Мощность множества. Кардинальные и ординальные числа.

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

18 сентября 2020 г.

Понятие мощности множества

Мощность конечного множества — количество элементов в нем. Ясно, что $|A| = |B|$ тогда и только тогда, когда существует биекция $f : A \to B$.

Понятие мощности множества

Мощность конечного множества — количество элементов в нем. Ясно, что $|A| = |B|$ тогда и только тогда, когда существует биекция $f : A \to B$.

Определение

Два произвольных множества A и B называются равномощными, если существует биекция $f : A \to B$.

Понятие мощности множества

Мощность конечного множества — количество элементов в нем. Ясно, что $|A| = |B|$ тогда и только тогда, когда существует биекция $f : A \to B$.

Определение

Два произвольных множества A и B называются *равномощными*, если существует биекция $f : A \to B$.

Убедитесь, что "быть равномощным" является отношением эквивалентности.

Понятие мощности множества

Мощность конечного множества — количество элементов в нем. Ясно, что $|A| = |B|$ тогда и только тогда, когда существует биекция $f : A \to B$.

Определение

Два произвольных множества A и B называются равномощными, если существует биекция $f: A \to B$.

Убедитесь, что "быть равномощным" является отношением эквивалентности.

Определение

Каждому классу эквивалентности можно сопоставить мощность этого класса или кардинальное число. $card(A)$ — кардинальное число того класса, которому принадлежит множество A.

Счетные множества

Определение

Множество называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.
$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

Счетные множества

Определение

Множество называется **счетным**, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.
$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

Пусть множество A счетно, тогда существует биекция $f : \mathbb{N} \to A$. В матанализе такие отображения называются последовательностями. Таким образом, любое счетное множество A можно представить в виде последовательности различных элементов $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Счетные множества

Определение

Множество называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.
$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

Множество целых чисел счетно.

Чтобы это доказать, нужно построить биекцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.
Рассмотрим биекцию $f(m) = \begin{cases} k, & \text{если } m=2k+1; \\ -k, & \text{если } m=2k. \end{cases}$ Тогда
$\{1, 2, 3, 4, 5 \dots\} \to \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$

Счетные множества

Определение

Множество называется **счетным**, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.
$|\mathbb{N}| = \aleph_0$

Множество целых чисел счетно.

Чтобы это доказать, нужно построить биекцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.
Рассмотрим биекцию $f(m) = \begin{cases} k, & \text{если } m{=}2k{+}1; \\ -k, & \text{если } m{=}2k. \end{cases}$ Тогда
$\{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\} \to \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots\}$

Множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетно

Лестница Кантора

Бесконечные множества

Множество бесконечно, если при удалении любого конечного числа элементов множество остается непустым.

Лемма 1

Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Бесконечные множества

Множество бесконечно, если при удалении любого конечного числа элементов множество остается непустым.

Лемма 1

Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Пусть B — счетное множество. Оно непусто, следовательно, в нем есть элемент a_1. Множество $B \setminus \{a_1\}$ непусто, в нем есть элемент $\{a_2\}$. Продолжая этот процесс мы построим последовательность различных элементов множества $\{a_1, a_2, \ldots\}$

Лемма 2

Пусть B произвольное бесконечное множество, а множество A счетно или конечно. Тогда $|B \cup A| = |B|$

Лемма 2

Пусть B произвольное бесконечное множество, а множество A счетно или конечно. Тогда $|B \cup A| = |B|$

Будем считать, что $B \cap A = \emptyset$, иначе $B \cup A = B \cup (A \setminus (B \cap A))$ и множество $A \setminus (B \cap A)$ также счетно или конечно. По лемме 1 в множестве B есть счетное подмножество $B_1 = \{b_1, b_2, \ldots\}$.

