Отношения частичного порядка. Индукция на ч.у.м.

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

3 сентября 2020 г.

Определение

Отношение $\leq$ на множестве M называется отношением частичного порядка. Тогда пара $(M, \leq)$ называется частично упорядоченным множеством (ч.у.м.).

Если $x \leq y$, то будем говорить, что x и y сравнимы. Если x и y несравнимы, то пишут $x \not\leq y$. Договоримся также, что $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ и $x \neq y$

Определения

Определение

Отношение $\leq$ на множестве M называется отношением частичного порядка. Тогда пара $(M, \leq)$ называется частично упорядоченным множеством (ч.у.м.).

Если $x \leq y$, то будем говорить, что x и y сравнимы. Если x и y несравнимы, то пишут $x \nleq y$. Договоримся также, что $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ и $x \neq y$

Отношение $\leq$ — это не то же отношение "меньше или равно" как на множестве чисел, а произвольное отношение порядка. Это просто обозначение!

Определения

Определение

Отношение $\leq$ на множестве M называется отношением частичного порядка. Тогда пара $(M, \leq)$ называется частично упорядоченным множеством (ч.у.м.).

Если $x \leq y$, то будем говорить, что x и y сравнимы. Если x и y несравнимы, то пишут $x \not\leq y$. Договоримся также, что $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ и $x \neq y$

Отношение $\leq$ — это не то же отношение "меньше или равно" как на множестве чисел, а произвольное отношение порядка. Это просто обозначение!

В частности, это означает, что $x \not\leq y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < x \\ x \text{ и } y \text{ несравнимы} \end{array}\right.$

Определение

Отношение $\leq$ на множестве M называется отношением частичного порядка. Тогда пара $(M, \leq)$ называется частично упорядоченным множеством (ч.у.м.).

Если $x \leq y$, то будем говорить, что x и y сравнимы. Если x и y несравнимы, то пишут $x \nleq y$. Договоримся также, что
$x < y \Leftrightarrow x \leq y$ и $x \neq y$

Определение

Отношение частичного порядка $\leq$ на множестве M называется отношением линейного порядка, если $\forall x, y \in M \quad x \leq y$ или $y \leq x$. Тогда $(M, \leq)$ называется линейно упорядоченным множеством или цепью.

Примеры отношений частичного порядка

- Отношение $\leq_1 = \leq$ на множестве действительных чисел;

Примеры отношений частичного порядка

- Отношение $\leq_1 = \leq$ на множестве действительных чисел;
- Отношение $\leq_2 = \mid$ делимости на множестве натуральных чисел. $x \mid y \Leftrightarrow x$ делит y;

Примеры отношений частичного порядка

- Отношение $\leq_1 = \leq$ на множестве действительных чисел;
- Отношение $\leq_2 = \mid$ делимости на множестве натуральных чисел. $x \mid y \Leftrightarrow x$ делит y;
- Отношение $\leq_3 = \subseteq$ на множестве $\mathcal{B}(A)$;

Примеры отношений частичного порядка

- Отношение $\leq_1 = \leq$ на множестве действительных чисел;
- Отношение $\leq_2 = \mid$ делимости на множестве натуральных чисел. $x \mid y \Leftrightarrow x$ делит y;
- Отношение $\leq_3 = \subseteq$ на множестве $\mathcal{B}(A)$;
- Отношение $\leq_4$ на множестве слов русского (или любого другого) языка, которое соответствует порядку слов в словаре и называется лексикографическим порядком;

Примеры отношений частичного порядка

- Отношение $\leq_1 = \leq$ на множестве действительных чисел;
- Отношение $\leq_2 = \mid$ делимости на множестве натуральных чисел. $x \mid y \Leftrightarrow x$ делит y;
- Отношение $\leq_3 = \subseteq$ на множестве $\mathcal{B}(A)$;
- Отношение $\leq_4$ на множестве слов русского (или любого другого) языка, которое соответствует порядку слов в словаре и называется лексикографическим порядком;
- Отношение $\leq_5$ на множестве $\{0, 1\}^n$, которое задается по правилу:
  $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq_5 (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_i \leq b_i$, где $i = 1 \ldots n$

Примеры отношений частичного порядка

- Отношение $\leq_1 = \leq$ на множестве действительных чисел;
- Отношение $\leq_2 = \mid$ делимости на множестве натуральных чисел. $x \mid y \Leftrightarrow x$ делит y;
- Отношение $\leq_3 = \subseteq$ на множестве $\mathcal{B}(A)$;
- Отношение $\leq_4$ на множестве слов русского (или любого другого) языка, которое соответствует порядку слов в словаре и называется лексикографическим порядком;
- Отношение $\leq_5$ на множестве $\{0,1\}^n$, которое задается по правилу:
  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_5 (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_i \leq b_i$, где $i = 1 \dots n$

Линейными будут отношения $\leq_1, \leq_4$

Декартово произведение ч.у.м.

