Вычисление двойного интеграла. Область – прямоугольник

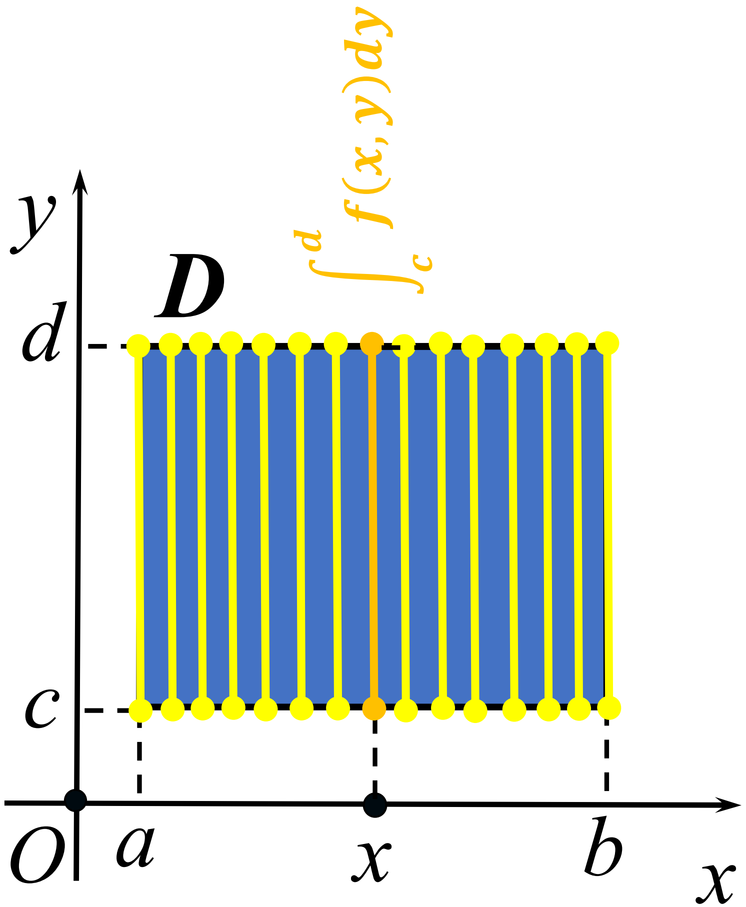
Теорема 2. Пусть область D является **прямоугольником:** $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d.$

