Бинарные отношения и их свойства

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

1 сентября 2020 г.

Определение

Бинарным отношением на множестве M называется произвольное подмножество $M^2 = M \times M$.

Бинарные отношения на множестве

Определение

Бинарным отношением на множестве M называется произвольное подмножество $M^2 = M \times M$.

Обозначения

- Δ — бинарное отношение равное $M \times M$;
- $Id_M = \{(x, x) \mid x \in M\}$ — отношение равенства на множестве M.

Операции над бинарными отношениями

Операции над бинарными отношениями

- Из определения следует, что бинарные отношения ρ_1, ρ_2 на множестве M являются бинарными соответствиями между M и M, поэтому определены $\rho_1 \circ \rho_2$, ρ^{-1}.

Операции над бинарными отношениями

Операции над бинарными отношениями

- Из определения следует, что бинарные отношения ρ_1, ρ_2 на множестве M являются бинарными соответствиями между M и M, поэтому определены $\rho_1 \circ \rho_2$, ρ^{-1}.
- Из определения следует, что всякое бинарное отношение является множеством, поэтому для произвольных бинарных отношений $\rho_1, \rho_2 \subseteq M^2$ определены $\rho_1 \cap \rho_2$ и $\rho_1 \cup \rho_2$, а также $\overline{\rho} = \Delta \setminus \rho$.

Операции над бинарными отношениями

- Из определения следует, что бинарные отношения ρ_1, ρ_2 на множестве M являются бинарными соответствиями между M и M, поэтому определены $\rho_1 \circ \rho_2$, ρ^{-1}.
- Из определения следует, что всякое бинарное отношение является множеством, поэтому для произвольных бинарных отношений $\rho_1, \rho_2 \subseteq M^2$ определены $\rho_1 \cap \rho_2$ и $\rho_1 \cup \rho_2$, а также $\overline{\rho} = \Delta \setminus \rho$.

Также $\rho_1 \subseteq \rho_2$, если для любых $x, y \in M$ таких, что $x\ \rho_1\ y$, выполняется $x\ \rho_2\ y$.

Свойства бинарных отношений

Определения

- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ рефлексивно, если $\forall x \in M \quad x \; \rho \; x$;

Определения

- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ рефлексивно, если $\forall x \in M \quad x \ \rho \ x$;
- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ симметрично, если $\forall x, y \in M \quad [x \ \rho \ y \Leftrightarrow y \ \rho \ x]$;

Свойства бинарных отношений

Определения

- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ рефлексивно, если $\forall x \in M \quad x\ \rho\ x$;
- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ симметрично, если $\forall x, y \in M \quad [x\ \rho\ y \Leftrightarrow y\ \rho\ x]$;
- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ антисимметрично, если $\forall x, y \in M \quad [x\ \rho\ y \text{ и } y\ \rho\ x] \Rightarrow x = y$;

Свойства бинарных отношений

Определения

- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ рефлексивно, если $\forall x \in M \quad x\ \rho\ x$;
- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ симметрично, если $\forall x, y \in M \quad [x\ \rho\ y \Leftrightarrow y\ \rho\ x]$;
- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ антисимметрично, если $\forall x, y \in M \quad [x\ \rho\ y \text{ и } y\ \rho\ x] \Rightarrow x = y$;
- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ транзитивно, если $\forall x, y, z \in M \quad [x\ \rho\ y \text{ и } y\ \rho\ z] \Rightarrow x\ \rho\ z$.

Свойства бинарных отношений

Определения

- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ **рефлексивно**, если $\forall x \in M \quad x \ \rho \ x$;
- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ **симметрично**, если $\forall x, y \in M \quad [x \ \rho \ y \Leftrightarrow y \ \rho \ x]$;
- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ **антисимметрично**, если $\forall x, y \in M \quad [x \ \rho \ y \text{ и } y \ \rho \ x] \Rightarrow x = y$;
- Бинарное отношение $\rho \subseteq M^2$ **транзитивно**, если $\forall x, y, z \in M \quad [x \ \rho \ y \text{ и } y \ \rho \ z] \Rightarrow x \ \rho \ z$.

