Множества, соответствия и отображения

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

26 августа 2020 г.

Множества

"Определение"

Что такое множество — это вопрос, который требует обсуждения. Пока будем под множеством понимать ''набор элементов'' [$a \in A$ — обозначение для ''a является элементом множества A''].

"Определение"

Что такое множество — это вопрос, который требует обсуждения. Пока будем под множеством понимать "набор элементов" [$a \in A$ — обозначение для "a является элементом множества A"].

$\emptyset$ — пустое множество, т.е. множество, в котором нет элементов.
Договоримся, что a, c, x будут обозначать элементы множеств, тогда как $A, , X$ сами множества.

Множества

"Определение"

Что такое множество — это вопрос, который требует обсуждения. Пока будем под множеством понимать ''набор элементов'' [$a \in A$ — обозначение для ''a является элементом множества A''].

$\emptyset$ — пустое множество, т.е. множество, в котором нет элементов.

Определение

Множество A является подмножеством множества B [обозначение $A \subseteq B$], если *каждый* элемент A является элементом B.

Множества

"Определение"

Что такое множество — это вопрос, который требует обсуждения. Пока будем под множеством понимать "набор элементов" [$a \in A$ — обозначение для "a является элементом множества A"].

$\emptyset$ — пустое множество, т.е. множество, в котором нет элементов.

Определение

Множество A является подмножеством множества B [обозначение $A \subseteq B$], если *каждый* элемент A является элементом B.

Определение

Множества A и B равны [$A = B$], если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

"Определение"

Что такое множество — это вопрос, который требует обсуждения. Пока будем под множеством понимать "набор элементов" [$a \in A$ — обозначение для "a является элементом множества A"].

$\emptyset$ — пустое множество, т.е. множество, в котором нет элементов.

Определение

Множество A является подмножеством множества B [обозначение $A \subseteq B$], если *каждый* элемент A является элементом B.

Определение

Множества A и B равны [$A = B$], если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

Пусть $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 0\}$, тогда $\emptyset \in A$; $\{\emptyset, 0\} \subseteq A$.
Кроме того, пустое множество является подмножеством *любого* множества X, так как невозможно привести "контрпример", т.е. указать в пустом множестве такой элемент, который бы не лежал в X.

Определение

Мультимножеством называется множество A такое, что каждому элементу $a \in A$ сопоставляется некоторое натуральное число $k_A(a)$, которое называется кратностью вхождения элемента a в множество A.

Определение

Мультимножеством называется множество A такое, что каждому элементу $a \in A$ сопоставляется некоторое натуральное число $k_A(a)$, которое называется кратностью вхождения элемента a в множество A.

Пример

Пусть $A = \{1, 1, 2, 2, 2, \pi\}$, тогда $k_A(1) = 2, k_A(2) = 3, k_A(\pi) = 1$.

Множества и мультимножества

Определение

Мультимножеством называется множество A такое, что каждому элементу $a \in A$ сопоставляется некоторое натуральное число $k_A(a)$, которое называется кратностью вхождения элемента a в множество A.

Определение

Мультимножество A является подмножеством мультимножества B $[A \subseteq B]$, если *каждый* элемент $a \in A$ является элементом B и $k_A(a) \leq k_B(a)$.

Определение

Мультимножеством называется множество A такое, что каждому элементу $a \in A$ сопоставляется некоторое натуральное число $k_A(a)$, которое называется кратностью вхождения элемента a в множество A.

Определение

Мультимножество A является подмножеством мультимножества B $[A \subseteq B]$, если *каждый* элемент $a \in A$ является элементом B и $k_A(a) \leq k_B(a)$.

Определение

Мультимножества A и B равны $[A = B]$, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

Определение

Мультимножество A является **подмножеством** мультимножества B $[A \subseteq B]$, если *каждый* элемент $a \in A$ является элементом B и $k_A(a) \leq k_B(a)$.

