Изоморфизм ч.у.м., ординальные числа

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

17 сентября 2020 г.

Определение

Пусть $(A, \leq)$ — ч.у.м. Тогда отношение $\geq = (\leq)^{-1}$ также является отношением частичного порядка, а ч.у.м. $(A, \geq)$ называется *двойственным* к $(A, \leq)$.

Диаграмма Хассе для ч.у.м. $(A, \geq)$ получается переворачиванием диаграммы $(A. \leq)$.

Изоморфизм ч.у.м.

Определение

Пусть $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$ — ч.у.м. Два ч.у.м. изоморфны, если существует биекция $f : A_1 \to A_2$ такая, что $\forall x_1, x_2 \in A_1$ $x_1 \leq_1 x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_2 f(x_2)$. Обозначение: $(A_1, \leq_1) \cong (A_2, \leq_2)$.

Изоморфизм ч.у.м.

Определение

Пусть $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$ — ч.у.м. Два ч.у.м. изоморфны, если существует биекция $f\colon A_1 \to A_2$ такая, что $\forall x_1, x_2 \in A_1$ $x_1 \leq_1 x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_2 f(x_2)$. Обозначение: $(A_1, \leq_1) \cong (A_2, \leq_2)$.

Примеры

- Две конечные цепи изоморфны тогда и только тогда, когда в них одинаковое число элементов;
- Ч.у.м. делителей числа 15 и 6 изоморфны;
- Ч.у.м. делителей числа 15 и ч.у.м. $(\mathcal{B}(\{3, 5\}), \subseteq)$ изоморфны.

Изоморфизм ч.у.м.

Определение

Пусть $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$ — ч.у.м. Два ч.у.м. изоморфны, если существует биекция $f : A_1 \to A_2$ такая, что $\forall x_1, x_2 \in A_1$ $x_1 \leq_1 x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_2 f(x_2)$. Обозначение: $(A_1, \leq_1) \cong (A_2, \leq_2)$.

Определение

Ч.у.м. $(A, \leq)$, изоморфный своему двойственному, называется *самодвойственным*.

Определение

Пусть $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$ — ч.у.м. Два ч.у.м. изоморфны, если существует биекция $f\colon A_1 \to A_2$ такая, что $\forall x_1, x_2 \in A_1$ $x_1 \leq_1 x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_2 f(x_2)$. Обозначение: $(A_1, \leq_1) \cong (A_2, \leq_2)$.

Определение

Ч.у.м. $(A, \leq)$, изоморфный своему двойственному, называется *самодвойственным*.

Примеры

- любая конечная цепь;
- множество целых чисел (относительно обычного порядка);
- множвество всех подмножеств некоторого множества относительно отношения включения.

Вполне упорядоченные множества

Определение

Цепь с условием минимальности называется вполне упорядоченным множеством (в.у.м.)

Вполне упорядоченные множества

Определение

Цепь с условием минимальности называется вполне упорядоченным множеством (в.у.м.)

Теорема (Цермело)

Пусть A — непустое множество. Тогда на множестве A существует такой порядок $\preceq$, что $(A, \preceq)$ в.у.м.

Упражнение. Отношение "быть изоморфным" является отношением эквивалентности на классе всех вполне упорядоченных множеств.

Определение

Ординалом или ординальным числом называется класс разбиения относительно отношения "быть изоморфным" для в.у.м.

Упражнение. Отношение "быть изоморфным" является отношением эквивалентности на классе всех вполне упорядоченных множеств.

Определение

Ординалом или ординальным числом называется класс разбиения относительно отношения "быть изоморфным" для в.у.м.

Цепи $(\mathbb{N}, \leq)$ соответствует ординальное число ω, т.е. $Ord(\mathbb{N}) = \omega$.

Ординальная сумма

Определение

Пусть $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ — два в.у.м. $(A \cap B = \emptyset)$ с $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда ординальной суммой называется $(C = A \cup B, \leq)$, где

$$c_1 \leq c_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \leq_1 c_2 & c_1, c_2 \in A \\ c_1 \in A, & c_2 \in B \\ c_1 \leq_2 c_2, & c_1, c_2 \in B \end{cases}$$

Этой ординальной сумме соответствует ординальное число $\alpha + \beta$.

Ординальная сумма

Определение

Пусть $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ — два в.у.м. $(A \cap B = \emptyset)$ с $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда ординальной суммой называется $(C = A \cup B, \leq)$, где

$$c_1 \leq c_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \leq_1 c_2 & c_1, c_2 \in A \\ c_1 \in A, & c_2 \in B \\ c_1 \leq_2 c_2, & c_1, c_2 \in B \end{cases}$$

Этой ординальной сумме соответствует ординальное число $\alpha + \beta$.