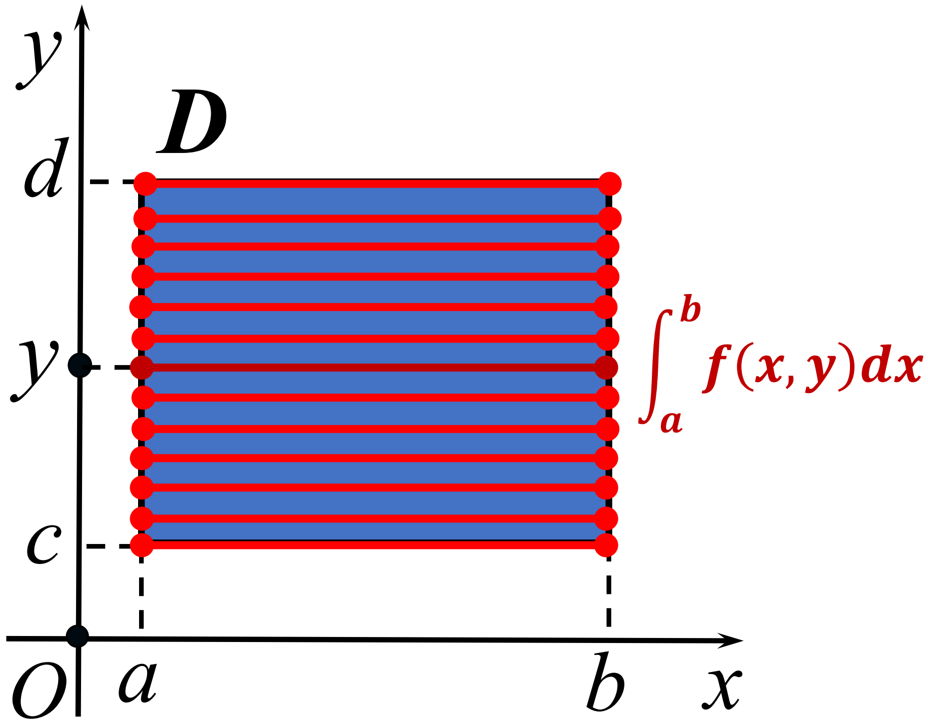
Тогда

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy}$$

повторные интегралы

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx}$$





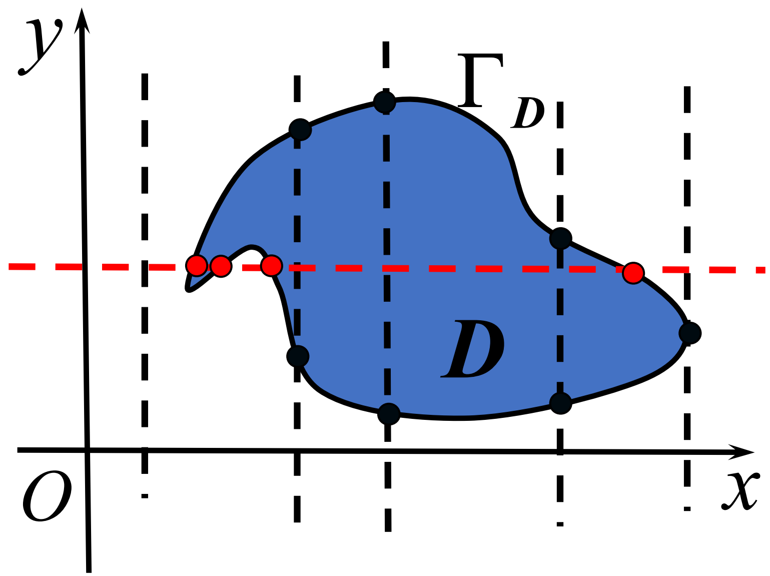
$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$$

Определение правильной области

Опр. Область D в плоскости Oxy называется правильной в направлении оси Oy (или Ox), если любая прямая, параллельная соответствующей оси, пересекает границы Γ_D области D не более, чем в 2-х точках.

Определение правильной области



<u>Пример 1</u>. Область D – правильная в напр. оси Oy, но неправильная в напр. оси Ox.

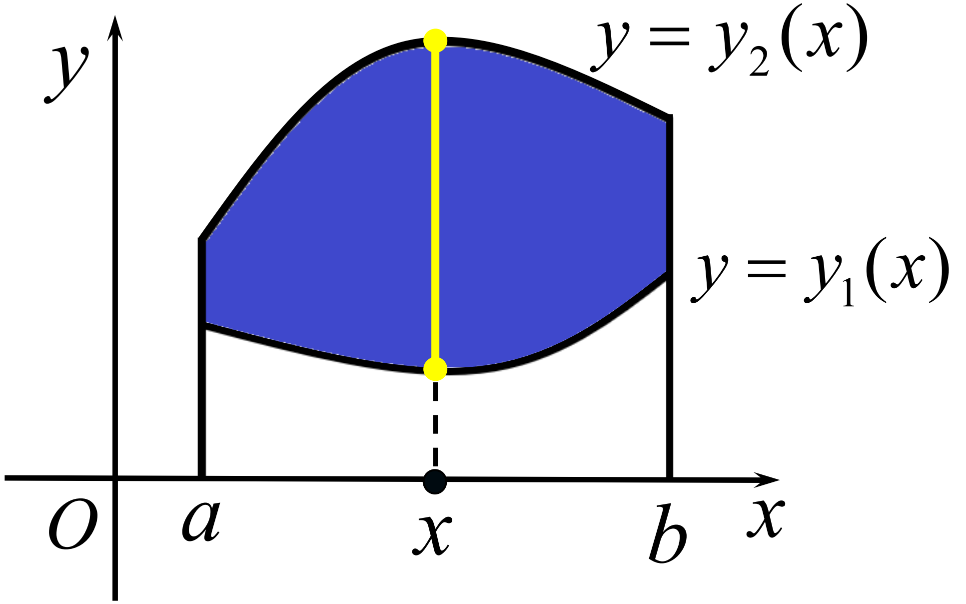
Двойной интеграл по правильной области

Теорема 3.

- Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D,
- область D **ограничена линиями**
  $$\boldsymbol{y = y_1(x), y = y_2(x), x = a, x = b},$$
- причем функции $y_1(x), y_2(x)$ непрерывно дифференцируемы и $y_1(x) \le y_2(x)$ для $x \in [a, b]$,
- (в частности, область D правильная в напр. оси Oy).

Двойной интеграл по правильной области

Тогда $$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy}$$



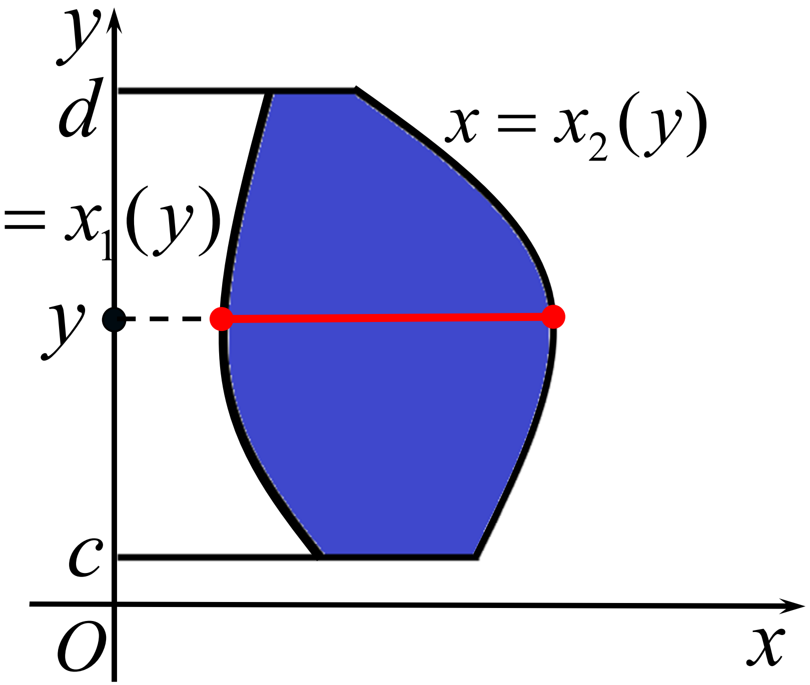
Двойной интеграл по правильной области

<u>Теорема 4</u>.

- Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области *D,*
- область *D* **ограничена линиями**
$$\boldsymbol{x = x_1(y), x = x_2(y), y = c, y = d,}$$
- причем функции $x_1(y), x_2(y)$ непрерывно дифференцируемы и $x_1(y) \le x_2(y)$ для $y \in [c, d]$,
- (в частности, область *D* правильная в напр. оси *Ox*).

Двойной интеграл по правильной области

Тогда $$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx}$$



Пример 1 (задача из ИДЗ). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

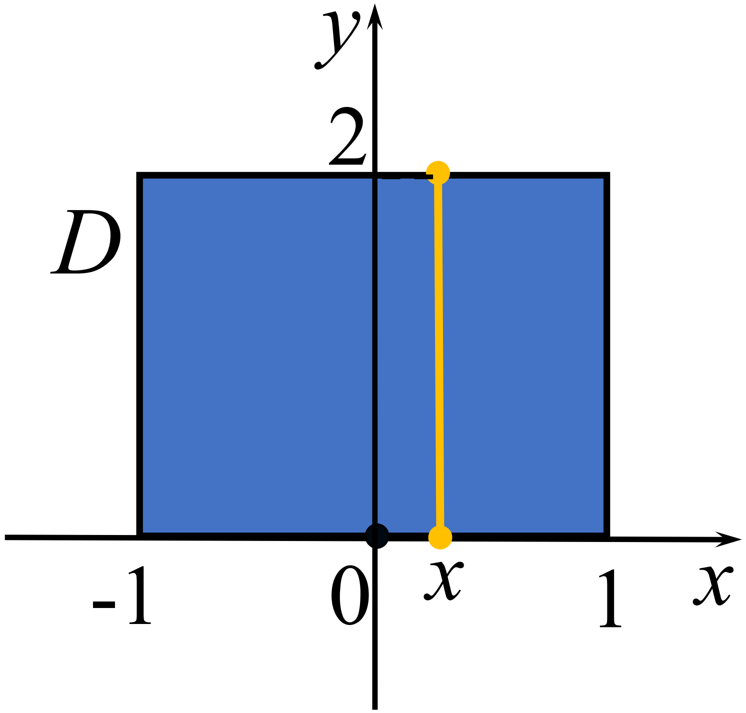
где $f(x,y) = x^2y - xy^3$ двумя способами по области

$$D: -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2.$$

Сделать чертеж.

Решение

<u>I способ.</u>



$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{2}f\left(x,y\right)dy=$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{2}\left(x^2y-xy^3\right)dy=\int_{-1}^{1}dx\left(\int_{0}^{2}x^2y\,dy-\int_{0}^{2}xy^3dy\right)=$$

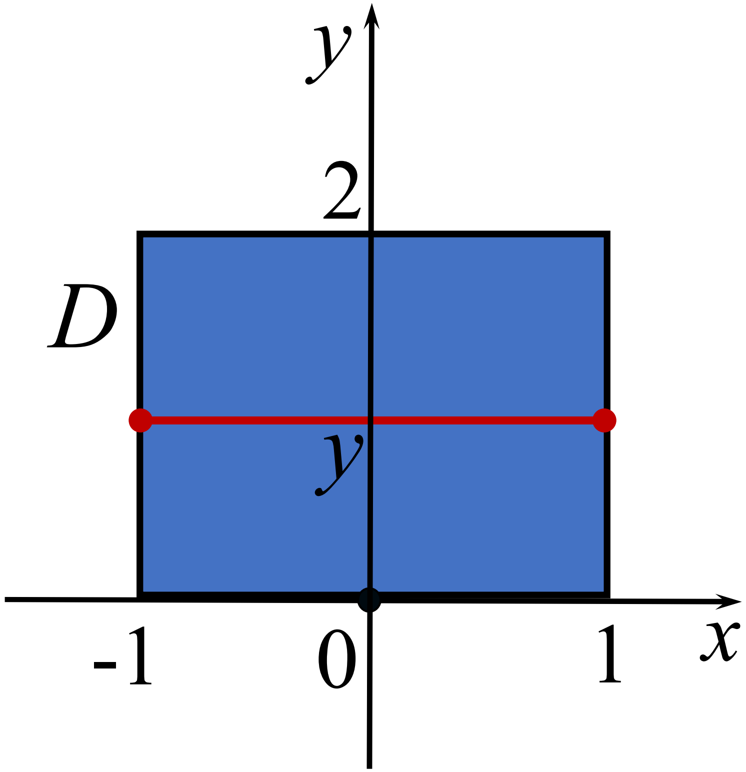
$$=\int_{-1}^{1}dx\left(x^2\int_{0}^{2}y\,dy-x\int_{0}^{2}y^3dy\right)=$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\left(x^2\left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^2\right)-x\left(\frac{y^4}{4}\bigg|_0^2\right)\right)=\int_{-1}^{1}dx\left(2x^2-4x\right)=$$

$$= \int_{-1}^{1} 2x^2 dx - \int_{-1}^{1} 4x\, dx = 2\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1} - 4\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(1^3 - (-1)^3\right) - 2\left(1^2 - (-1)^2\right) = \frac{4}{3}$$