Определение

Мультимножества A и B **равны** $[A = B]$, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

Сравните

Если $A = \{1, 1, 2\}, B = \{1, 2\}$ — два множества, то $A = B$;
если их рассматривать как мультимножества, то $A \not\subseteq B$, поэтому $A \neq B$.

- Объединение множеств
  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$

Множества и операции над ними

- Объединение множеств
  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
- Пересечение множеств
  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$

Множества и операции над ними

- Объединение множеств
  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
- Пересечение множеств
  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
- Разность множеств
  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$

- Объединение множеств
  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$
- Пересечение множеств
  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$
- Разность множеств
  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$
- Симметрическая разность
  $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

"Определение"

Универсальное множество [U] — совокупность всех объектов для решаемой задачи.

"Определение"

Универсальное множество [U] — совокупность всех объектов для решаемой задачи.

Пример

1. В анализе функции одной переменной универсальным множеством, которому принадлежит этот аргумент, считается множество действительных чисел $\mathbb{R}$.
2. В геометрии универсальным множеством объектов считается множество всех точек трехмерного пространства.

"Определение"

Универсальное множество [U] — совокупность всех объектов для решаемой задачи.

Пример

1. В анализе функции одной переменной универсальным множеством, которому принадлежит этот аргумент, считается множество действительных чисел $\mathbb{R}$.
2. В геометрии универсальным множеством объектов считается множество всех точек трехмерного пространства.

- Дополнение
  $\overline{A} = U \setminus A$

Операции и тождества

1. Идемпотентность
   $A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$
2. Ассоциативность
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Коммутативность
   $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$
4. Тождество поглощения
   $A \cup (A \cap B) = A$ $\qquad$ $A \cap (A \cup B) = A$
5. Дистрибутивность
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \cup \emptyset = A$, $A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap U = A$
7. $A \cup \overline{A} = U$ $\qquad$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Операции и тождества

8. Законы де Моргана
   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
9. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
10. $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
11. $A \subseteq B,\ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
12. Законы монотонности
    $A, B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C, A \cap B \subseteq C$

Булеан — множество всех подмножеств

Определение

Пусть A — множество, тогда булеаном множества A [$\mathcal{B}(A)$ или $\mathcal{P}(A)$ или 2^A] называется множеством всех подмножеств множества A.

Пример

Пусть $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ имеет 2 элемента, тогда в булеане $2^2 = 4$ элемента

$$\mathcal{B}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Декартово произведение множеств

Определение

Пусть A и B — два непустых множества. Тогда их декартовым произведением $[A \times B]$ называется множество всевозможных пар $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Декартово произведение множеств

Определение

Пусть A и B — два непустых множества. Тогда их декартовым произведением $[A \times B]$ называется множество всевозможных пар $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Декартово произведение некоммутативно, т.е. $A \times B \neq B \times A$.

Декартово произведение множеств

Определение

Пусть A и B — два непустых множества. Тогда их декартовым произведением $[A \times B]$ называется множество всевозможных пар $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Определение

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — непустые множества. Их декартово произведение $[A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n]$ определим по индукции: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$

Декартово произведение множеств

Определение

Пусть A и B — два непустых множества. Тогда их декартовым произведением $[A \times B]$ называется множество всевозможных пар $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Определение

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — непустые множества. Их декартово произведение $[A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n]$ определим по индукции: $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$

Таким образом, декартово произведение n множеств — это множество пар (x, x_n), где $x \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}$, $x_n \in A_n$. Иными словами, элемент этого декартового произведения записывается как $((\ldots((x_1, x_2), x_3) \ldots, x_{n-1}), x_n)$, где $x_i \in A_i$. Для простоты его обозначают $(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, x_n)$ и называют упорядоченным набором из n элементов или кортежем длины n.

Определение

Пусть A, B — непустые множества. **Бинарным соответствием** (**отношением**) α между и множествами A и B называется некоторое подмножество $A \times B$, т.е. $\alpha \subseteq A \times B$.