Пример

Для конечных ч.у.м. $n + m = m + n$. Однако $\omega + 1 \neq 1 + \omega = \omega$.

Ординальное произведение

Определение

Ординальным произведением в.у.м. $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ с $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$ называется $(C = A \times B, \leq)$, где

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, & b_1 \leq_2 b_2 \\ a_1 <_1 a_2 \end{cases}$$

Ординальное число $\alpha \cdot \beta$

Ординальное произведение

Определение

Ординальным произведением в.у.м. $(A, \leq_1), (B, \leq_2)$ с $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$ называется $(C = A \times B, \leq)$, где

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2, & b_1 \leq_2 b_2 \\ a_1 <_1 a_2 \end{cases}$$

Ординальное число $\alpha \cdot \beta$

Пример

$\omega = 2\omega \neq \omega \cdot 2$

Итак, если $(A, \leq_1)$, $(B, \leq_2)$ — в.у.м., то если $Card(A) = Card(B)$, то вообще говоря не обязательно $Ord(A) = Ord(B)$. Обратное верно: $Ord(A) = Ord(B) \Rightarrow Card(A) = Card(B)$.

Итак, если $(A, \leq_1)$, $(B, \leq_2)$ — в.у.м., то если $Card(A) = Card(B)$, то вообще говоря не обязательно $Ord(A) = Ord(B)$. Обратное верно: $Ord(A) = Ord(B) \Rightarrow Card(A) = Card(B)$.

Определение

Пусть $(A, \leq)$ — в.у.м., $v \in A$. Тогда множество $A(v) = \{x \in A \mid x < v\}$ назовем отрезком множества A.

Итак, если $(A, \leq_1)$, $(B, \leq_2)$ — в.у.м., то если $Card(A) = Card(B)$, то вообще говоря не обязательно $Ord(A) = Ord(B)$. Обратное верно: $Ord(A) = Ord(B) \Rightarrow Card(A) = Card(B)$.

Определение

Пусть $(A, \leq)$ — в.у.м., $v \in A$. Тогда множество $A(v) = \{x \in A \mid x < v\}$ назовем **отрезком** множества A.

Лемма 1

В.у.м. не изоморфен никакому своему собственному отрезку.

Доказательство леммы 1

От противного. Пусть $(A, \leq)$ — в.у.м. такой, что существует $c \in A \quad A \cong A(c)$. По определению это означает, что существует монотонная биекция $f : A \to A(c)$.

Доказательство леммы 1

От противного. Пусть $(A, \leq)$ — в.у.м. такой, что существует $c \in A \quad A \cong A(c)$. По определению это означает, что существует монотонная биекция $f \colon A \to A(c)$.
Рассмотрим множество $B = \{x \in A \mid f(x) < x\}$. Оно непусто, так как $c \in B$.

Доказательство леммы 1

От противного. Пусть $(A, \leq)$ — в.у.м. такой, что существует $c \in A \quad A \cong A(c)$. По определению это означает, что существует монотонная биекция $f : A \to A(c)$.
Рассмотрим множество $B = \{x \in A \mid f(x) < x\}$. Оно непусто, так как $c \in B$. Пусть $d = \min B$, тогда $f(d) < d$. Так как d — минимум, то $f(d) \notin B$. С другой стороны, так как f — изоморфизм, то $f(d) < d \Rightarrow f(f(d)) < f(d)$, откуда $f(d) \in B$.

Порядок на множестве ординалов

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B.

Порядок на множестве ординалов

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B.

Лемма 2

Пусть $W(\beta) = \{\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Тогда $(W(\beta), \leq)$ — в.у.м. и $Ord(W(\beta)) = \beta$

Порядок на множестве ординалов

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B.

Лемма 2

Пусть $W(\beta) = \{\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Тогда $(W(\beta), \leq)$ — в.у.м. и $Ord(W(\beta)) = \beta$

Так как α, β — ординальные числа, то существуют в.у.м. $Ord(A) = \alpha < \beta$, $Ord(B) = \beta$. По определению существует $c_\alpha \in B$ такой, что $B(c_\alpha) \cong A$.

Порядок на множестве ординалов

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B.

Лемма 2

Пусть $W(\beta) = \{\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Тогда $(W(\beta), \leq)$ — в.у.м. и $Ord(W(\beta)) = \beta$

Так как α, β — ординальные числа, то существуют в.у.м. $Ord(A) = \alpha < \beta$, $Ord(B) = \beta$. По определению существует $c_\alpha \in B$ такой, что $B(c_\alpha) \cong A$. Рассмотрим отображение $f : \alpha \to c_\alpha$.

Порядок на множестве ординалов

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B.