Определения

- Бинарное отношение называется **отношением эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- Бинарное отношение называется **отношением частичного порядка**, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Пример

Рассмотрим следующие бинарные отношения на множестве M:

1. $M = \mathbb{N}$, где $x \ \rho_1 \ y \Leftrightarrow x - y \ \vdots \ 4$;
2. $M = [0; 4]$, где $x \ \rho_2 \ y \Leftrightarrow 2x + 1 < y$.

Пример

Рассмотрим следующие бинарные отношения на множестве M:

1. $M = \mathbb{N}$, где $x\ \rho_1\ y \Leftrightarrow x - y \ \vdots\ 4$;
2. $M = [0;4]$, где $x\ \rho_2\ y \Leftrightarrow 2x + 1 < y$.

	Р	С	А	Т
ρ_1	+	+	-	+
ρ_2	-	-	+	+

Отношения эквивалентности

Определение

Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M, тогда классом эквивалентности элемента $x \in M$ называется множество элементов из M, которые состоят с x в отношении ρ, т.е. $[x]_\rho = \{y \in M \mid x \; \rho \; y\}$.

Отношения эквивалентности

Определение

Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M, тогда **классом эквивалентности** элемента $x \in M$ называется множество элементов из M, которые состоят с x в отношении ρ, т.е. $[x]_\rho = \{y \in M \mid x \ \rho \ y\}$.

Элемент x всегда лежит в $[x]_\rho$ в силу рефлексивности ρ.

Определение

Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M, тогда **классом эквивалентности** элемента $x \in M$ называется множество элементов из M, которые состоят с x в отношении ρ, т.е. $[x]_\rho = \{y \in M \mid x \ \rho \ y\}$.

Элемент x всегда лежит в $[x]_\rho$ в силу рефлексивности ρ.

Определение

Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M, тогда множество классов эквивалентности называется **фактор-множеством** и обозначается M/ρ.

Разбиения и классы эквивалентности

Определение

Пусть A — непустое множество. Семейство его непустых подмножеств $\{A_i\}_{i \in I}$ называется разбиением множества A, если

1. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$;
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Разбиения и классы эквивалентности

Определение

Пусть A — непустое множество. Семейство его непустых подмножеств $\{A_i\}_{i\in I}$ называется разбиением множества A, если

1. $\bigcup_{i\in I} A_i = A$;
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Теорема

Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M, тогда множество его классов эквивалентности образует разбиение множества M. И обратно, если есть разбиение $\{M_i\}_{i\in I}$ множества M, то существует такое отношение эквивалентности на множестве M, для которого множества $\{M_i\}_{i\in I}$ будут в точности классами эквивалентности.

Доказательство теоремы

Сначала докажем первую часть. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M.

Доказательство теоремы

Сначала докажем первую часть. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M.

1. Покажем, что $\bigcup_{x \in M} [x]_\rho = M$.

Сначала докажем первую часть. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M.

1 Покажем, что $\bigcup_{x\in M}[x]_\rho = M$. Так как $[x]_\rho \subseteq M$, то $\bigcup_{x\in M}[x]_\rho \subseteq M$.

Доказательство теоремы

Сначала докажем первую часть. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M.

1. Покажем, что $\bigcup_{x\in M}[x]_\rho = M$. Так как $[x]_\rho \subseteq M$, то $\bigcup_{x\in M}[x]_\rho \subseteq M$. Для любого $y \in M$ есть класс эквивалентности $[y]_\rho$, в котором этот элемент лежит, поэтому $\bigcup_{x\in M}[x]_\rho \supseteq M$.

Сначала докажем первую часть. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M.

1. Покажем, что $\bigcup_{x\in M}[x]_\rho = M$. Так как $[x]_\rho \subseteq M$, то $\bigcup_{x\in M}[x]_\rho \subseteq M$. Для любого $y \in M$ есть класс эквивалентности $[y]_\rho$, в котором этот элемент лежит, поэтому $\bigcup_{x\in M}[x]_\rho \supseteq M$.
2. Покажем, что если два класса имеют непустое пересечение, то они совпадают.

Доказательство теоремы

Сначала докажем первую часть. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M.