Лемма 2

Пусть B произвольное бесконечное множество, а множество A счетно или конечно. Тогда $|B \cup A| = |B|$

Будем считать, что $B \cap A = \emptyset$, иначе $B \cup A = B \cup (A \setminus (B \cap A))$ и множество $A \setminus (B \cap A)$ также счетно или конечно. По лемме 1 в множестве B есть счетное подмножество $B_1 = \{b_1, b_2, \ldots\}$.
Пусть сначала $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ конечно. Построим отображение $f : B \cup A \to B$ по правилу:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in B \setminus B_1; \\ b_i, & x = a_i \in A; \\ b_{i+n}, & x = b_i \in B_1. \end{cases}$$

Это отображение оставляется все элементы множества $B \setminus B_1$ на месте, а множество $B_1 \cup A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2 \ldots\}$ переводит в $\{b_1, b_2, \ldots, \}$. Очевидно, что если из счетной последовательности убрать первые n элементов, то оставшиеся снова будут образовывать счетную последовательность. Нетрудно убедиться, используя определение, что f будет биекцией.

Лемма 2

Пусть B произвольное бесконечное множество, а множество A счетно или конечно. Тогда $|B \cup A| = |B|$

Будем считать, что $B \cap A = \emptyset$, иначе $B \cup A = B \cup (A \setminus (B \cap A))$ и множество $A \setminus (B \cap A)$ также счетно или конечно. По лемме 1 в множестве B есть счетное подмножество $B_1 = \{b_1, b_2, \ldots\}$.
Теперь рассмотрим случай, когда $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ счетно. По аналогии с предыдущим случаем мы построим биекцию $g \colon B \cup A \to B$, которая будет оставлять элементы множества $B \setminus B_1$ на месте. Нам останется только определить g на $B_1 \cup A_1$ по правилу:
$$g(x) = \begin{cases} b_{2i}, & x = b_i \\ b_{2i+1}, & b = a_i. \end{cases}$$
Тогда

$$\begin{matrix} \{b_1, b_2, \ldots\} \\ \{a_1, a_2, \ldots\} \end{matrix} \to \{b_1, a_1, b_2, a_2 \ldots\} \xrightarrow{g} \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}$$

Следствия леммы 2

Теорема 1 (Критерий бесконечности)

Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству

Следствия леммы 2

Теорема 1 (Критерий бесконечности)

Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству

Пусть B бесконечно, тогда рассмотрим произвольный элемент $a \in B$ и множества $A = \{a\}, B_1 = B \setminus \{a\}$. Тогда по лемме 2
$|B_1| = |B_1 \cup A| = |B|$.

Следствия леммы 2

Теорема 1 (Критерий бесконечности)

Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству

Пусть B бесконечно, тогда рассмотрим произвольный элемент $a \in B$ и множества $A = \{a\}, B_1 = B \setminus \{a\}$. Тогда по лемме 2
$|B_1| = |B_1 \cup A| = |B|$.
И обратно, если предположим противное, что конечное множество равномощно своему собственному подмножеству, то немедленно получим противоречие.

Следствия леммы 2

Теорема 1 (Критерий бесконечности)

Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству

Следствие

Объединение счетного множества с счетным или конечным снова счетно.

Счетное объединение счетных множеств

Лемма 3

Счетное объединение счетных множеств счетно.

Лемма 3

Счетное объединение счетных множеств счетно.

Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где каждое A_i счетное. Убедимся сначала, что можно считать, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, где $i \neq j$.

Счетное объединение счетных множеств

Лемма 3

Счетное объединение счетных множеств счетно.

Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где каждое A_i счетное. Убедимся сначала, что можно считать, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, где $i \neq j$.
Проведем соответствующее доказательство по индукции по $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 3

Счетное объединение счетных множеств счетно.

Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где каждое A_i счетное. Убедимся сначала, что можно считать, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, где $i \neq j$.
Проведем соответствующее доказательство по индукции по $n \in \mathbb{N}$.
Пусть $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Рассмотрим множество $A_2' = A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)$. Если оно конечно, то выбросим A_2 из объединения и в качестве A_1 возьмем $A_1' = A_1 \cup A_2'$, которое будет счетным по лемме 2.

