§5. Принцип Дирихле. Числа Стирлинга 2-го рода.

Задачи о распределении по ящикам элементов множества Ω ($n = |\Omega|$), каждый элемент в один свой ящик.

Пусть имеется m ящиков, каждый способен вместить более одного элемента из Ω.

Принцип Дирихле: Если $n > m$, то при любом распределении хотя бы в один ящик попадёт не менее двух элементов.

Кролики и клетки

Случай 1) Пусть ящики пронумерованы (1, 2, …, m).
Найти количество всех различных распределений Ω по ящикам, когда возможны пустые ящики.

Теорема. Количество всех распределений n элементов по m пронумерованным ящикам равно m^n.

Доказательство:
Пусть $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
Для каждого элемента a_i есть m различных вариантов его размещения в один из ящиков. По правилу произведения количество всех возможных вариантов размещения всех элементов равно $\underbrace{m \cdot m \cdot ... \cdot m}_{n\ раз}$. Теорема доказана.

Следствие: Каждое такое распределение есть всюду определенное отображение $\varphi : \Omega \to \{1, 2, \ldots, m\}$. Количество таких отображений равно m^n.

Случай 2) Пусть ящики не пронумерованы (их количество равно m). Найти количество всех различных распределений Ω по ящикам, когда **нет** пустых ящиков.

Опр. $S(n, m)$ – числа Стирлинга 2-го рода – количество всех различных способов распределить n пронумерованных элементов по m не пронумерованным ящикам, когда **нет** пустых ящиков.

Замечание: S(n, m) = число всех разбиений Ω на m различных классов.

Следствие: количество всех всюду определенных сюръекций $\varphi : \Omega \to \{1, 2, \ldots, m\}$ равно $m! \cdot \mathrm{S}(n, m)$.

Опр. Числа Белла $\mathrm{B}(n) = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{S}(n,m)$.

Замечание: $\mathrm{B}(n)$ равно количеству всех разбиений Ω.

Частные случаи чисел Стирлинга 2-го рода:

$S(n, 0) = ?$

Частные случаи чисел Стирлинга 2-го рода:

$S(n, 0) = 0$, если $n > 0$.

Частные случаи чисел Стирлинга 2-го рода:
$S(n, 0) = 0$, если $n > 0$.

$S(n, n) = ?$

Частные случаи чисел Стирлинга 2-го рода:

$S(n, 0) = 0$, если $n > 0$.

$S(n, n) = 1$, если $n > 0$.

Частные случаи чисел Стирлинга 2-го рода:
$S(n, 0) = 0$, если $n > 0$.
$S(n, n) = 1$, если $n > 0$.

$S(0, 0) = 1$.

Частные случаи чисел Стирлинга 2-го рода:
$S(n, 0) = 0$, если $n > 0$.
$S(n, n) = 1$, если $n > 0$.
$S(0, 0) = 1$.

$S(n, m) = 0$, если $m > n$.

Теорема (Рекуррентное соотношение для S(n, m)).
S(n, m) = S(n –1, m –1) + m·S(n –1, m).

Доказательство:
Пусть $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
Рассмотрим размещение a_n в ящики, относительно размещения остальных $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$.

1 случай) a_n в отдельном ящике, где не будет других элементов, т.е. остальные элементы $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ размещаем в незанятые ящики, их количество (m – 1).
Количество различных способов равно S(n –1, m –1).

1 случай) a_n добавим в ящик, где размещается еще какой-нибудь элемент.

S(n –1, m) – количество способов разместить элементы $\{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ по m ящикам.

a_n добавим в любой из m ящиков.

Количество всех способов равно $m \cdot$S(n –1, m)

Теорема доказана.

Свойства S(n, m) :

1. Аналог треугольника Паскаля

n	$m = 0, 1, \ldots, n$
0	
1	
2	
3	
4	
5	

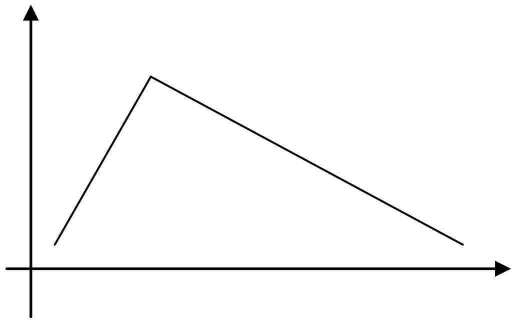
$n \backslash m$	0	1	2	3	4	…	n
0	1						
1	0	1					
2	0		1				
3	0			1			
4	0				1		
5	0					…	

$$S(n, m) = S(n-1, m-1) + m \cdot S(n-1, m).$$

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	1	3	1		
4	0	1	7	6	1	
5	0	1	?	?	?	1

2. При фиксированном n переменном m последовательность S(n, m) унимодальная, т.е. существует k, такая, что

$$S(n,0) < S(n,1) < \ldots < S(n,k) > S(n,k+1) > \ldots > S(n,n).$$



3. Явное выражение (без доказательства):

$$S(n,m)=\sum_{(l_1,l_2,\ldots l_n)}\frac{n!}{l_1!\cdot l_2!\cdot\ldots\cdot l_n!\cdot(1!)^{l_1}\cdot(2!)^{l_2}\cdot\ldots\cdot(n!)^{l_n}}$$, где

каждое $l_i \geq 0$;

$l_1+l_2+\ldots+l_n=m$;

$1\cdot l_1+2\cdot l_2+\ldots+n\cdot l_n=n$.

4. Еще один вариант явного выражения (без доказательства):

$$S(n,m) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i (m-i)^n \ .$$

Замечание: для доказательства надо показать, что эта формула тоже удовлетворяет рекуррентному соотношению $S(n, m) = S(n-1, m-1) + m \cdot S(n-1, m)$.

5. Пусть $F_k(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$ – «факториальный одночлен», $F_0(x) \equiv 1$, функция от действительного аргумента x. Тогда

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m) \cdot F_m(x).$$

Замечание: для доказательства нужно применить индукцию по n.