1. Покажем, что $\bigcup_{x\in M}[x]_\rho = M$. Так как $[x]_\rho \subseteq M$, то $\bigcup_{x\in M}[x]_\rho \subseteq M$. Для любого $y \in M$ есть класс эквивалентности $[y]_\rho$, в котором этот элемент лежит, поэтому $\bigcup_{x\in M}[x]_\rho \supseteq M$.
2. Покажем, что если два класса имеют непустое пересечение, то они совпадают. Пусть $z \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$. Тогда по определению класса эквивалентности $x\ \rho\ z$ и $y\ \rho\ z$.

Доказательство теоремы

Сначала докажем первую часть. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве M.

1. Покажем, что $\bigcup_{x \in M} [x]_\rho = M$. Так как $[x]_\rho \subseteq M$, то $\bigcup_{x \in M} [x]_\rho \subseteq M$. Для любого $y \in M$ есть класс эквивалентности $[y]_\rho$, в котором этот элемент лежит, поэтому $\bigcup_{x \in M} [x]_\rho \supseteq M$.
2. Покажем, что если два класса имеют непустое пересечение, то они совпадают. Пусть $z \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$. Тогда по определению класса эквивалентности $x \ \rho \ z$ и $y \ \rho \ z$. Тогда в силу симметричности и транзитивности ρ мы получаем $x \ \rho \ y$, откуда $[y]_\rho \subseteq [x]_\rho$. Опять из симметричности получаем $[x]_\rho \subseteq [y]_\rho$. Следовательно, $[x]_\rho = [y]_\rho$.

Доказательство теоремы

Доказем вторую часть.

Доказательство теоремы

Докажем вторую часть. Пусть $\{M_i\}_{i \in I}$ — разбиение множества M.

Доказательство теоремы

Докажем вторую часть. Пусть $\{M_i\}_{i \in I}$ — разбиение множества M.
Рассмотрим бинарное отношение ρ на множестве M:
$x \ \rho \ y \Leftrightarrow \exists i \in I \quad x \in M_i$ и $y \in M_i$.

Доказательство теоремы

Докажем вторую часть. Пусть $\{M_i\}_{i \in I}$ — разбиение множества M. Рассмотрим бинарное отношение ρ на множестве M:
$x \ \rho \ y \Leftrightarrow \exists i \in I \quad x \in M_i$ и $y \in M_i$.
Это отношение рефлексивно в силу п.1 определения разбиения, симметричность очевидна, а транзитивность следует из п.2 определения разбиения. Легко понять, что в отношении ρ лежат те элементы, которые принадлежат одинаковым множествам.

Лемма 1

Бинарное отношение ρ на множестве M рефлексивно тогда и только тогда, когда $Id_M \subseteq \rho$.

Проверка свойств бинарных отношений

Лемма 1

Бинарное отношение ρ на множестве M рефлексивно тогда и только тогда, когда $Id_M \subseteq \rho$.

Лемма 2

Бинарное отношение ρ на множестве M симметрично тогда и только тогда, когда $\rho = \rho^{-1}$.

Лемма 1

Бинарное отношение ρ на множестве M рефлексивно тогда и только тогда, когда $Id_M \subseteq \rho$.

Лемма 2

Бинарное отношение ρ на множестве M симметрично тогда и только тогда, когда $\rho = \rho^{-1}$.

Лемма 3

Бинарное отношение ρ на множестве M антисимметрично тогда и только тогда, когда $\rho \cap \rho^{-1} = Id$.

Проверка свойств бинарных отношений

Лемма 1

Бинарное отношение ρ на множестве M рефлексивно тогда и только тогда, когда $Id_M \subseteq \rho$.

Лемма 2

Бинарное отношение ρ на множестве M симметрично тогда и только тогда, когда $\rho = \rho^{-1}$.

Лемма 3

Бинарное отношение ρ на множестве M антисимметрично тогда и только тогда, когда $\rho \cap \rho^{-1} = Id$.

Лемма 4

Бинарное отношение ρ на множестве M транзитивно тогда и только тогда, когда $\rho^2 \subseteq \rho$.

Доказательство леммы 4

$\Rightarrow$ Пусть ρ транзитивно. Докажем, что $\rho^2 \subseteq \rho$.