Лемма 2

Пусть $W(\beta) = \{\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Тогда $(W(\beta), \leq)$ — в.у.м. и $Ord(W(\beta)) = \beta$

Так как α, β — ординальные числа, то существуют в.у.м. $Ord(A) = \alpha < \beta$, $Ord(B) = \beta$. По определению существует $c_\alpha \in B$ такой, что $B(c_\alpha) \cong A$. Рассмотрим отображение $f : \alpha \to c_\alpha$. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta$. Тогда $c_{\alpha_1} < c_{\alpha_2}$.

Порядок на множестве ординалов

Определение

Пусть A, B — в.у.м., $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Тогда $\alpha \leq \beta$ тогда и только тогда, когда A изоморфно некоторому отрезку B.

Лемма 2

Пусть $W(\beta) = \{\alpha \mid \alpha < \beta\}$. Тогда $(W(\beta), \leq)$ — в.у.м. и $Ord(W(\beta)) = \beta$

Так как α, β — ординальные числа, то существуют в.у.м. $Ord(A) = \alpha < \beta$, $Ord(B) = \beta$. По определению существует $c_\alpha \in B$ такой, что $B(c_\alpha) \cong A$. Рассмотрим отображение $f : \alpha \to c_\alpha$. Пусть $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta$. Тогда $c_{\alpha_1} < c_{\alpha_2}$. По лемме 1 в.у.м. не может быть изоморфен никакому своему отрезку, поэтому $\forall c \in B \quad Ord(B(c)) < \beta$. Следовательно, отображение f — является биекцией.

Ординалы образуют цепь

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Ординалы образуют цепь

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.

Ординалы образуют цепь

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.
Рассмотрим $C = W(\alpha) \cap W(\beta)$, пусть $\gamma = Ord(C)$.

Ординалы образуют цепь

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.
Рассмотрим $C = W(\alpha) \cap W(\beta)$, пусть $\gamma = Ord(C)$.
Покажем, что C — отрезок в $W(\alpha)$. Пусть $d = \min W(\alpha) \setminus C$, тогда $\forall y \in W(\alpha)$ если $y < d$, то $y \in C$. Следовательно, $C = W(\alpha)(d)$.
Аналогично, C является отрезком в $W(\beta)$.

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.
Рассмотрим $C = W(\alpha) \cap W(\beta)$, пусть $\gamma = Ord(C)$.
Покажем, что C — отрезок в $W(\alpha)$. Пусть $d = \min W(\alpha) \setminus C$, тогда $\forall y \in W(\alpha)$ если $y < d$, то $y \in C$. Следовательно, $C = W(\alpha)(d)$.
Аналогично, C является отрезком в $W(\beta)$. Мы показали, что $\gamma \leq \alpha$ и $\gamma \leq \beta$. Следовательно, $\gamma \in C$.

Ординалы образуют цепь

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.
Рассмотрим $C = W(\alpha) \cap W(\beta)$, пусть $\gamma = Ord(C)$.
Покажем, что C — отрезок в $W(\alpha)$. Пусть $d = \min W(\alpha) \setminus C$, тогда $\forall y \in W(\alpha)$ если $y < d$, то $y \in C$. Следовательно, $C = W(\alpha)(d)$.
Аналогично, C является отрезком в $W(\beta)$. Мы показали, что $\gamma \leq \alpha$ и $\gamma \leq \beta$. Следовательно, $\gamma \in C$.
Пусть $\gamma < \alpha, \beta$, тогда $W(\gamma) = C(\gamma) \subset C$.

Ординалы образуют цепь

Теорема

Порядок на множестве всех ординальных чисел является линейным.

Пусть $Ord(A) = \alpha$, $Ord(B) = \beta$. Покажем, что либо $\alpha \leq \beta$, либо $\beta \leq \alpha$.
Рассмотрим $C = W(\alpha) \cap W(\beta)$, пусть $\gamma = Ord(C)$.
Покажем, что C — отрезок в $W(\alpha)$. Пусть $d = \min W(\alpha) \setminus C$, тогда $\forall y \in W(\alpha)$ если $y < d$, то $y \in C$. Следовательно, $C = W(\alpha)(d)$.
Аналогично, C является отрезком в $W(\beta)$. Мы показали, что $\gamma \leq \alpha$ и $\gamma \leq \beta$. Следовательно, $\gamma \in C$.
Пусть $\gamma < \alpha, \beta$, тогда $W(\gamma) = C(\gamma) \subset C$. Следовательно, $\gamma = Ord(W(\gamma)) < Ord(C) = \gamma$. Откуда $\gamma = \alpha$ и $\alpha < \beta$, либо $\gamma = \beta$ и тогда $\beta < \alpha$.