Лемма 3

Счетное объединение счетных множеств счетно.

Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где каждое A_i счетное. Убедимся сначала, что можно считать, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, где $i \neq j$.
Проведем соответствующее доказательство по индукции по $n \in \mathbb{N}$.
Пусть $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Рассмотрим множество $A_2' = A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)$. Если оно конечно, то выбросим A_2 из объединения и в качестве A_1 возьмем $A_1' = A_1 \cup A_2'$, которое будет счетным по лемме 2. Если же A_2' счетно, то берем $A_1' = A_1$. В итоге получили два непересекающихся множества A_1', A_2' таких, что $A_1 \cup A_2 = A_1' \cup A_2'$.

Счетное объединение счетных множеств

Лемма 3

Счетное объединение счетных множеств счетно.

Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где каждое A_i счетное. Убедимся сначала, что можно считать, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, где $i \neq j$.
Проведем соответствующее доказательство по индукции по $n \in \mathbb{N}$.
Пусть $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Рассмотрим множество $A_2' = A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)$. Если оно конечно, то выбросим A_2 из объединения и в качестве A_1 возьмем $A_1' = A_1 \cup A_2'$, которое будет счетным по лемме 2. Если же A_2' счетно, то берем $A_1' = A_1$. В итоге получили два непересекающихся множества A_1', A_2' таких, что $A_1 \cup A_2 = A_1' \cup A_2'$.
Пусть множества $A_1, \ldots, A_n$ попарно не пересекаются. Возьмем множество A_{n+1} и проведем с каждым множеством A_i процедуру, описанную выше.

Счетное объединение счетных множеств

Лемма 3

Счетное объединение счетных множеств счетно.

Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где каждое A_i счетное. Убедимся сначала, что можно считать, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, где $i \neq j$.
Проведем соответствующее доказательство по индукции по $n \in \mathbb{N}$.
Пусть $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Рассмотрим множество $A_2' = A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)$. Если оно конечно, то выбросим A_2 из объединения и в качестве A_1 возьмем $A_1' = A_1 \cup A_2'$, которое будет счетным по лемме 2. Если же A_2' счетно, то берем $A_1' = A_1$. В итоге получили два непересекающихся множества A_1', A_2' таких, что $A_1 \cup A_2 = A_1' \cup A_2'$.
Пусть множества $A_1, \ldots, A_n$ попарно не пересекаются. Возьмем множество A_{n+1} и проведем с каждым множеством A_i процедуру, описанную выше. После того, как мы получили разбиение множества A, рассмотрим таблицу, в которой в строке с номером i и столбце с номером j стоит j-й элемент множества A_i. Лестница Кантора строит биекцию из $\mathbb{N}$ в $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно

Для каждого числа $p \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $\mathbb{Q}_p = \{\frac{m}{p} \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно

Для каждого числа $p \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $\mathbb{Q}_p = \{\frac{m}{p} \mid m \in \mathbb{Z}\}$.
Очевидно, что $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}_p|$, откуда $\mathbb{Q}_p$ счетно.
Тогда $\mathbb{Q} = \bigcup_p \mathbb{Q}_p$, откуда $\mathbb{Q}$ счетно по лемме 3.

Сравнение мощностей

Определение

Будем говорить $|A| \leq |B|$, если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B.

Определение

Будем говорить $|A| \leq |B|$, если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B.

Упражнение. Убедитесь, что это определение равносильно существованию инъекции $f: A \to B$.