Соответствия множеств

Определение

Пусть A, B — непустые множества. Бинарным соответствием (отношением) α между и множествами A и B называется некоторое подмножество $A \times B$, т.е. $\alpha \subseteq A \times B$.

$(x, y) \in \alpha$ будем обозначать также $x \ \alpha \ y$.

Соответствия множеств

Определение

Пусть A, B — непустые множества. Бинарным соответствием (отношением) α между и множествами A и B называется некоторое подмножество $A \times B$, т.е. $\alpha \subseteq A \times B$.

Пример

- Отношение включения:

$$(u, V) \in U \times \mathcal{B}(U) \Leftrightarrow u \in V$$

- $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = sin(x)\}$ и другие функциональные зависимости

Определение

Пусть A, B, C — произвольные множества, α — бинарное соответствие между множествами A и B, β — бинарное соответствие между множествами B и C. Тогда **произведением** отношений α и β называется бинарное отношение $\gamma = \alpha \circ \beta$ между множествами A и C такое, что

$$\gamma = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B, (a, b) \in \alpha, (b, c) \in \beta\}$$

Произведение бинарных соответствий

Определение

Пусть A, B, C — произвольные множества, α — бинарное соответствие между множествами A и B, β — бинарное соответствие между множествами B и C. Тогда произведением отношений α и β называется бинарное отношение $\gamma = \alpha \circ \beta$ между множествами A и C такое, что

$$\gamma = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B, (a, b) \in \alpha, (b, c) \in \beta\}$$

Произведение бинарных соответствий некоммутативно, т.е. $\alpha\beta \neq \beta\alpha$

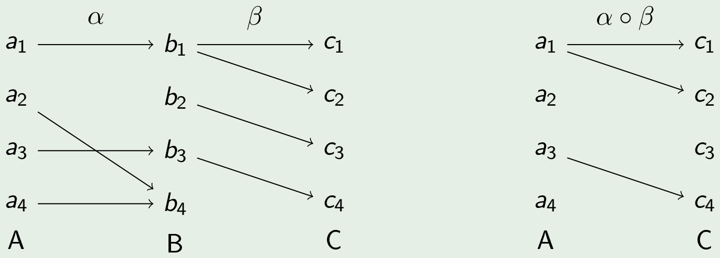
Произведение бинарных соответствий

Определение

Пусть A, B, C — произвольные множества, α — бинарное соответствие между множествами A и B, β — бинарное соответствие между множествами B и C. Тогда **произведением** отношений α и β называется бинарное отношение $\gamma = \alpha \circ \beta$ между множествами A и C такое, что

$$\gamma = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B, (a, b) \in \alpha, (b, c) \in \beta\}$$

Пример



Определение

Пусть α — бинарное соответствие между множествами A и B. Тогда обратным соответствием α^{-1} к α называется соответствие между множествами B и A такое, что

$$\alpha^{-1} = \{(b, a) \subseteq B \times A \mid (a, b) \in \alpha\}$$

Пример

$$\alpha = \{(x, y) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-1, 1] \mid y = \sin(x)\}$$

$$\alpha^{-1} = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mid y = \arcsin(x)\}$$

Бинарные соответствия между конечными множествами

Определение

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ — два **конечных** множества, α — бинарное соответствие между A и B. Тогда матрицей соответствия α называется матрица $R = (r_{ij})$, имеющая n строк и m столбцов, с элементами из множества $\{0, 1\}$, которая задается по правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (a_i, b_j) \in \alpha; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример

Рассмотрим множества $A = \{$ Дунай, Амазонка, Рейн $\}$ и $B = \{$ Германия, Франция, Китай, Румыния $\}$. Пусть α — бинарное соответствие между множествами A и B такое, что $x\ \alpha\ y$ тогда и только тогда, когда река x протекает по территории страны y. Тогда матрица отношения α выглядит следующим образом:

	Г	Ф	К	Р
Д	1	0	0	1
А	0	0	0	0
Р	1	1	0	0

Матрица обратного бинарного соответствия

Определение

Пусть $\alpha \subseteq A \times B$. Бинарное соответствие $\alpha^{-1} \subseteq B \times A$ называется **обратным** для α, если $(a, b) \in \alpha \Leftrightarrow (b, a) \in \alpha^{-1}$.

