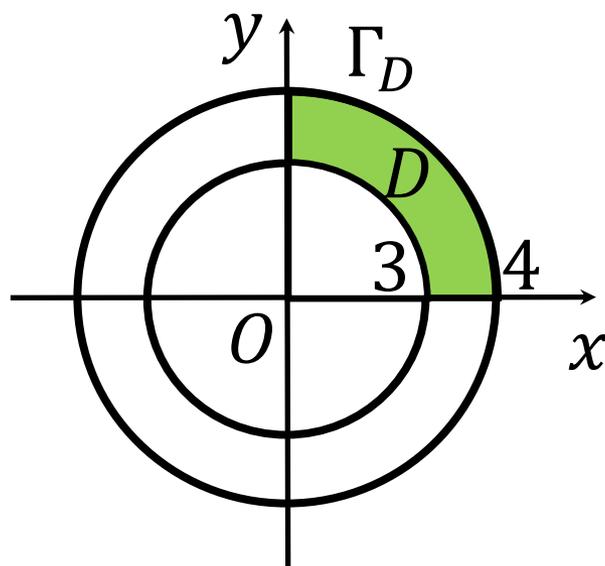


$$D': \alpha \leq \varphi \leq \beta$$
$$r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$$

$$\Gamma_{D'}: \varphi = \alpha, \varphi = \beta$$
$$r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi)$$

Пример 2

Пример 2. Записать в полярных координатах двойной интеграл по области D , где



$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 9 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

⇓

$$x^2 + y^2 = 9$$

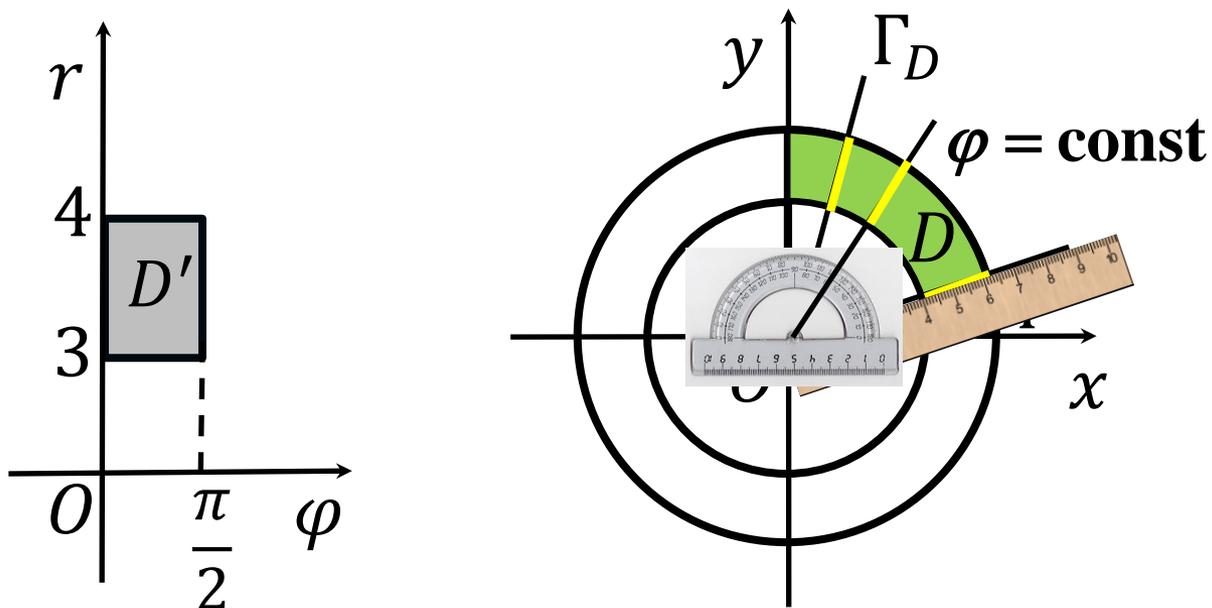
$$\Gamma_D: x^2 + y^2 = 16$$

$$x = 0, y = 0$$

Пример 2

$$D' : \begin{cases} 3 \leq r \leq 4 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

– уравнение сектора кольца D в полярных координатах



Пример 2

По теореме 1

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} f(x \cos \varphi, y \sin \varphi) r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_3^4 f(x \cos \varphi, y \sin \varphi) r dr\end{aligned}$$