Сравнение мощностей

Определение

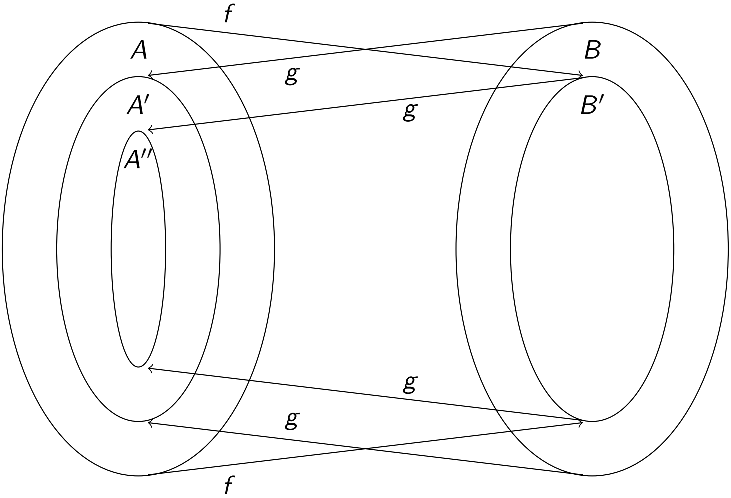
Будем говорить $|A| \leq |B|$, если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B.

Упражнение. Убедитесь, что это определение равносильно существованию инъекции $f : A \to B$.

Теорема Кантора-Бернштейна

Если $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.

Иллюстрация к доказательству теоремы



Доказательство теоремы Кантора-Бернштейна

Так как $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то существуют биекции $f\colon A \to B' \subseteq B$, $g\colon B \to A' \subseteq A$. Кроме того, $A'' = g(f(A)) \subseteq A'$. Откуда получаем $|A| = |B'| = |A''|$, $|B| = |A'|$. Мы покажем, что $|A| = |A'|$, откуда получится $|A| = |B|$.

Так как $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то существуют биекции $f\colon A \to B' \subseteq B$, $g\colon B \to A' \subseteq A$. Кроме того, $A'' = g(f(A)) \subseteq A'$. Откуда получаем $|A| = |B'| = |A''|$, $|B| = |A'|$. Мы покажем, что $|A| = |A'|$, откуда получится $|A| = |B|$.
Для этого воспользуемся следующей леммой, взяв $A_1 = A''$, $C = A' \setminus A''$.

Лемма 5

Пусть A бесконечно, $A_1 \subset A$, $|A_1| = |A|$. Тогда $\forall C \subseteq A \setminus A_1$ $|A_1 \cup C| = |A|$.

Доказательство леммы 5

Так как $|A_1| = |A|$, то существует биекция $f : A \to A_1$. рассмотрим произвольное множество $C \subseteq A \setminus A_1$ и обозначим $f^0(C) = C$, $f^{(n)}(C) = f(f^{(n-1)}(C))$. Кроме того, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(C)$.

Доказательство леммы 5

Так как $|A_1| = |A|$, то существует биекция $f\colon A \to A_1$. рассмотрим произвольное множество $C \subseteq A \setminus A_1$ и обозначим $f^0(C) = C$, $f^{(n)}(C) = f(f^{(n-1)}(C))$. Кроме того, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(C)$.
Построим отображение $\varphi\colon A_1 \cup C \to A_1$ по правилу:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ x, & x \in A \setminus D \end{cases}$$

Так как $|A_1| = |A|$, то существует биекция $f\colon A \to A_1$. рассмотрим произвольное множество $C \subseteq A \setminus A_1$ и обозначим $f^0(C) = C$, $f^{(n)}(C) = f(f^{(n-1)}(C))$. Кроме того, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(C)$.
Построим отображение $\varphi\colon A_1 \cup C \to A_1$ по правилу:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ x, & x \in A \setminus D \end{cases}$$

Сначала покажем, что φ — инъекция. Рассмотрим $x_1, x_2 \in A_1 \cup C$ и следующие три случая:

Так как $|A_1| = |A|$, то существует биекция $f\colon A \to A_1$. рассмотрим произвольное множество $C \subseteq A \setminus A_1$ и обозначим $f^0(C) = C$, $f^{(n)}(C) = f(f^{(n-1)}(C))$. Кроме того, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(C)$.
Построим отображение $\varphi\colon A_1 \cup C \to A_1$ по правилу:
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ x, & x \in A \setminus D \end{cases}$$
Сначала покажем, что φ — инъекция. Рассмотрим $x_1, x_2 \in A_1 \cup C$ и следующие три случая:

Сл. 1 $x_1, x_2 \in A_1 \setminus D$. Тогда очевидно $x_1 = \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2) = x_2$;

Так как $|A_1| = |A|$, то существует биекция $f\colon A \to A_1$. рассмотрим произвольное множество $C \subseteq A \setminus A_1$ и обозначим $f^0(C) = C$, $f^{(n)}(C) = f(f^{(n-1)}(C))$. Кроме того, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(C)$.

Построим отображение $\varphi\colon A_1 \cup C \to A_1$ по правилу:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ x, & x \in A \setminus D \end{cases}$$

Сначала покажем, что φ — инъекция. Рассмотрим $x_1, x_2 \in A_1 \cup C$ и следующие три случая:

Сл. 1 $x_1, x_2 \in A_1 \setminus D$. Тогда очевидно $x_1 = \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2) = x_2$;

Сл. 2 $x_1 \in D$, $x_2 \in A_1 \setminus D$. Тогда $f(x_1) \in D$, $x_2 \in A_1 \setminus D$ и $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$;

Так как $|A_1| = |A|$, то существует биекция $f\colon A \to A_1$. рассмотрим произвольное множество $C \subseteq A \setminus A_1$ и обозначим $f^0(C) = C$, $f^{(n)}(C) = f(f^{(n-1)}(C))$. Кроме того, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(C)$.
Построим отображение $\varphi\colon A_1 \cup C \to A_1$ по правилу:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ x, & x \in A \setminus D \end{cases}$$

Сначала покажем, что φ — инъекция. Рассмотрим $x_1, x_2 \in A_1 \cup C$ и следующие три случая:

Сл. 1 $x_1, x_2 \in A_1 \setminus D$. Тогда очевидно $x_1 = \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2) = x_2$;

Сл. 2 $x_1 \in D$, $x_2 \in A_1 \setminus D$. Тогда $f(x_1) \in D$, $x_2 \in A_1 \setminus D$ и $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$;

Сл. 3 $x_1, x_2 \in D$. Так как f является биекцией, то $\varphi(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = \varphi(x_2) \to x_1 = x_2$.

Доказательство леммы 5

Так как $|A_1| = |A|$, то существует биекция $f\colon A \to A_1$. рассмотрим произвольное множество $C \subseteq A \setminus A_1$ и обозначим $f^0(C) = C$, $f^{(n)}(C) = f(f^{(n-1)}(C))$. Кроме того, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(C)$.
Построим отображение $\varphi\colon A_1 \cup C \to A_1$ по правилу:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ x, & x \in A \setminus D \end{cases}$$

Теперь покажем, что φ — сюръекция. Возьмем $y \in A_1$ и рассмотрим случаи:

Так как $|A_1| = |A|$, то существует биекция $f\colon A \to A_1$. рассмотрим произвольное множество $C \subseteq A \setminus A_1$ и обозначим $f^0(C) = C$, $f^{(n)}(C) = f(f^{(n-1)}(C))$. Кроме того, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(C)$.
Построим отображение $\varphi\colon A_1 \cup C \to A_1$ по правилу:
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ x, & x \in A \setminus D \end{cases}$$
Теперь покажем, что φ — сюръекция. Возьмем $y \in A_1$ и рассмотрим случаи:

Сл. 1 $y \in A_1 \setminus D$. Следовательно, $y = \varphi(y)$;

