§3. Конфигурации с повторениями

Пример.

М	А	Т	Е	М	А	Т	И	К	А

Сколько разных слов можно получить, переставляя карточки с буквами?

Всего 10 карточек. Количество перестановок равно 10!.

Однако некоторые буквы повторяются, следовательно, при их перестановке получаются одинаковые слова.

Буква М – 2 раза; буква А – 3 раза; буква Т – 2 раза.

Число способов переставить буквы: М – 2!, А – 3!, Т – 2!.

По принципу перемножения, для каждого слова есть $2!\cdot3!\cdot2!$ перестановок карточек, дающих это слово.

В результате, количество различных слов равно $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}$.

Опр. Перестановкой с повторениями называется перестановка элементов совокупности, где некоторые элементы повторяются.

Обозначим $P_n(k_1, \ldots, k_S)$ количество всех различных перестановок с повторениями, где n – количество всех элементов в совокупности, $k_1, \ldots, k_S$ – количества повторений соответствующих элементов.

Теорема.

$$P_n(k_1, \ldots, k_S) = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_S!}.$$

Доказательство аналогично примеру.

Теорема.

Пусть $k_1 + \ldots + k_S = n$. Тогда

$$P_n(k_1, \ldots, k_S) = C(n; k_1, \ldots, k_{S-1}) = C(n; k_1, \ldots, k_S).$$

Доказательство:

$$P_n(k_1, \ldots, k_S) = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_S!}.$$

$$C(n;k_1,\ldots,k_{S-1}) = C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-(k_1+\ldots+k_{S-2})}^{k_{S-1}} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cdot(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!\cdot(n-k_1-k_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-k_1-\ldots-k_{S-2})!}{k_{S-1}!\cdot(n-k_1-\ldots-k_{S-1})!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_S!}.$$

$$C(n;k_1,\ldots,k_S) = C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-(k_1+\ldots+k_{S-2})}^{k_{S-1}}\cdot C_{n-(k_1+\ldots k_{S-1})}^{k_S} =$$

$$= C(n;k_1,\ldots,k_{S-1})\cdot C_{k_S}^{k_S} = C(n;k_1,\ldots,k_{S-1})\cdot 1.$$

Другая конфигурация – сочетание с повторениями.

Пример.

Оценка на экзамене:

неудовлетворительно	2
удовлетворительно	3
хорошо	4
отлично	5

В сессию нужно сдать пять экзаменов.

Результат сессии – набор оценок, где порядок оценок не важен, а количество повторов – важно (5 5 4 4 4 = 5 4 4 4 5 ≠ 4 4 5 5 5)

Сколько разных результатов сессии может быть?

Закодируем результат сессии последовательностью:

$$\underbrace{1\ldots1}_{\substack{\text{кол}-\text{во}\\ 2}}0\underbrace{1\ldots1}_{\substack{\text{кол}-\text{во}\\ 3}}0\underbrace{1\ldots1}_{\substack{\text{кол}-\text{во}\\ 4}}0\underbrace{1\ldots1}_{\substack{\text{кол}-\text{во}\\ 5}}.$$

Последовательность содержит пять раз 1 и три раза 0, всего восемь цифр.

Количество всех различных результатов сессии равно количеству способов поставить единицы в последовательности из 8 позиций, т.е.

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} = 56.$$

Такой же результат получится, если подсчитать количество способов поставить нули в последовательности из 8 позиций, т.е. C_8^3.

Опр. Сочетанием с повторениями из n по m называется система из m неупорядоченных элементов, каждый элемент может быть любого из n типов.

Обозначим $H(n, m)$ число всех сочетаний с повторениями из n по m.

Теорема.

$$H(n,m) = C_{n+m-1}^{m} = C_{n+m-1}^{n-1}.$$

Доказательство аналогично примеру.

§4. Рекуррентные соотношения. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Примеры.

1) $P_n = n \cdot P_{n-1}$;

2) $b_n = q \cdot b_{n-1}$;

3) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$;

4) $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}$.

$\Phi_1 = 1$; $\Phi_2 = 1$ – последовательность Фиббоначи.

Неформальное определение: рекуррентным соотношением называется выражение функции от каких-то параметров через значения этой же функции от меньших параметров.

В дальнейшем будем рассматривать $f(n)\colon\ N \to R$ или $f(n)\colon\ N \cup \{0\} \to R$, значения которых записываются в виде последовательности $a_1, a_2, ..., a_n$ или $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$.

Опр. Рекуррентным соотношением по n называется равенство $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-p}, n)$, где p – порядок рекурсии (глубина рекурсии).