Определение

Пусть $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$ — два ч.у.м. Их декартовым произведением называется ч.у.м. $(A, \leq)$, где $A = A_1 \times A_2$ и

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq_1 a_2 \text{ и } b_1 \leq_2 b_2.$$

Обозначение $(A, \leq) = (A_1, \leq_1) \times (A_2, \leq_2)$.

Декартово произведение ч.у.м.

Определение

Пусть $(A_1, \leq_1)$, $(A_2, \leq_2)$ — два ч.у.м. Их декартовым произведением называется ч.у.м. $(A, \leq)$, где $A = A_1 \times A_2$ и

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq_1 a_2 \text{ и } b_1 \leq_2 b_2.$$

Обозначение $(A, \leq) = (A_1, \leq_1) \times (A_2, \leq_2)$.

Упражнение. Докажите, что $(A, \leq)$ действительно является ч.у.м. Убедитесь, что ч.у.м. из четвертого примера равен $(\{0, 1\}, \leq)^n$, где $\leq$ — обычное отношение "меньше или равно" на множестве чисел $\{0, 1\}$.

Диаграммы Хассе

Определение

Пусть $(M, \leq)$ — ч.у.м., $x, y \in M$. Будем говорить, что y покрывает x, и писать $x \prec y$ в том случае, когда $x \leq y$ и если $x \leq z \leq y$, то $z = x$ или $z = y$.

Диаграммы Хассе

Определение

Пусть $(M, \leq)$ — ч.у.м., $x, y \in M$. Будем говорить, что y покрывает x, и писать $x \prec y$ в том случае, когда $x \leq y$ и если $x \leq z \leq y$, то $z = x$ или $z = y$.

Ч.у.м. делителей 60

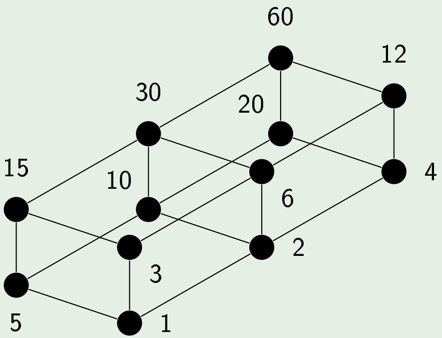
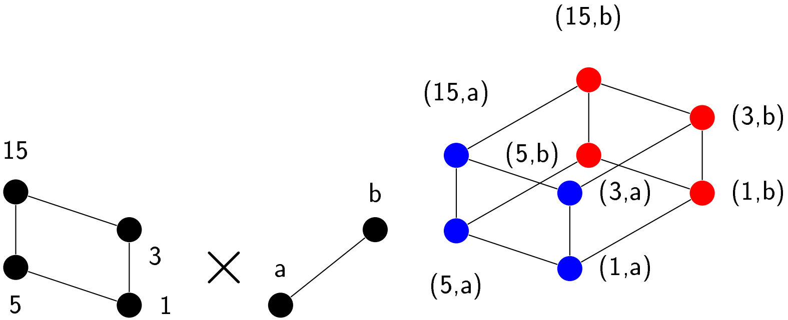


Диаграмма Хассе для декартового произведения ч.у.м.



Наименьший и минимальный элементы в ч.у.м.

Определения

Пусть $(M, \leq)$ — ч.у.м.

Наименьший и минимальный элементы в ч.у.м.

Определения

Пусть $(M, \leq)$ — ч.у.м.

- Элемент $m \in M$ называется минимальным элементном в M, если
$$\forall x \in M \quad x \leq m \Rightarrow x = m;$$

Наименьший и минимальный элементы в ч.у.м.

Определения

Пусть $(M, \leq)$ — ч.у.м.

- Элемент $m \in M$ называется **минимальным** элементном в M, если
$$\forall x \in M \quad x \leq m \Rightarrow x = m;$$
- Элемент $a \in M$ называется **наименьшим** элементом в M, если
$$\forall x \in M \quad a \leq x.$$

Наименьший и минимальный элементы в ч.у.м.

Определения

Пусть $(M, \leq)$ — ч.у.м.