Доказательство леммы 5

Так как $|A_1| = |A|$, то существует биекция $f\colon A \to A_1$. рассмотрим произвольное множество $C \subseteq A \setminus A_1$ и обозначим $f^0(C) = C$, $f^{(n)}(C) = f(f^{(n-1)}(C))$. Кроме того, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(C)$.
Построим отображение $\varphi\colon A_1 \cup C \to A_1$ по правилу:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ x, & x \in A \setminus D \end{cases}$$

Теперь покажем, что φ — сюръекция. Возьмем $y \in A_1$ и рассмотрим случаи:

Сл. 1 $y \in A_1 \setminus D$. Следовательно, $y = \varphi(y)$;

Сл. 2 $y \in D \subseteq A_1$. По построению множества D существуют $k \geq 0$ и $z \in D$ такие, что $f^k(z) = y$. Заметим, что $y \notin C$, так как $f(D) \subseteq A_1$. Следовательно, $k \neq 0$ и поэтому берем $x = f^{k-1}(z) \in D$ и получаем $f(x) = z$

Континуальные множества

Определение

Мощность множества всех действительных чисел на отрезке $[0;1]$ континуум.

$|[0;1]| = \aleph_1 = C$.

Лемма 4

Множества $[0;1]$ и множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 равномощны.

Лемма 4

Множества $[0;1]$ и множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 равномощны.

Рассмотрим число $a \in [0;1]$. Рассмотрим соответствующее ему двоичное число: $0,\alpha_1\alpha_2\ldots$, $\alpha_i \in \{0,1\}$. Очевидно, что различным числам соответствуют различные такие последовательности. Однако последовательности $0,1,1,\ldots$ (имеет бесконечное число 1 в конце) и $1,0,0,\ldots$ соответствуют одному числу $\frac{1}{2}$.

Лемма 4

Множества $[0;1]$ и множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 равномощны.

Рассмотрим число $a \in [0;1]$. Рассмотрим соответствующее ему двоичное число: $0,\alpha_1\alpha_2\ldots$, $\alpha_i \in \{0,1\}$. Очевидно, что различным числам соответствуют различные такие последовательности. Однако последовательности $0,1,1,\ldots$ (имеет бесконечное число 1 в конце) и $1,0,0,\ldots$ соответствуют одному числу $\frac{1}{2}$.
Обозначим множество всех последовательностей из 0 и 1 через M. Рассмотрим его подмножество A всех бесконечных последовательностей из 0 и 1, у которых бесконечное количество единиц в конце. Множество A счетно, так как $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k — все последовательности, у которых все элементы, начиная с α_k, равны 1. Поэтому по лемме 2 $|M| = |M \setminus A|$. А выше было доказано, что $|M \setminus A| = |[0;1]|$.

Теорема(Кантор)

Множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчетно ($\aleph_0 \neq \aleph_1$).

Теорема(Кантор)

Множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчетно ($\aleph_0 \neq \aleph_1$).

Предположим, что множество последовательностей счетно, тогда его элементы можно перенумеровать и записать в виде последовательности $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \underline{\alpha_{11}}, \alpha_{12}, \alpha_{13} \ldots \\ a_2 &= \alpha_{21}, \underline{\alpha_{22}}, \alpha_{23} \ldots \\ a_3 &= \alpha_{31}, \alpha_{32}, \underline{\alpha_{33}}, \ldots \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Теорема Кантора

Теорема(Кантор)

Множество бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчетно ($\aleph_0 \neq \aleph_1$).

Предположим, что множество последовательностей счетно, тогда его элементы можно перенумеровать и записать в виде последовательности $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$:

$$\begin{aligned} a_1 &= \underline{\alpha_{11}}, \alpha_{12}, \alpha_{13} \ldots \\ a_2 &= \alpha_{21}, \underline{\alpha_{22}}, \alpha_{23} \ldots \\ a_3 &= \alpha_{31}, \alpha_{32}, \underline{\alpha_{33}}, \ldots \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Пусть $\overline{0} = 1, \overline{1} = 0$. Рассмотрим последовательность $\{\overline{\alpha_{11}}, \overline{\alpha_{22}}, \overline{\alpha_{33}}, \ldots\}$. Этой последовательности не совпадает ни с одной последовательностью в списке, следовательно, нет биекции из $\mathbb{N}$ в множество последовательностей из 0 и 1.