Доказательство леммы 4

$\Rightarrow$ Пусть ρ транзитивно. Докажем, что $\rho^2 \subseteq \rho$. Возьмем произвольную пару $(x, z) \in \rho^2$ и вспомним определение произведения бинарных отношений:
$\exists y \in M \quad (x, y) \in \rho \quad (y, z) \in \rho.$

Доказательство леммы 4

$\Rightarrow$ Пусть ρ транзитивно. Докажем, что $\rho^2 \subseteq \rho$. Возьмем произвольную пару $(x, z) \in \rho^2$ и вспомним определение произведения бинарных отношений:
$\exists y \in M \quad (x, y) \in \rho \quad (y, z) \in \rho$. Следовательно, $x \ \rho \ y$ и $y \ \rho \ z$. Так как ρ транзитивно, то $x \ \rho \ z$. Откуда $\rho^2 \subseteq \rho$.

Доказательство леммы 4

$\Rightarrow$ Пусть ρ транзитивно. Докажем, что $\rho^2 \subseteq \rho$. Возьмем произвольную пару $(x, z) \in \rho^2$ и вспомним определение произведения бинарных отношений:
$\exists y \in M \quad (x, y) \in \rho \quad (y, z) \in \rho$. Следовательно, $x \ \rho \ y$ и $y \ \rho \ z$. Так как ρ транзитивно, то $x \ \rho \ z$. Откуда $\rho^2 \subseteq \rho$.
$\Leftarrow$ Пусть $\rho^2 \subseteq \rho$.

Доказательство леммы 4

$\Rightarrow$ Пусть ρ транзитивно. Докажем, что $\rho^2 \subseteq \rho$. Возьмем произвольную пару $(x, z) \in \rho^2$ и вспомним определение произведения бинарных отношений:
$\exists y \in M \quad (x, y) \in \rho \quad (y, z) \in \rho$. Следовательно, $x \ \rho \ y$ и $y \ \rho \ z$. Так как ρ транзитивно, то $x \ \rho \ z$. Откуда $\rho^2 \subseteq \rho$.
$\Leftarrow$ Пусть $\rho^2 \subseteq \rho$. Возьмем произвольные $x, y, z \in M$ такие, что $x \ \rho \ y$ и $y \ \rho \ z$. Из определения произведения отношений получаем, что $x \ \rho^2 \ z$. Так как $\rho^2 \subseteq \rho$, то $x \ \rho \ z$. Следовательно, ρ транзитивно.

Пересечение бинарных отношений

Лемма 5

Пусть ρ_1, ρ_2 — рефлексивные (соотв. симметричные, антисимметричные, транзитивные) бинарные отношения, тогда $\rho_1 \cap \rho_2$ тоже рефлексивно (соотв. симметричное, антисимметричное, транзитивное) бинарное отношение.

Лемма 5

Пусть ρ_1, ρ_2 — рефлексивные (соотв. симметричные, антисимметричные, транзитивные) бинарные отношения, тогда $\rho_1 \cap \rho_2$ тоже рефлексивно (соотв. симметричное, антисимметричное, транзитивное) бинарное отношение.

Упражнение. Будет ли верно соответствующее утверждение для объединения бинарных отношений?

Определение

Рефлексивным (соотв. симметричным, транзитивным) замыканием бинарного отношения ρ называется наименьшее по включению рефлексивное (соотв. симметричное, транзитивное) бинарное отношение, включающее ρ. Обозначение ρ^r — рефлексивное, ρ^s — симметричное, ρ^* — транзитивное замыкание.

Замыкания бинарных отношений

Определение

Рефлексивным (соотв. симметричным, транзитивным) замыканием бинарного отношения ρ называется наименьшее по включению рефлексивное (соотв. симметричное, транзитивное) бинарное отношение, включающее ρ. Обозначение ρ^r — рефлексивное, ρ^s — симметричное, ρ^* — транзитивное замыкание.

Почему нет антисимметричного замыкания?

Замыкания бинарных отношений

Определение

Рефлексивным (соотв. симметричным, транзитивным) замыканием бинарного отношения ρ называется наименьшее по включению рефлексивное (соотв. симметричное, транзитивное) бинарное отношение, включающее ρ. Обозначение ρ^r — рефлексивное, ρ^s — симметричное, ρ^* — транзитивное замыкание.