- Элемент $m \in M$ называется **минимальным** элементном в M, если
$$\forall x \in M \quad x \leq m \Rightarrow x = m;$$
- Элемент $a \in M$ называется **наименьшим** элементом в M, если
$$\forall x \in M \quad a \leq x.$$

Аналогично вводятся понятия максимального и наибольшего элементов.

Наименьший и минимальный элементы в ч.у.м.

Лемма 1

1. Если элемент наименьший, то он является минимальным;
2. В любом ч.у.м., если существует наименьший элемент, то он единственный;
3. В конечном ч.у.м. существует хотя бы один минимальный элемент;
4. В конечном ч.у.м. если минимальный элемент единственный, то он является наименьшим.

Наименьший и минимальный элементы в ч.у.м.

Лемма 1

1. Если элемент наименьший, то он является минимальным;
2. В любом ч.у.м., если существует наименьший элемент, то он единственный;
3. В конечном ч.у.м. существует хотя бы один минимальный элемент;
4. В конечном ч.у.м. если минимальный элемент единственный, то он является наименьшим.

Упражнение. Приведите пример ч.у.м., в котором есть единственный минимальный элемент, который не является наименьшим.

Наименьший и минимальный элементы в ч.у.м.

Лемма 1

1. Если элемент наименьший, то он является минимальным;
2. В любом ч.у.м., если существует наименьший элемент, то он единственный;
3. В конечном ч.у.м. существует хотя бы один минимальный элемент;
4. В конечном ч.у.м. если минимальный элемент единственный, то он является наименьшим.

Определение

Пусть $(A, \leq)$ — ч.у.м., $B \subseteq A$. Тогда элемент $b_1 \quad (b_2)$ называется верхней (нижней) гранью множества B, если
$\forall x \in B \quad x \leq b_1 \quad (x \geq b_2)$. Обозначение $B \leq b_1 \quad (B \geq b_2)$.

Договоримся, что $\emptyset \leq a \quad \forall a \in A$. Заметим, что верхних или нижних граней может быть несколько и они не обязательно принадлежат B.

Метод математической индукции для $\mathbb{N}$
Пусть $P(n)$ — некоторое утверждение, которое в зависимости от $n \in \mathbb{N}$ принимает значение "истина" или "ложь", т.е. $P(n)$ называется предикатом на множестве $\mathbb{N}$.
Б.и. $P(1)$ истинно;
Ш.и. Если $P(n)$ истинно для всех $n < k$, то $P(k)$ — истинно.
Отсюда следует, что $P(n)$ истинно $\forall n \in \mathbb{N}$

Метод математической индукции для $(\mathbb{N}, \leq)$
Пусть $P(n)$ — некоторое утверждение, которое в зависимости от $n \in \mathbb{N}$ принимает значение "истина" или "ложь", т.е. $P(n)$ называется предикатом на множестве $\mathbb{N}$.
Б.и. $P(1)$ истинно 1 – минимальный элемент в $\mathbb{N}$;
Ш.и. Если $P(n)$ истинно для всех $n < k$, то $P(k)$ — истинно.
Отсюда следует, что $P(n)$ истинно $\forall n \in \mathbb{N}$

Условие индуктивности

Условие индуктивности для ч.у.м. $(A, \leq)$

Пусть $P(x)$ — предикат на множестве A, т.е. функция
$P : A \to \{$ И, Л $\}$

Условие индуктивности для ч.у.м. $(A, \leq)$

Пусть $P(x)$ — предикат на множестве A, т.е. функция $P : A \to \{$ И, Л $\}$

(U1) Для всех минимальных элементов $a \in A \quad P(a)$ — И;

Условие индуктивности для ч.у.м. $(A, \leq)$

Пусть $P(x)$ — предикат на множестве A, т.е. функция $P : A \to \{$ И, Л $\}$

(U1) Для всех минимальных элементов $a \in A \quad P(a)$ — И;

(U2) Пусть $b \in A$. Если $\forall x < b \quad P(x)$ — И, то $P(b)$ — И

Условие индуктивности для ч.у.м. $(A, \leq)$

Пусть $P(x)$ — предикат на множестве A, т.е. функция $P : A \to \{$ И, Л $\}$

(U1) Для всех минимальных элементов $a \in A \quad P(a)$ — И;

(U2) Пусть $b \in A$. Если $\forall x < b \quad P(x)$ — И, то $P(b)$ — И

(U3) $\forall b \in A \quad P(b)$ — И.