Мощность булеана

Предложение 1

$\mathcal{B}(\mathbb{N})$ равномощно множеству всех бесконечных последовательностей из 0 и 1.

Мощность булеана

Предложение 1

$\mathcal{B}(\mathbb{N})$ равномощно множеству всех бесконечных последовательностей из 0 и 1.

Для каждого подмножества $M \subseteq \mathbb{N}$ рассмотрим характеристическую последовательность (функцию) $I_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$ Такое отображение очевидно будет биекцией между $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ и множеством всех последовательностей из 0 и 1.

Мощность булеана

Предложение 1

$\mathcal{B}(\mathbb{N})$ равномощно множеству всех бесконечных последовательностей из 0 и 1.

Для каждого подмножества $M \subseteq \mathbb{N}$ рассмотрим характеристическую последовательность (функцию) $I_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$ Такое отображение очевидно будет биекцией между $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ и множеством всех последовательностей из 0 и 1. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{N} \to \mathcal{B}(\mathbb{N})$ заданное по правилу $f(n) = \{n\}$. Очевидно, что f — инъекция, откуда $|\mathbb{N}| \leq \mathcal{B}(\mathbb{N})$. По теореме Кантора и предложению 1 мы получаем $|\mathbb{N}| < |\mathcal{B}(\mathbb{N})|$.

Теорема Кантора о булеане

Теорема (Кантора о булеане)

Для любого множества A $\quad |A| < |\mathcal{B}(A)|$ (или $2^{|A|} > |A|$, где $2^{|A|} = |\mathcal{B}(A)|$)

Теорема Кантора о булеане

Теорема (Кантора о булеане)

Для любого множества A $\quad |A| < |\mathcal{B}(A)|$ (или $2^{|A|} > |A|$, где $2^{|A|} = |\mathcal{B}(A)|$)

Так как существует инъекция $f\colon A \to \mathcal{B}(A)$ заданная по правилу $f(a) = \{a\}$, то $|A| \leq |\mathcal{B}(A)|$.

Теорема (Кантора о булеане)

Для любого множества A $|A| < |\mathcal{B}(A)|$ (или $2^{|A|} > |A|$, где $2^{|A|} = |\mathcal{B}(A)|$)

Так как существует инъекция $f: A \to \mathcal{B}(A)$ заданная по правилу $f(a) = \{a\}$, то $|A| \leq |\mathcal{B}(A)|$.
От противного, пусть $|A| = |\mathcal{B}(A)|$. Тогда существует биекция $g: A \to \mathcal{B}(A)$. Рассмотрим множество $Z = \{z \in A \mid z \notin g(z)\}$ всех элементов, которые не принадлежат своему образу. Покажем, что у Z нет прообраза.

Теорема (Кантора о булеане)

Для любого множества A $|A| < |\mathcal{B}(A)|$ (или $2^{|A|} > |A|$, где $2^{|A|} = |\mathcal{B}(A)|$)

Так как существует инъекция $f\colon A \to \mathcal{B}(A)$ заданная по правилу $f(a) = \{a\}$, то $|A| \leq |\mathcal{B}(A)|$.
От противного, пусть $|A| = |\mathcal{B}(A)|$. Тогда существует биекция $g\colon A \to \mathcal{B}(A)$. Рассмотрим множество $Z = \{z \in A \mid z \notin g(z)\}$ всех элементов, которые не принадлежат своему образу. Покажем, что у Z нет прообраза.
От противного, пусть $z \in A$ такой элемент, что $g(z) = Z$. Тогда

Теорема (Кантора о булеане)