<u>II способ.</u>



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\,dx$$

$$=\int_0^2 dy\int_{-1}^{1}\left(x^2y-xy^3\right)dx=$$

$$=\int_0^2 dy\left(\int_{-1}^{1}x^2y\,dx-\int_{-1}^{1}xy^3dx\right)=$$

$$=\int_0^2 dy\left(y\int_{-1}^{1}x^2dx-y^3\int_{-1}^{1}x\,dx\right)=$$

$$=\int_0^2 dy\left(y\left(\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right)-y^3\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1}\right)\right)=$$

$$=\int_0^2 dy\left(\frac{y}{3}\left(1^3-(-1)^3\right)-\frac{y^3}{2}\left(1^2-(-1)^2\right)\right)=$$

$$=\int_0^2 dy\left(\frac{2}{3}y-0\cdot y^3\right)=\frac{2}{3}\int_0^2 y\,dy=\frac{2}{3}\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot y^2\Big|_0^2=\frac{1}{3}\left(2^2-0^2\right)=\frac{4}{3}$$

Двойной интеграл. Пример 2

Пример 2. $f(x,y) = x^2 y$

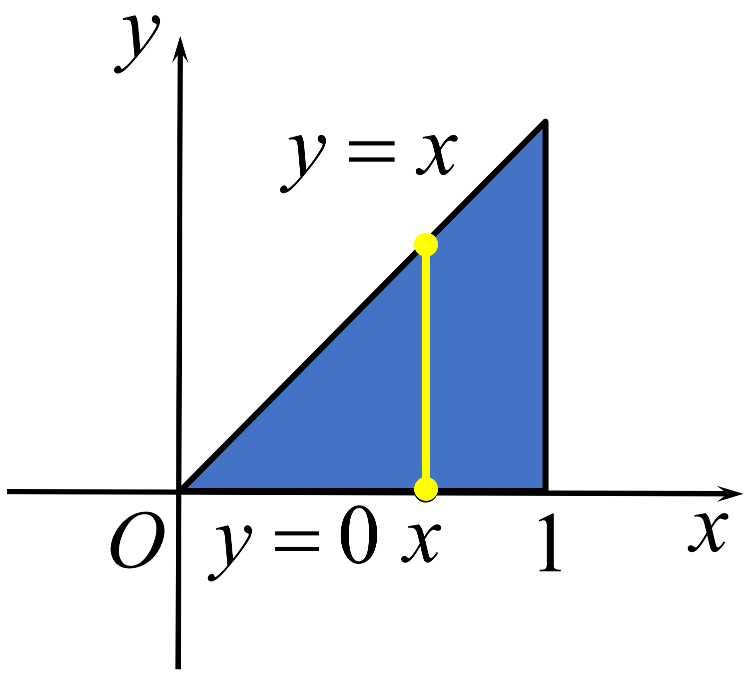
$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases} \qquad \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy - ?$$

Решение. Чтобы найти уравнение линий, для Γ_D «превращаем» все **неравенства** для D в **равенства**:

$$\Gamma_D: \begin{array}{l} x = 0, \quad x = 1, \\ y = 0, \quad y = x \end{array}$$

Двойной интеграл. Пример 2

Изображаем область D и применяем теорему 3:



Двойной интеграл. Пример 2

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D x^2 y dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(x^2 \int_0^x y dy \right) = \int_0^1 dx \left(x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^x \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \frac{x^4}{2} = \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \frac{x^5}{10} \Big|_0^1 = \frac{1}{10}$$

Двойной интеграл. Пример 3

Пример 3. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$$

Решение. 1) Применим теорему 3:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Двойной интеграл. Пример 3

2) По пределам интегрирования в интеграле выписываем неравенства для области *D:*

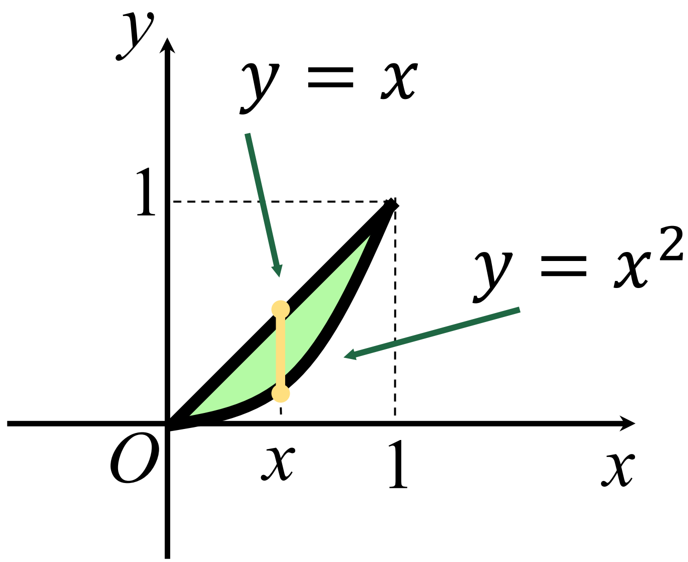
$$D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$$