Следующая лемма очевидна:

Лемма 1

Пусть $R_{n \times m}$ — матрица бинарного соответствия α. Тогда матрица бинарного соответствия α^{-1} равна R^T.

Матрица произведения бинарных соответствий

Определим сложение на множестве $\{0, 1\}$ следующим образом (знак операции оставим прежним):

$0 + 0 = 0 \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1 \quad 1 + 1 = 1$

Матрица произведения бинарных соответствий

Определим сложение на множестве $\{0, 1\}$ следующим образом (знак операции оставим прежним):
$0 + 0 = 0 \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1 \quad 1 + 1 = 1$
Пусть $R_{n \times m}$ и $S_{m \times k}$ — матрицы с элементами из множества $\{0, 1\}$. Определим новое произведение матриц $T = RS$ (знак операции опять оставим прежним), как обычное произведение матриц, т.е. $t_{ij} = \sum_{p=1}^{m} r_{ip} s_{pj}$, где произведение обычное, а сложение — та операция, что определена выше.

Матрица произведения бинарных соответствий

Определим сложение на множестве $\{0, 1\}$ следующим образом (знак операции оставим прежним):
$0 + 0 = 0 \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1 \quad 1 + 1 = 1$
Пусть $R_{n\times m}$ и $S_{m\times k}$ — матрицы с элементами из множества $\{0, 1\}$. Определим новое произведение матриц $T = RS$ (знак операции опять оставим прежним), как обычное произведение матриц, т.е. $t_{ij} = \sum_{p=1}^{m} r_{ip}s_{pj}$, где произведение обычное, а сложение — та операция, что определена выше.

Лемма 2

Пусть R — матрица бинарного соответствия $\alpha \subseteq A \times B$, S — матрица бинарного соответствия $\beta \subseteq B \times C$. Тогда матрица T бинарного соответствия $\gamma = \alpha \circ \beta \subseteq A \times C$ равна RS.

Доказательство леммы

Рассмотрим матрицу $T = RS$ и покажем, что $t_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $(a_i, c_j) \in \gamma$.

Доказательство леммы

Рассмотрим матрицу $T = RS$ и покажем, что $t_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $(a_i, c_j) \in \gamma$.
Заметим, что $t_{ij} = \sum_{p=1}^{m} r_{ip}s_{pj} = 1$ тогда и только тогда, когда в этой сумме есть хотя бы одно слагаемое, которое равно 1. Пусть это слагаемое $r_{iq}s_{qj}$.

Рассмотрим матрицу $T = RS$ и покажем, что $t_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $(a_i, c_j) \in \gamma$.
Заметим, что $t_{ij} = \sum_{p=1}^{m} r_{ip}s_{pj} = 1$ тогда и только тогда, когда в этой сумме есть хотя бы одно слагаемое, которое равно 1. Пусть это слагаемое $r_{iq}s_{qj}$. Тогда

$$r_{iq}s_{qj} = 1 \Leftrightarrow r_{iq} = 1 \text{ и } s_{qj} = 1 \Leftrightarrow (a_i, b_q) \in \alpha \text{ и } (b_q, c_j) \in \beta$$

Доказательство леммы

Рассмотрим матрицу $T = RS$ и покажем, что $t_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда $(a_i, c_j) \in \gamma$.
Заметим, что $t_{ij} = \sum_{p=1}^{m} r_{ip}s_{pj} = 1$ тогда и только тогда, когда в этой сумме есть хотя бы одно слагаемое, которое равно 1. Пусть это слагаемое $r_{iq}s_{qj}$. Тогда

$$r_{iq}s_{qj} = 1 \Leftrightarrow r_{iq} = 1 \text{ и } s_{qj} = 1 \Leftrightarrow (a_i, b_q) \in \alpha \text{ и } (b_q, c_j) \in \beta$$

Так как $\gamma = \alpha \circ \beta = \{(a_i, c_j) \mid \exists b_q, (a_i, b_q) \in \alpha, (b_q, c_j) \in \beta\}$, то

$$(a_i, b_q) \in \alpha \text{ и } (b_q, c_j) \in \beta \Leftrightarrow (a_i, c_j) \in \gamma$$

Следовательно, матрица T является матрицей бинарного отношения γ.