Теорема

Рефлексивное, симметричное, транзитивное замыкания бинарного отношения ρ существуют.

Определение

Рефлексивным (соотв. симметричным, транзитивным) замыканием бинарного отношения ρ называется наименьшее по включению рефлексивное (соотв. симметричное, транзитивное) бинарное отношение, включающее ρ. Обозначение ρ^r — рефлексивное, ρ^s — симметричное, ρ^* — транзитивное замыкание.

Теорема

Рефлексивное, симметричное, транзитивное замыкания бинарного отношения ρ существуют.

В качестве требуемого бинарного отношения достаточно взять пересечение всех бинарных отношений, содержащих ρ и обладающих нужным свойством. Хотя бы одно такое найдется (какое?)

Рефлексивное и симметричное замыкания

Лемма 6

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда $\rho^r = \rho \cup Id_M$

Лемма 7

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда $\rho^s = \rho \cup \rho^{-1}$

Лемма 8

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда
$\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

Транзитивное замыкание

Лемма 8

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

Обозначим бинарное отношение $\rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$ через σ и покажем, что $\rho^* = \sigma$.

Лемма 8

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

Обозначим бинарное отношение $\rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$ через σ и покажем, что $\rho^* = \sigma$.
Докажем, что σ транзитивно.

Лемма 8

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

Обозначим бинарное отношение $\rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$ через σ и покажем, что $\rho^* = \sigma$.
Докажем, что σ транзитивно. Берем $(x, y) \in \sigma, (y, z) \in \sigma$. В силу того, что σ — объединение множеств, то $\exists k, s \in \mathbb{N}$ $(x, y) \in \rho^k$ и $(y, z) \in \rho^s$.

Транзитивное замыкание

Лемма 8

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

Обозначим бинарное отношение $\rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$ через σ и покажем, что $\rho^* = \sigma$.
Докажем, что σ транзитивно. Берем $(x, y) \in \sigma, (y, z) \in \sigma$. В силу того, что σ — объединение множеств, то $\exists k, s \in \mathbb{N}$ $(x, y) \in \rho^k$ и $(y, z) \in \rho^s$. Откуда $(x, z) \in \rho^{k+s} \subseteq \sigma$.

Лемма 8

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда
$\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

Обозначим бинарное отношение $\rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$ через σ и покажем, что $\rho^* = \sigma$.
Докажем, что σ транзитивно. Берем $(x, y) \in \sigma, (y, z) \in \sigma$. В силу того, что σ — объединение множеств, то $\exists k, s \in \mathbb{N}$ $(x, y) \in \rho^k$ и $(y, z) \in \rho^s$. Откуда $(x, z) \in \rho^{k+s} \subseteq \sigma$.
Так как $\rho \subseteq \sigma$ и σ транзитивно, то транзитивное замыкание, как наименьшее по включению с данными свойствами, является подмножеством σ; т.е. $\rho^* \subseteq \sigma$.

Лемма 8

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда
$\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

Обозначим бинарное отношение $\rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$ через σ и покажем, что $\rho^* = \sigma$.
Докажем, что σ транзитивно. Берем $(x, y) \in \sigma, (y, z) \in \sigma$. В силу того, что σ — объединение множеств, то $\exists k, s \in \mathbb{N}$ $(x, y) \in \rho^k$ и $(y, z) \in \rho^s$. Откуда $(x, z) \in \rho^{k+s} \subseteq \sigma$.
Так как $\rho \subseteq \sigma$ и σ транзитивно, то транзитивное замыкание, как наименьшее по включению с данными свойствами, является подмножеством σ; т.е. $\rho^* \subseteq \sigma$.
Покажем по индукции, что $\forall k \in \mathbb{N} \quad \rho^k \subseteq \rho^*$.

Лемма 8

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

Обозначим бинарное отношение $\rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$ через σ и покажем, что $\rho^* = \sigma$.
Докажем, что σ транзитивно. Берем $(x, y) \in \sigma, (y, z) \in \sigma$. В силу того, что σ — объединение множеств, то $\exists k, s \in \mathbb{N}$ $(x, y) \in \rho^k$ и $(y, z) \in \rho^s$. Откуда $(x, z) \in \rho^{k+s} \subseteq \sigma$.
Так как $\rho \subseteq \sigma$ и σ транзитивно, то транзитивное замыкание, как наименьшее по включению с данными свойствами, является подмножеством σ; т.е. $\rho^* \subseteq \sigma$.
Покажем по индукции, что $\forall k \in \mathbb{N} \quad \rho^k \subseteq \rho^*$. База индукции $k = 1$ очевидна.