3) Находим уравнения для границы Γ_D, «превращая» неравенства *D* для в равенства:

$$\Gamma_D: \begin{array}{l} x = 0,\ x = 1, \\ y = x,\ y = x^2 \end{array}$$

Двойной интеграл. Пример 3

4) Изображаем область D:



Двойной интеграл. Пример 3

5) Выражаем x через y в тех уравнения границы Γ_D, где это возможно:

$$y = x \to x = y$$

$$y = x^2 \to x = \sqrt{y}$$

6) Переписываем неравенства для области D:

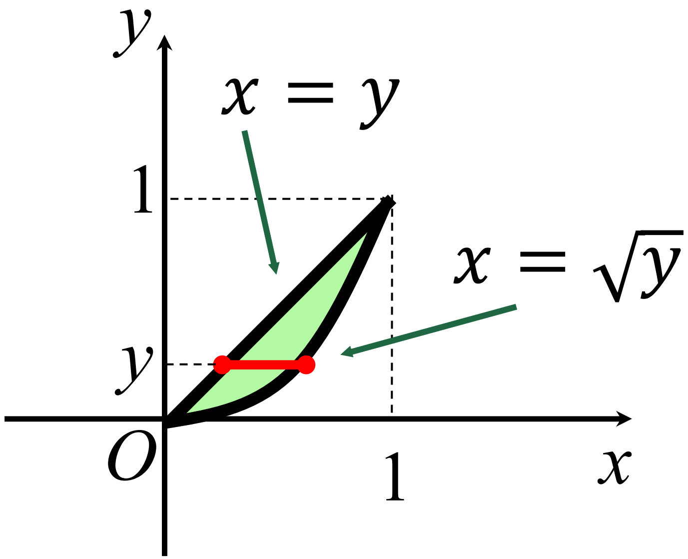
$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$$

Двойной интеграл. Пример 3

7) Применим теорему 4:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$



<u>Ответ</u>: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

Двойной интеграл

1). Внешний интеграл всегда в постоянных пределах.

2). Величина двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования.

Двойной интеграл. Пример 4

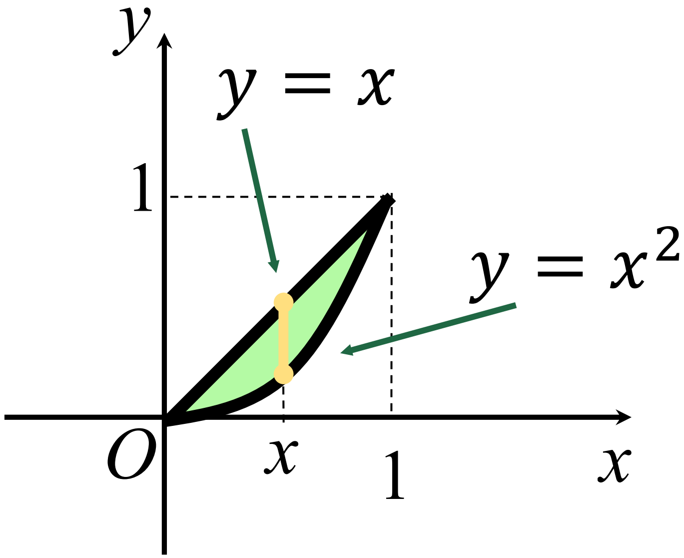
Пример 4. $f(x,y) = x$

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases} \qquad \iint\limits_D f(x,y)dxdy - ?$$

Решение. I способ. Фиксируем x (пример 3):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy =$$

Двойной интеграл. Пример 4



$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} x dy = \int_0^1 dx \left(x \int_{x^2}^{x} dy \right) =$$

Двойной интеграл. Пример 4

$$= \int_0^1 dx\, x \left(y \Big|_{x^2}^{x} \right) = \int_0^1 dx\, x(x - x^2) =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}$$

Двойной интеграл. Пример 4

II способ. Фиксируем y (пример 3):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} xdx =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \left(\left. \frac{x^2}{2} \right|_y^{\sqrt{y}} \right) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (y - y^2)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left. \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Пример 5 (задача из ИДЗ). В двойном интеграле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

расставить двумя способами пределы интегрирования (перейти к повторным интегралам), если область D ограничена кривыми $(x+1)^2+(y-1)^2=1,\ x=-1,$ причем $x\le -1.$ Сделать чертеж.

Решение

<u>I способ:</u> фиксируем x, потом y.