Свойства бинарных соответствий между произвольными множествами

Определение

Бинарное соответствие α между произвольными множествами A и B называется полным, если $\forall a \in A \quad \exists b \in B : (a, b) \in \alpha$.

Определение

Бинарное соответствие α между произвольными множествами A и B называется функциональным, если
$\forall a \in A, b_1, b_2 \in B$ если $(a, b_1) \in \alpha$ и $(a, b_2) \in \alpha$, то $b_1 = b_2$.

Свойства бинарных соответствий между произвольными множествами

Определение

Бинарное соответствие α между произвольными множествами A и B называется **полным**, если $\forall a \in A \quad \exists b \in B : (a, b) \in \alpha$.

Определение

Бинарное соответствие α между произвольными множествами A и B называется **функциональным**, если
$\forall a \in A, b_1, b_2 \in B$ если $(a, b_1) \in \alpha$ и $(a, b_2) \in \alpha$, то $b_1 = b_2$.

Пример

	Г	Ф	К	Р
Д	1	0	0	1
А	0	0	0	0
Р	1	1	0	0

Свойства бинарных соответствий между произвольными множествами

Определение

Бинарное соответствие α между произвольными множествами A и B называется **полным**, если $\forall a \in A \quad \exists b \in B : (a, b) \in \alpha$.

Определение

Бинарное соответствие α между произвольными множествами A и B называется **функциональным**, если
$\forall a \in A, b_1, b_2 \in B$ если $(a, b_1) \in \alpha$ и $(a, b_2) \in \alpha$, то $b_1 = b_2$.

Пример

	Г	Ф	К	Р
Д	1	0	0	1
А	0	0	0	0
Р	1	1	0	0

Это соответствие не является полным.

Свойства бинарных соответствий между произвольными множествами

Определение

Бинарное соответствие α между произвольными множествами A и B называется полным, если $\forall a \in A \quad \exists b \in B : (a, b) \in \alpha$.

Определение

Бинарное соответствие α между произвольными множествами A и B называется функциональным, если
$\forall a \in A, b_1, b_2 \in B$ если $(a, b_1) \in \alpha$ и $(a, b_2) \in \alpha$, то $b_1 = b_2$.

Пример

	Г	Ф	К	Р
Д	1	0	0	1
А	0	0	0	0
Р	1	1	0	0

Это соответствие не является полным.
Оно также не является функциональным.

Определение

Бинарное соответствие f между произвольными множествами A и B называется отображением (функцией), если оно полное и функциональное.

В этом случае $f : A \to B$, а также вместо $(a, b) \in f$ пишут $f(a) = b$ (ведь такой элемент b найдется и будет единственным).

Определение

Бинарное соответствие $\alpha \subseteq A \times B$ называется инъективным, если $\forall a_1, a_2 \in A \quad b \in B$ если $(a_1, b) \in \alpha$ и $(a_2, b) \in \alpha$, то $a_1 = a_2$.

Определение

Бинарное соответствие $\alpha \subseteq A \times B$ называется сюръективным, если $\forall b \in B \quad \exists a \in A : (a, b) \in \alpha$

Определение

Отображение $f : A \to B$ называется биекцией, если оно инъективно и сюръективно.

Теорема

Отображение $f : A \to B$ обладает обратным отображением тогда и только тогда, когда f — биекция.

Теорема

Отображение $f : A \to B$ обладает обратным отображением тогда и только тогда, когда f — биекция.

Соответствие f^{-1} является отображением, т.е. f^{-1} полно и функционально.