Для любого множества A $|A| < |\mathcal{B}(A)|$ (или $2^{|A|} > |A|$, где $2^{|A|} = |\mathcal{B}(A)|$)

Так как существует инъекция $f : A \to \mathcal{B}(A)$ заданная по правилу $f(a) = \{a\}$, то $|A| \leq |\mathcal{B}(A)|$.
От противного, пусть $|A| = |\mathcal{B}(A)|$. Тогда существует биекция $g : A \to \mathcal{B}(A)$. Рассмотрим множество $Z = \{z \in A \mid z \notin g(z)\}$ всех элементов, которые не принадлежат своему образу. Покажем, что у Z нет прообраза.
От противного, пусть $z \in A$ такой элемент, что $g(z) = Z$. Тогда

- Если $z \in Z$, то $z \notin g(z) = Z$;

Теорема (Кантора о булеане)

Для любого множества A $|A| < |\mathcal{B}(A)|$ (или $2^{|A|} > |A|$, где $2^{|A|} = |\mathcal{B}(A)|$)

Так как существует инъекция $f\colon A \to \mathcal{B}(A)$ заданная по правилу $f(a) = \{a\}$, то $|A| \leq |\mathcal{B}(A)|$.
От противного, пусть $|A| = |\mathcal{B}(A)|$. Тогда существует биекция $g\colon A \to \mathcal{B}(A)$. Рассмотрим множество $Z = \{z \in A \mid z \notin g(z)\}$ всех элементов, которые не принадлежат своему образу. Покажем, что у Z нет прообраза.
От противного, пусть $z \in A$ такой элемент, что $g(z) = Z$. Тогда

- Если $z \in Z$, то $z \notin g(z) = Z$;
- Если $z \notin Z$, то $z \notin g(z) = Z$, и значит $z \in Z$.

Теорема Кантора о булеане

Теорема (Кантора о булеане)

Для любого множества A $|A| < |\mathcal{B}(A)|$ (или $2^{|A|} > |A|$, где $2^{|A|} = |\mathcal{B}(A)|$)

Так как существует инъекция $f\colon A \to \mathcal{B}(A)$ заданная по правилу $f(a) = \{a\}$, то $|A| \leq |\mathcal{B}(A)|$.
От противного, пусть $|A| = |\mathcal{B}(A)|$. Тогда существует биекция $g\colon A \to \mathcal{B}(A)$. Рассмотрим множество $Z = \{z \in A \mid z \notin g(z)\}$ всех элементов, которые не принадлежат своему образу. Покажем, что у Z нет прообраза.
От противного, пусть $z \in A$ такой элемент, что $g(z) = Z$. Тогда

- Если $z \in Z$, то $z \notin g(z) = Z$;
- Если $z \notin Z$, то $z \notin g(z) = Z$, и значит $z \in Z$.

Мы получили, что у некоторого подмножества множества A нет прообраза, откуда g не биекция. Следовательно, $|A| < |\mathcal{B}(A)|$.

Континуум гипотеза

Иерархия алефов

Следствие из теоремы Кантора:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph_1 < 2^{\aleph_1} = \aleph_2 < \ldots$$

Континуум гипотеза

Иерархия алефов

Следствие из теоремы Кантора:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph_1 < 2^{\aleph_1} = \aleph_2 < \ldots$$

Континуум гипотеза (Кантор, 1871)

Любое подмножество множества действительных чисел либо континуально, либо счетно.

Континуум гипотеза

Иерархия алефов

Следствие из теоремы Кантора:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph_1 < 2^{\aleph_1} = \aleph_2 < \ldots$$

Континуум гипотеза (Кантор, 1871)

Любое подмножество множества действительных чисел либо континуально, либо счетно.

Теорема (Гедель, 1940; Коэн, 1965)

Континуум гипотезу нельзя ни доказать (Коэн), ни опровергнуть (Гедель) в текущей системе аксиом (система аксиом Цермело-Френкеля).