Лемма 8

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда
$\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

Обозначим бинарное отношение $\rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$ через σ и покажем, что $\rho^* = \sigma$.
Докажем, что σ транзитивно. Берем $(x, y) \in \sigma, (y, z) \in \sigma$. В силу того, что σ — объединение множеств, то $\exists k, s \in \mathbb{N}$ $(x, y) \in \rho^k$ и $(y, z) \in \rho^s$. Откуда $(x, z) \in \rho^{k+s} \subseteq \sigma$.
Так как $\rho \subseteq \sigma$ и σ транзитивно, то транзитивное замыкание, как наименьшее по включению с данными свойствами, является подмножеством σ; т.е. $\rho^* \subseteq \sigma$.
Покажем по индукции, что $\forall k \in \mathbb{N} \quad \rho^k \subseteq \rho^*$. База индукции $k = 1$ очевидна. Рассмотрим $(x, z) \in \rho^{k+1}$. По определению произведения отношений $\exists y \quad (x, y) \in \rho^k \subseteq \rho^* \quad (y, z) \in \rho \subseteq \rho^*$.

Лемма 8

Пусть ρ — бинарное отношение на множестве M, тогда $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

Обозначим бинарное отношение $\rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$ через σ и покажем, что $\rho^* = \sigma$.

Докажем, что σ транзитивно. Берем $(x, y) \in \sigma, (y, z) \in \sigma$. В силу того, что σ — объединение множеств, то $\exists k, s \in \mathbb{N}$ $(x, y) \in \rho^k$ и $(y, z) \in \rho^s$. Откуда $(x, z) \in \rho^{k+s} \subseteq \sigma$.

Так как $\rho \subseteq \sigma$ и σ транзитивно, то транзитивное замыкание, как наименьшее по включению с данными свойствами, является подмножеством σ; т.е. $\rho^* \subseteq \sigma$.

Покажем по индукции, что $\forall k \in \mathbb{N} \quad \rho^k \subseteq \rho^*$. База индукции $k = 1$ очевидна. Рассмотрим $(x, z) \in \rho^{k+1}$. По определению произведения отношений $\exists y \quad (x, y) \in \rho^k \subseteq \rho^* \quad (y, z) \in \rho \subseteq \rho^*$. Так как ρ^* транзитивно, то $(x, z) \in \rho^*$, откуда $\rho^{k+1} \subseteq \rho^*$. Наконец, $\sigma \subseteq \rho^*$.

Каждому бинарному отношению на конечном множестве M соответствует квадратная матрица порядка $n = |M|$. Рассмотрим, как определить свойства бинарного отношения по его матрице. Для этого, кроме определения, используем леммы 1-4.

Пусть $R = (r_{ij})_n, S = (s_{ij})_n$ — две матрицы бинарных отношений ρ и σ. Будем писать $R \subseteq S$, если выполняется следующее свойство: $r_{ij} = 1 \Rightarrow s_{ij} = 1$. Иными словами $\rho \subseteq \sigma$.

Пример

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть бинарное отношение ρ задано матрицей

$$R = (r_{ij})_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Бинарные отношения на конечных множествах

Пусть бинарное отношение ρ задано матрицей

$$R = (r_{ij})_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Бинарное отношение рефлексивно $\Leftrightarrow \quad r_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n.$

Бинарные отношения на конечных множествах

Пусть бинарное отношение ρ задано матрицей

$$R = (r_{ij})_n = \begin{pmatrix} \color{red}{0} & 1 & 0 \\ 1 & \color{red}{1} & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix}$$

- Бинарное отношение рефлексивно $\Leftrightarrow \quad r_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n.$

Пусть бинарное отношение ρ задано матрицей
$$R = (r_{ij})_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Бинарное отношение рефлексивно $\Leftrightarrow \quad r_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n.$
- Бинарное отношение симметрично, если матрица R симметрическая, т.е. $R = R^T$