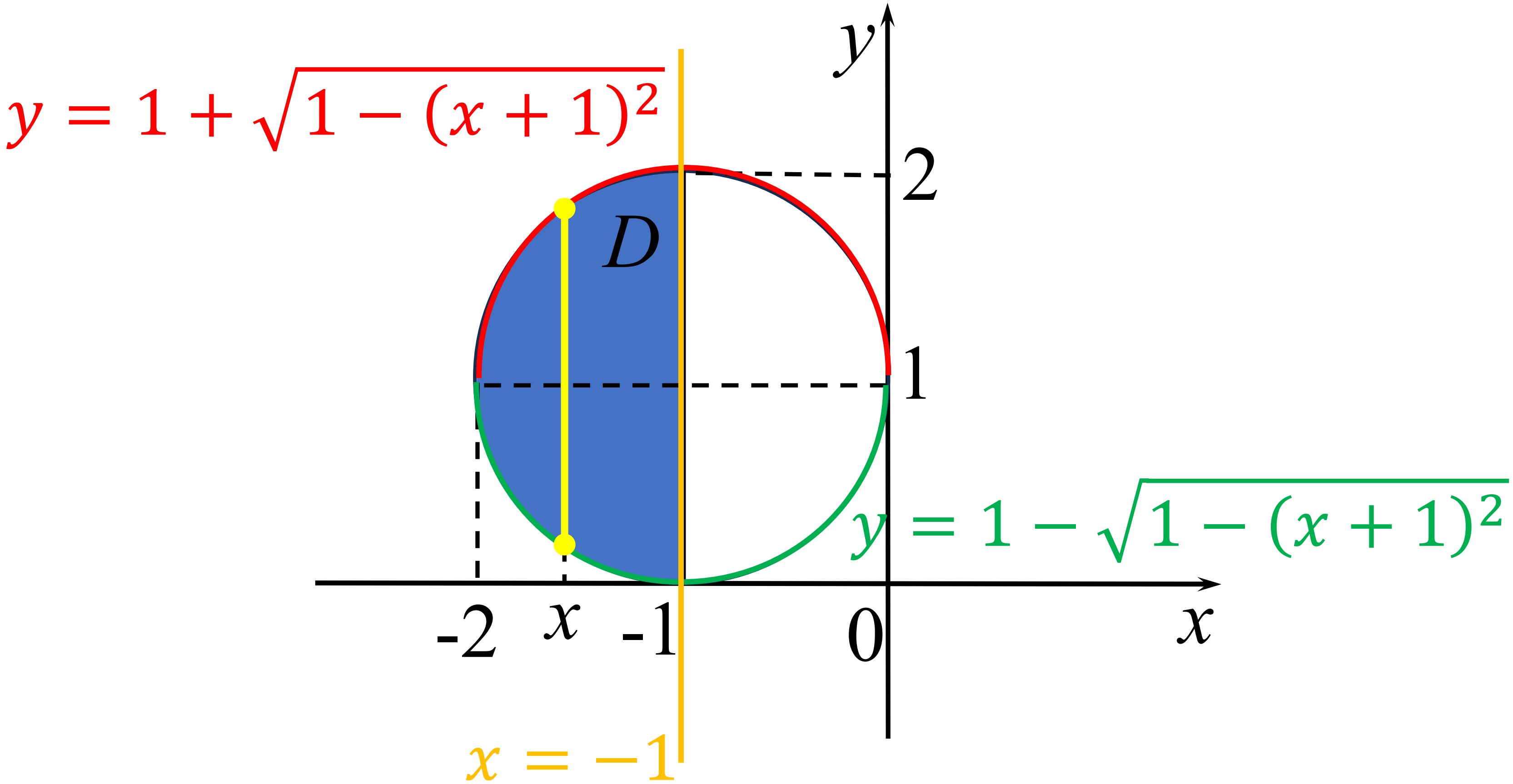
Выразим y через x для тех кривых, где можно это сделать:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$(y-1)^2 = 1 - (x+1)^2$$

$$y - 1 = \pm\sqrt{1-(x+1)^2}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{1-(x+1)^2}$$



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{1-\sqrt{1-(x+1)^2}}^{1+\sqrt{1-(x+1)^2}} f(x,y)\,dy$$

II способ: фиксируем y, потом x.

Выразим x через y для тех кривых, где можно это сделать :