Теорема

Отображение $f : A \to B$ обладает обратным отображением тогда и только тогда, когда f — биекция.

Соответствие f^{-1} является отображением, т.е. f^{-1} полно и функционально.

- Запишем определение полноты для $f^{-1}\colon B \to A$

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A : (b, a) \in f^{-1} \Leftrightarrow \forall b \in B \quad \exists a \in A : (a, b) \in f.$$

Получили определение сюръективности для f.

Теорема

Отображение $f : A \to B$ обладает обратным отображением тогда и только тогда, когда f — биекция.

Соответствие f^{-1} является отображением, т.е. f^{-1} полно и функционально.

- Запишем определение полноты для $f^{-1}\colon B \to A$

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A : (b, a) \in f^{-1} \Leftrightarrow \forall b \in B \quad \exists a \in A : (a, b) \in f.$$

  Получили определение сюръективности для f.

- Запишем определение функциональности для $f^{-1}\colon B \to A$

$$\forall b \in B, a_1, a_2 \in A \text{ если } (b, a_1) \text{ и } (b, a_2) \in f^{-1}, \text{ то } a_1 = a_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A, b \in B \text{ если } (a_1, b) \text{ и } (a_2, b) \in f, \text{ то } a_1 = a_2.$$

  Получили определение инъективности для f.

Упражнение.

Лемма 3

Пусть $f : A \to B$, $g : B \to C$ — два отображения. Тогда бинарное соответствие $f \circ g \subseteq A \times C$ также является отображением.

Упражнение.

Лемма 3

Пусть $f : A \to B$, $g : B \to C$ — два отображения. Тогда бинарное соответствие $f \circ g \subseteq A \times C$ также является отображением.

Определение

Пусть $f : A \to B$, $g : B \to C$ — два отображения. Их композицией называется отображение $f \circ g$.

Упражнение.

Лемма 3

Пусть $f : A \to B$, $g : B \to C$ — два отображения. Тогда бинарное соответствие $f \circ g \subseteq A \times C$ также является отображением.

Определение

Пусть $f : A \to B$, $g : B \to C$ — два отображения. Их композицией называется отображение $f \circ g$.

Упражнение.

Лемма 4

Композиция биекций является биекцией.

Пусть J — (возможно бесконечное) множество индексов, тогда через $\{A_j\}_{j \in J}$ будем обозначать семейство множеств A_j.

Операции над бесконечным числом множеств

Пусть J — (возможно бесконечное) множество индексов, тогда через $\{A_j\}_{j \in J}$ будем обозначать семейство множеств A_j.

Определение

- Объединение множеств $\bigcup_{j \in J} A_j = \{x \mid \exists j \in J \quad x \in A_j\}$

Операции над бесконечным числом множеств

Пусть J — (возможно бесконечное) множество индексов, тогда через $\{A_j\}_{j \in J}$ будем обозначать семейство множеств A_j.

Определение

- Объединение множеств $\bigcup_{j \in J} A_j = \{x \mid \exists j \in J \quad x \in A_j\}$
- Пересечение множеств $\bigcap_{j \in J} A_j = \{x \mid \forall j \in J \quad x \in A_j\}$

Операции над бесконечным числом множеств

Пусть J — (возможно бесконечное) множество индексов, тогда через $\{A_j\}_{j\in J}$ будем обозначать семейство множеств A_j.

Определение

- Объединение множеств $\bigcup_{j\in J} A_j = \{x \mid \exists j \in J \quad x \in A_j\}$
- Пересечение множеств $\bigcap_{j\in J} A_j = \{x \mid \forall j \in J \quad x \in A_j\}$

Определение

Бесконечным декартовым произведением семейства непустых множеств $\{A_i\}_{i\in I}$ называется множество отображений $f : J \to \bigcup_{j\in J} A_j$ таких, что $f(j) \in A_j$. Иными словами,

$$\prod_{j\in J} A_j = \{f : J \to \bigcup_{j\in J} A_j \mid f(j) \in A_j\}$$