Пусть бинарное отношение ρ задано матрицей

$$R = (r_{ij})_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Бинарное отношение рефлексивно $\Leftrightarrow$ $r_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n$.
- Бинарное отношение симметрично, если матрица R симметрическая, т.е. $R = R^T$

Пусть бинарное отношение ρ задано матрицей

$$R = (r_{ij})_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Бинарное отношение рефлексивно $\Leftrightarrow$ $r_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$.
- Бинарное отношение симметрично, если матрица R симметрическая, т.е. $R = R^T$
- Бинарное отношение антисимметрично, если $r_{ij} = 1$ и $r_{ji} = 1$, то $i = j$ (если нет элементов симметричных относительно главной диагонали, которые одновременно равны 1). На главной диагонали могут быть 1.

Бинарные отношения на конечных множествах

Пусть бинарное отношение ρ задано матрицей

$$R = (r_{ij})_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Бинарное отношение рефлексивно $\Leftrightarrow \quad r_{ii} = 1, i = 1, \dots, n.$
- Бинарное отношение симметрично, если матрица R симметрическая, т.е. $R = R^T$
- Бинарное отношение антисимметрично, если $r_{ij} = 1$ и $r_{ji} = 1$, то $i = j$ (если нет элементов симметричных относительно главной диагонали, которые одновременно равны 1). На главной диагонали могут быть 1.

Бинарные отношения на конечных множествах

Пусть бинарное отношение ρ задано матрицей

$$R = (r_{ij})_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Бинарное отношение рефлексивно $\Leftrightarrow \quad r_{ii} = 1, i = 1, \ldots, n.$
- Бинарное отношение симметрично, если матрица R симметрическая, т.е. $R = R^T$
- Бинарное отношение антисимметрично, если $r_{ij} = 1$ и $r_{ji} = 1$, то $i = j$ (если нет элементов симметричных относительно главной диагонали, которые одновременно равны 1). На главной диагонали могут быть 1.
- Бинарное отношение транзитивно, если $R^2 \subseteq R$

Проверка отношения на транзитивность

Проверим, будет ли отношение, заданное матрицей

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ транзитивным.

Проверка отношения на транзитивность

Проверим, будет ли отношение, заданное матрицей $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ транзитивным. Для этого возведем ее в квадрат:

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что $R^2 \not\subseteq R$, поэтому R не транзитивно.

Замыкания бинарных отношений

Если R и S — матрицы бинарных отношений ρ и σ, то через $R \cup S$ будем обозначать матрицу $\rho \cup \sigma$.

Замыкания бинарных отношений

- Так как $\rho^r = \rho \cup Id_M$, где $|M| = n$, то матрица рефлексивного замыкания равна $R \cup E_n$;

Замыкания бинарных отношений

- Так как $\rho^r = \rho \cup Id_M$, где $|M| = n$, то матрица рефлексивного замыкания равна $R \cup E_n$;
- Так как $\rho^s = \rho \cup \rho^{-1}$, то матрица симметричного замыкания равна $R \cup R^T$;

Замыкания бинарных отношений

- Так как $\rho^r = \rho \cup Id_M$, где $|M| = n$, то матрица рефлексивного замыкания равна $R \cup E_n$;
- Так как $\rho^s = \rho \cup \rho^{-1}$, то матрица симметричного замыкания равна $R \cup R^T$;
- Известно, что $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots$,

- Так как $\rho^r = \rho \cup Id_M$, где $|M| = n$, то матрица рефлексивного замыкания равна $R \cup E_n$;
- Так как $\rho^s = \rho \cup \rho^{-1}$, то матрица симметричного замыкания равна $R \cup R^T$;
- Известно, что $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots$, но так как отношение ρ определено на конечном множестве, то существует k такое, что $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^k$.

Замыкания бинарных отношений

- Так как $\rho^r = \rho \cup Id_M$, где $|M| = n$, то матрица рефлексивного замыкания равна $R \cup E_n$;
- Так как $\rho^s = \rho \cup \rho^{-1}$, то матрица симметричного замыкания равна $R \cup R^T$;
- Известно, что $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots$, но так как отношение ρ определено на конечном множестве, то существует k такое, что $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^k$.
  Стратегия построения матрицы транзитивного замыкания такова: сначала проверим, будет ли k равно 2. Для этого построим матрицу $R_1 = R \cup R^2$ отношения $\rho_1 = \rho \cup \rho^2$. Проверим, будет ли это отношение транзитивным.