Условие индуктивности для ч.у.м. $(A, \leq)$

Пусть $P(x)$ — предикат на множестве A, т.е. функция $P : A \to \{$ И, Л $\}$

(U1) Для всех минимальных элементов $a \in A \quad P(a)$ — И;

(U2) Пусть $b \in A$. Если $\forall x < b \quad P(x)$ — И, то $P(b)$ — И

(U3) $\forall b \in A \quad P(b)$ — И.

Говорят, что ч.у.м. $(A, \leq)$ удовлетворяет условию индуктивности, если $(U1)$ и $(U2) \Rightarrow (U3)$.

Условие индуктивности для ч.у.м. $(A, \leq)$

(U1) Для всех минимальных элементов $a \in A \quad P(a)$ — И;

(U2) Пусть $b \in A$. Если $\forall x < b \quad P(x)$ — И, то $P(b)$ — И

(U3) $\forall b \in A \quad P(b)$ — И.

Говорят, что ч.у.м. $(A, \leq)$ удовлетворяет **условию индуктивности**, если $(U1)$ и $(U2) \Rightarrow (U3)$.

Не всякий ч.у.м. удовлетворяет условию индуктивности. Рассмотрим $(\mathcal{B}(\mathbb{N}), \subseteq)$ и предикат $P(X)$ принимает значение "истина" тогда и только тогда, когда множество X — конечно.
Так как в $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ только один минимальный элемент $\emptyset$, который является конечным множеством, то условие $(U1)$ выполняется.
Рассмотрим произвольное множество $B \subseteq \mathbb{N}$ со свойством: все его подмножества конечны, очевидно, что само B тоже конечно.
Следовательно, выполняется условие $(U2)$.
Однако очевидно, что не всякое подмножество множества $\mathbb{N}$ конечно, поэтому $(U1)$ и $(U2) \not\Rightarrow (U3)$ и условие индуктивности не выполняется.

Условие минимальности

Говорят, что ч.у.м. $(A, \leq)$ удовлетворяет условию минимальности, если для любого непустого подмножества $B \subseteq A$ в множестве B есть минимальный элемент.

Условия минимальности и обрыва убывающих цепей

Условие минимальности

Говорят, что ч.у.м. $(A, \leq)$ удовлетворяет условию минимальности, если для любого непустого подмножества $B \subseteq A$ в множестве B есть минимальный элемент.

Условие обрыва убывающих цепей

Говорят, что ч.у.м. $(A, \leq)$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей, если для любой цепи $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ существует такое число k, что $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots$

Условие минимальности

Говорят, что ч.у.м. $(A, \leq)$ удовлетворяет условию минимальности, если для любого непустого подмножества $B \subseteq A$ в множестве B есть минимальный элемент.

Условие обрыва убывающих цепей

Говорят, что ч.у.м. $(A, \leq)$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей, если для любой цепи $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ существует такое число k, что $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots$

Теорема 1

Для любого ч.у.м. условия минимальности (1), индуктивности (2) и обрыва убывающих цепей (3) эквивалентны.

Условие минимальности

Говорят, что ч.у.м. $(A, \leq)$ удовлетворяет условию минимальности, если для любого непустого подмножества $B \subseteq A$ в множестве B есть минимальный элемент.

Условие обрыва убывающих цепей

Говорят, что ч.у.м. $(A, \leq)$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей, если для любой цепи $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ существует такое число k, что $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots$

Теорема 1

Для любого ч.у.м. условия минимальности (1), индуктивности (2) и обрыва убывающих цепей (3) эквивалентны.

Схема доказательства: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2)

Пусть в ч.у.м. $(A, \leq)$ выполняется условие минимальности (в любом непустом подмножестве есть минимальный элемент). Покажем, что для некоторого предиката $P(a)$ $\quad (U1)$ и $(U2) \Rightarrow (U3)$, т.е. выполняются база и предположение индукции и нужно показать, что предикат принимает значение истина на всем множестве A.

Доказательство $(1) \Rightarrow (2)$

Пусть в ч.у.м. $(A, \leq)$ выполняется условие минимальности (в любом непустом подмножестве есть минимальный элемент). Покажем, что для некоторого предиката $P(a)$ $\quad (U1)$ и $(U2) \Rightarrow (U3)$, т.е. выполняются база и предположение индукции и нужно показать, что предикат принимает значение истина на всем множестве A.

Докажем от противного. Пусть B множество всех элементов множества A, для которых P ложен. Множество B непусто и не совпадает с A, так как для минимальных элементов A предикат истинен. Тогда по условию минимальности в B есть минимальный элемент b, который не является минимальным в A.