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1$$

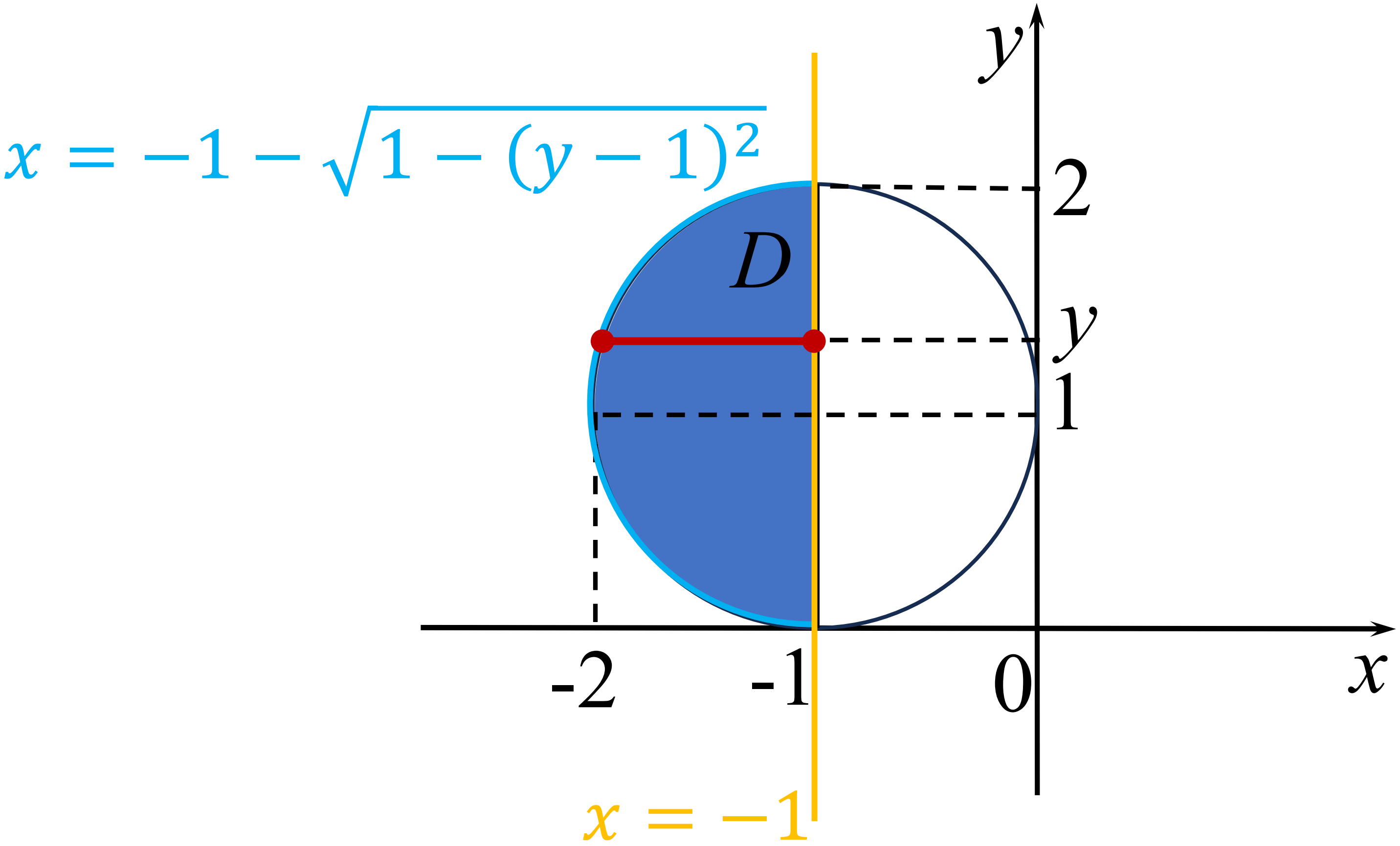
$$(x+1)^2=1-(y-1)^2$$

$$x+1=\pm\sqrt{1-(y-1)^2}$$

$$x=-1\pm\sqrt{1-(y-1)^2}$$

Поскольку $x\leq -1$, имеем:

$$x=-1-\sqrt{1-(y-1)^2}$$



$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^2 dy \int_{-1-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{-1} f(x,y)\,dx$$

Ответ:

$$1)\ \int_{-2}^{-1} dx \int_{1-\sqrt{1-(x+1)^2}}^{1+\sqrt{1-(x+1)^2}} f(x,y)\,dy;$$

$$2)\ \int_{0}^{2} dy \int_{-1-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{-1} f(x,y)\,dx$$

Двойной интеграл. Пример 6

Пример 5. Свести сумму повторных интегралов к двойному и переменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

Двойной интеграл. Пример 6

<u>Решение</u>. 1) Применим теорему 3:

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy = \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Область D − есть объединение правильных областей D_1 и D_2.

Двойной интеграл. Пример 6

2) По пределам интегрирования в первом интеграле выписываем неравенства для области D_1:

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

По второму интегралу выписываем неравенства для области D_2:

$$D_2 : \begin{cases} 1 \le x \le \sqrt{2} \\ 0 \le y \le \sqrt{2 - x^2} \end{cases}$$

Двойной интеграл. Пример 6

3) Находим уравнения для границы Γ_{D_1}, «превращая» неравенства для D_1 для в равенства:

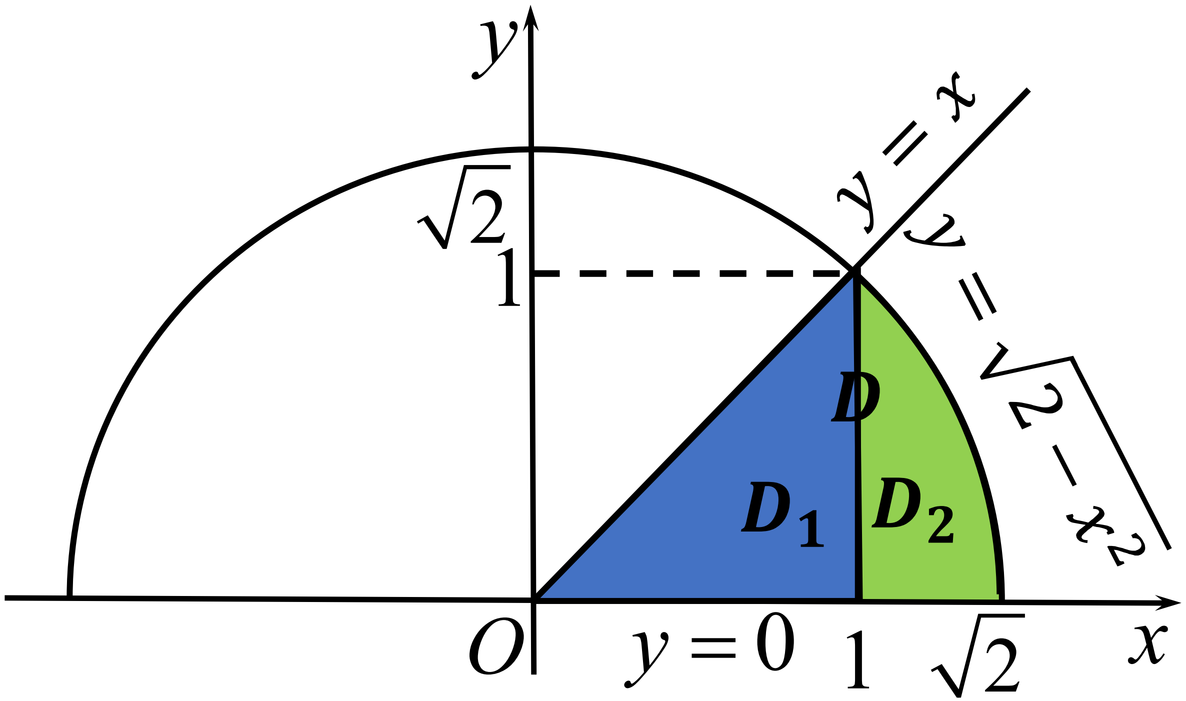
$$\Gamma_{D_1}: \begin{array}{ll} x=0, & x=1, \\ y=0, & y=x \end{array}$$