- Так как $\rho^r = \rho \cup Id_M$, где $|M| = n$, то матрица рефлексивного замыкания равна $R \cup E_n$;
- Так как $\rho^s = \rho \cup \rho^{-1}$, то матрица симметричного замыкания равна $R \cup R^T$;
- Известно, что $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots$, но так как отношение ρ определено на конечном множестве, то существует k такое, что $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^k$.
  Стратегия построения матрицы транзитивного замыкания такова: сначала проверим, будет ли k равно 2. Для этого построим матрицу $R_1 = R \cup R^2$ отношения $\rho_1 = \rho \cup \rho^2$. Проверим, будет ли это отношение транзитивным. Если да, то $\rho^* = \rho_1$. В противном случае проверяем на транзитивность отношение $\rho_2 = \rho_1 \cup \rho_1^2$ (обратите внимание, мы не строим отношение $\rho \cup \rho^2 \cup \rho^3$, но ничто не мешает нам строить это отношение и проверять на транзитивность его).

Замыкания бинарных отношений

- Так как $\rho^r = \rho \cup Id_M$, где $|M| = n$, то матрица рефлексивного замыкания равна $R \cup E_n$;
- Так как $\rho^s = \rho \cup \rho^{-1}$, то матрица симметричного замыкания равна $R \cup R^T$;
- Известно, что $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots$, но так как отношение ρ определено на конечном множестве, то существует k такое, что $\rho^* = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots \cup \rho^k$.
  Стратегия построения матрицы транзитивного замыкания такова: сначала проверим, будет ли k равно 2. Для этого построим матрицу $R_1 = R \cup R^2$ отношения $\rho_1 = \rho \cup \rho^2$. Проверим, будет ли это отношение транзитивным. Если да, то $\rho^* = \rho_1$. В противном случае проверяем на транзитивность отношение $\rho_2 = \rho_1 \cup \rho_1^2$ (обратите внимание, мы не строим отношение $\rho \cup \rho^2 \cup \rho^3$, но ничто не мешает нам строить это отношение и проверять на транзитивность его).

В качестве упражнения докажите корректность этого метода, то есть что $(\rho \cup \rho^2)^* = \rho^*$.

Пример построения рефлексивно-симметрично-транзитивного замыкания

Рассмотрим отношение на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, заданное матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример построения рефлексивно-симметрично-транзитивного замыкания

Сначала построим рефлексивное замыкание:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} {\color{red}1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & {\color{red}1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {\color{red}1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & {\color{red}1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример построения рефлексивно-симметрично-транзитивного замыкания

Теперь построим симметричное замыкание полученного отношения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & 1 & 0 \\ \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример построения рефлексивно-симметрично-транзитивного замыкания

Теперь проверяем, будет ли полученное на предыдущем шаге отношение транзитивно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \color{red}{1} & 1 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример построения рефлексивно-симметрично-транзитивного замыкания

Так как $R^2 \not\subseteq R$, то отношение не будет транзитивным, поэтому построим $R_1 = R \cup R^2$ (она совпадает с R^2). Проверим, будет ли отношение, заданное матрицей R_1 транзитивным: будет, так как $R_1^2 = R_1$. Откуда матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является матрицей транзитивного замыкания.

Пример построения рефлексивно-симметрично-транзитивного замыкания

Так как $R^2 \not\subseteq R$, то отношение не будет транзитивным, поэтому построим $R_1 = R \cup R^2$ (она совпадает с R^2). Проверим, будет ли отношение, заданное матрицей R_1 транзитивным: будет, так как $R_1^2 = R_1$. Откуда матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является матрицей транзитивного замыкания. Видно, что это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно, оно является отношением эквивалентности. У этого отношения два класса эквивалентности: $[1] = \{1, 5\}, [2] = \{2, 3, 4\}$, которые образуют разбиение множества $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.