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2)

Пусть в ч.у.м. $(A, \leq)$ выполняется условие минимальности (в любом непустом подмножестве есть минимальный элемент). Покажем, что для некоторого предиката $P(a)$ $(U1)$ и $(U2) \Rightarrow (U3)$, т.е. выполняются база и предположение индукции и нужно показать, что предикат принимает значение истина на всем множестве A. Докажем от противного. Пусть B множество всех элементов множества A, для которых P ложен. Множество B непусто и не совпадает с A, так как для минимальных элементов A предикат истинен. Тогда по условию минимальности в B есть минимальный элемент b, который не является минимальным в A. Тогда для любого $x < b$ $P(x)$ истинно. Следовательно, по условию $(U2)$ значение $P(b)$ тоже истинно, противоречие.

Доказательство (2) $\Rightarrow$ (3)

Предположим, что в ч.у.м. $(A, \leq)$ можно применять индукцию. Докажем, что в A любая убывающая цепь обрывается.

Доказательство (2) $\Rightarrow$ (3)

Предположим, что в ч.у.м. $(A, \leq)$ можно применять индукцию. Докажем, что в A любая убывающая цепь обрывается. Рассмотрим на A предикат $P(x)$, который истинен тогда и только тогда, когда любая убывающая цепь, начинающаяся с x, обрывается.

Доказательство (2) $\Rightarrow$ (3)

Предположим, что в ч.у.м. $(A, \leq)$ можно применять индукцию. Докажем, что в A любая убывающая цепь обрывается. Рассмотрим на A предикат $P(x)$, который истинен тогда и только тогда, когда любая убывающая цепь, начинающаяся с x, обрывается. Пусть a — минимальный элемент в A, тогда любая убывающая цепь состоит только из a и обрывается. Следовательно, выполняется $(U1)$.

Доказательство (2) $\Rightarrow$ (3)

Предположим, что в ч.у.м. $(A, \leq)$ можно применять индукцию. Докажем, что в A любая убывающая цепь обрывается. Рассмотрим на A предикат $P(x)$, который истинен тогда и только тогда, когда любая убывающая цепь, начинающаяся с x, обрывается. Пусть a — минимальный элемент в A, тогда любая убывающая цепь состоит только из a и обрывается. Следовательно, выполняется $(U1)$. Пусть $b \in A$, рассмотрим произвольную убывающую цепь $b \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \ldots$. Можно считать, что в этой цепи есть элемент a_s, который строго меньше чем b. Но все убывающие цепи, которые начинаются с a_s обрываются по предположению индукции, следовательно, обрывается и исходная цепь. Условие $(U2)$ доказано.

Доказательство (2) $\Rightarrow$ (3)

Предположим, что в ч.у.м. $(A, \leq)$ можно применять индукцию. Докажем, что в A любая убывающая цепь обрывается. Рассмотрим на A предикат $P(x)$, который истинен тогда и только тогда, когда любая убывающая цепь, начинающаяся с x, обрывается. Пусть a — минимальный элемент в A, тогда любая убывающая цепь состоит только из a и обрывается. Следовательно, выполняется $(U1)$. Пусть $b \in A$, рассмотрим произвольную убывающую цепь $b \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots$. Можно считать, что в этой цепи есть элемент a_s, который строго меньше чем b. Но все убывающие цепи, которые начинаются с a_s обрываются по предположению индукции, следовательно, обрывается и исходная цепь. Условие $(U2)$ доказано. Следовательно, любая цепь, которая начинается с любого элемента множества A, обрывается.

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1)

Предположим, что в ч.у.м. $(A, \leq)$ любая убывающая цепь обрывается. Докажем, что в любом непустом подмножестве B множества A есть минимальный элемент.

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1)

Предположим, что в ч.у.м. $(A, \leq)$ любая убывающая цепь обрывается. Докажем, что в любом непустом подмножестве B множества A есть минимальный элемент.
Возьмем произвольный элемент $a_1 \in B$. Если он не минимальный, то существует $a_2 < a_1$. Если этот a_2 не минимальный, то существует $a_3 < a_2$. Продолжаем процесс и получим убывающую цепь $a_1 > a_2 > a_3 \ldots$, которая должна оборваться. То есть в множестве B есть минимальный элемент.

Вполне упорядоченные множества

Определение

Цепь с условием минимальности называется вполне упорядоченным множеством (в.у.м.)

Вполне упорядоченные множества

Определение

Цепь с условием минимальности называется **вполне упорядоченным множеством (в.у.м.)**

Теорема (Цермело)

Пусть A — непустое множество. Тогда на множестве A существует такой порядок $\preceq$, что $(A, \preceq)$ в.у.м.