Аналогично для Γ_{D_2}:

$$\Gamma_{D_2}: \begin{array}{l} x=1,\ x=\sqrt{2},\ y=0, \\ y=\sqrt{2-x^2}\ \left(x^2+y^2=2,\ y\geq 0\right) \end{array}$$

Двойной интеграл. Пример 6

4) Изображаем области D_1 и D_2, а значит и область D – объединение этих областей:



Двойной интеграл. Пример 6

5) Выражаем x через y в тех уравнения границы Γ_{D_1}, где это возможно:

$$y = x \to x = y$$

Аналогично, для Γ_{D_2}, где это возможно:

$$y = \sqrt{2 - x^2} \to y^2 = 2 - x^2, y \geq 0$$

$$\to x^2 = 2 - y^2, y \geq 0 \to x = \sqrt{2 - y^2}$$

Двойной интеграл. Пример 6

6) Переписываем неравенства для областей D_1, D_2:

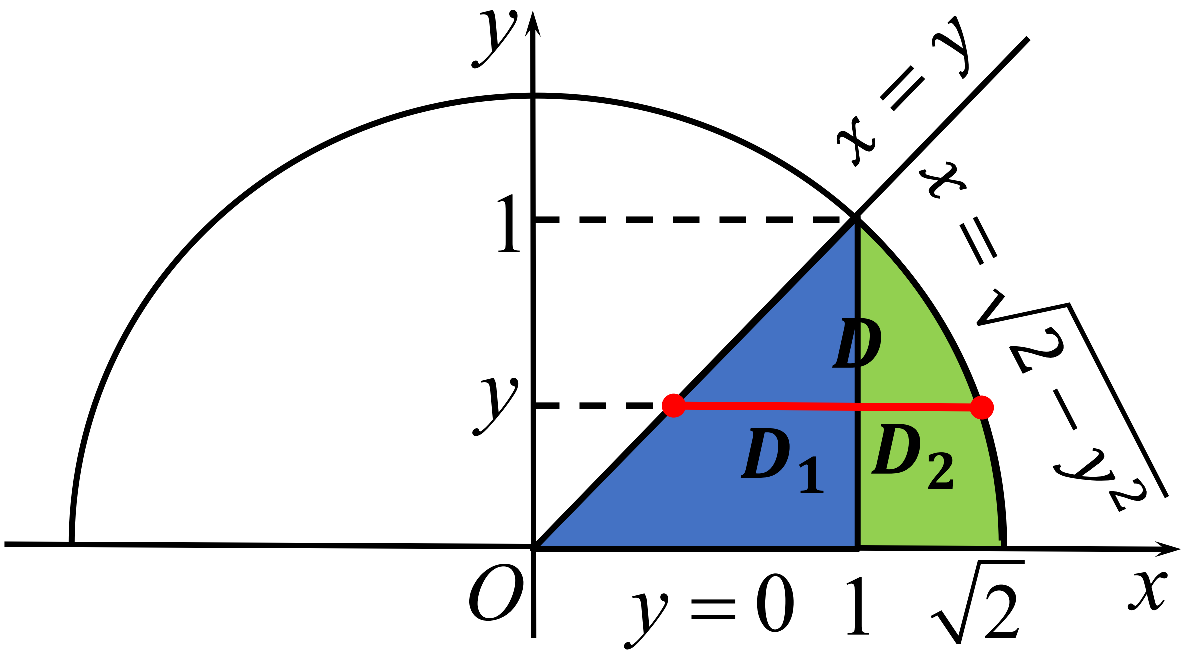
$$D_1:\begin{cases}0\le y\le 1\\ y\le x\le 1\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}0\le y\le 1\\ 1\le x\le \sqrt{2-y^2}\end{cases}$$

Неравенства для области D:

$$D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ y\le x\le \sqrt{2-y^2}\end{cases}$$

Двойной интеграл. Пример 6

Изображаем области D_1 и D_2, а значит и область D – объединение этих областей:



Двойной интеграл. Пример 6

7) Применим теорему 2:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

<u>Ответ</u>: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$