§6. Числа Стирлинга 1-го рода.

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m)\cdot F_m(x)$$, где $F_m(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$.

Если нужно наоборот: выразить $F_n(x)$ как многочлен от *x*.

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \tilde{s}(n,m)\cdot x^m$$

$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \tilde{s}(n,m) \cdot x^m \quad .$$

Пример.

$n = 2.$ $F_2(x) = x(x-1) = x^2 - x$.

Т.е. $\tilde{s}(2,0) = 0,$ $\tilde{s}(2,1) = -1,$ $\tilde{s}(2,2) = 1$.

$n = 3.$ $F_3(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

$\tilde{s}(3,0) = 0,$ $\tilde{s}(3,1) = 2,$ $\tilde{s}(3,2) = -3,$ $\tilde{s}(3,3) = 1$

Опр. Числами Стирлинга 1-го рода называют коэффициенты $s(n,m)$ в разложении $F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} s(n,m) \cdot x^m$.

Опр. Разбиением Ω на циклы называется множество классов, в каждом содержится упорядоченный набор элементов, «с точностью до циклического сдвига», классы не имеют общих элементов, а их объединение равно Ω.

Пример. {1, 2, 3}

Разбиение на один цикл допускает два варианта: {(1, 2, 3)}, {(2, 1, 3)}. Другие упорядоченные наборы: (2, 3, 1), (3, 1, 2) отличаются циклическим сдвигом от (1, 2, 3), поэтому равны первому варианту. Наборы (1, 3, 2), (3, 2, 1) отличаются циклическим сдвигом от (2, 1, 3), поэтому равны второму варианту.

Разбиение на два цикла допускает три варианта: {(1, 2), (3)}, {(1, 3), (3)}, {(2, 3), (1)}.

Разбиение на три цикла допускает один вариант: {(1), (2), (3)}.

Опр.2. Числами Стирлинга 1-го рода $s(n,m)$ называют количество всех различных разбиений Ω ($n = |\Omega|$) на m циклов.

Теорема (без доказательства). Определения 1 и 2 соответствуют одинаковым числам.

Частные случаи чисел Стирлинга 1-го рода:

$s(n, 0) = 0$, если $n > 0$.

$s(n, n) = 1$, если $n > 0$.

$s(0, 0) = 1$.
$s(n, m) = 0$, если $m > n$.

Теорема (Рекуррентное соотношение для $s(n, m)$).
$s(n, m) = s(n-1, m-1) + (n-1)\cdot s(n-1, m)$.

Доказательство:
Пусть $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
Рассмотрим размещение a_n в циклы, относительно размещения остальных $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$.

1 случай) a_n образует цикл длины 1, где не будет других элементов.
Остальные элементы $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ разбиваем на (m – 1) циклов.
Количество различных способов равно $s(n-1, m-1)$.

2 случай) a_n добавим в цикл, где размещается еще какой-нибудь элемент.

s(n –1, m) – количество способов разбить элементы $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ на m циклов.

a_n добавим в подходящий цикл, либо после a_1, либо после a_2, и т.д.

Всего (n –1) разных вариантов.

Количество всех способов равно (n –1)·s(n –1, m).

Теорема доказана.

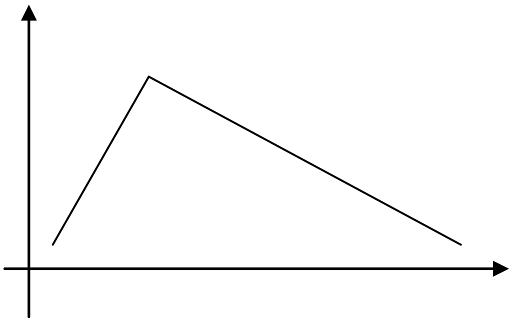
Свойства s(n, m) :

1. Аналог треугольника Паскаля

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	2	3	1		
4	0	6	11	6	1	
5	0	?	?	?	?	1

2. При фиксированном n переменном m последовательность s(n, m) унимодальная, т.е. существует k, такая, что

$$s(n,0) < s(n,1) < \ldots < s(n,k) > s(n,k+1) > \ldots > s(n,n).$$



3. $\sum_{m=0}^{n} s(n,m) = n!$.