Опр. Решением рекурсии (исключение рекурсии) называется выражение $a_n = f(n)$, указывающее явную зависимость от n значений последовательности.

Примеры.

1) $P_n = n \cdot P_{n-1} \Rightarrow P_n = n!$;

2) $b_n = q \cdot b_{n-1} \Rightarrow b_n = b_0 \cdot q^n$;

4) Последовательность Фиббоначи: $\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}$.

$\Phi_n = ?$

Опр. Линейным неоднородным рекуррентным соотношением порядка p, с постоянными коэффициентами, называется равенство

$$a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \ldots + k_p a_{n-p} + g(n).$$

Опр. Линейным **однородным** рекуррентным соотношением порядка p, с постоянными коэффициентами, называется равенство

$$a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \ldots + k_p a_{n-p}.$$

Опр. Пусть $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2}$. Назовем его характеристическим уравнением $x^2 = k_1 x + k_2$.

Теорема (о линейных однородных рекуррентных соотношениях, порядка 2, с постоянными коэффициентами).
Если $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2}$, то $a_n = f(n) = C_1 \cdot f_1(n) + C_2 \cdot f_2(n)$.
(1) Если у характеристического уравнения два различных действительных корня $q_1 \neq q_2$, то $f_1(n) = q_1^n$, $f_2(n) = q_2^n$.
(2) Если у характеристического уравнения два совпавших действительных корня $q_1 = q_2$, то $f_1(n) = q_1^n$, $f_2(n) = n q_1^n$.
(3) Если у характеристического уравнения два различных комплексных корня $q_{1,2} = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$, то $f_1(n) = r^n \cos(n\varphi)$, $f_2(n) = r^n \sin(n\varphi)$.

Значения констант C_1, C_2 определяются в зависимости от двух начальных значений a_1, a_2 (или a_0, a_1).

Замечание: Общим решением рекуррентного отношения называют $a_n = C_1 \cdot f_1(n) + C_2 \cdot f_2(n)$, где C_1, C_2 – обозначения для всех возможных значений констант.

Доказательство теоремы:

1. Покажем, что в случае существования у характеристического уравнения действительного корня q выполняется, что $f(n)=q^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2}$.

$q^n = k_1 q^{n-1} + k_2 q^{n-2} \Leftrightarrow q^2 = k_1 q + k_2$ – верно.

Замечание: случай $q = 0$ равносилен $k_2 = 0$, тогда. рекуррентное соотношение будет первого порядка.

2. Покажем, что в случае существования у характеристического уравнения совпавших действительных корней $q_1 = q_2$ выполняется, что $f(n) = nq_1^n$ также удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2}$.

$$nq_1^n = k_1(n-1)q_1^{n-1} + k_2(n-2)q_1^{n-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow nq_1^n = k_1 n q_1^{n-1} - k_1 q_1^{n-1} + k_2 n q_1^{n-2} - 2k_2 q_1^{n-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow nq_1^2 = k_1 n q_1 - k_1 q_1 + k_2 n - 2k_2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ 0 = -k_1 q_1 \ - 2k_2$ – верно, т.к. корень характеристического уравнения с нулевым дискриминантом равен $q_1 \ = \dfrac{k_1 \pm \sqrt{0}}{2}$, и условие равенства нулю дискриминанта равносильно $(-k_1)^2 - 4(-k_2) = 0$.

2. Покажем, что в случае существования у характеристического уравнения комплексных корней $q_{1,2} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ выполняется, что $f(n) = r^n\cos(n\varphi)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2}$.

$q_1^n = k_1 q_1^{n-1} + k_2 q_1^{n-1} \Leftrightarrow q_1^2 = k_1 q_1^1 + k_2$ – верно.

Подставим в рекуррентное соотношение $q_1^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi) +$$
$$+ r^{n-2}(\cos(n-2)\varphi + i\sin(n-2)\varphi).$$

Равенство с комплексными числами верно, только если равны действительные части и мнимые.

$$r^n\cos n\varphi = r^{n-1}\cos(n-1)\varphi + r^{n-2}\cos(n-2)\varphi \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $r^n\cos(n\varphi)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению.

Для $f(n) = r^n\sin(n\varphi)$ аналогичное доказательство. Теорема доказана.

Опр. Пусть $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + ... + k_p a_{n-p}$. Назовем его характеристическим уравнением $x^p = k_1 x^{p-1} + k_2 x^{p-2} + ... + k_{p-1} x + k_p$.

Теорема (о линейных однородных рекуррентных соотношениях, порядка p, с постоянными коэффициентами).

Если $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + ... + k_p a_{n-p}$, то

$$a_n = f(n) = C_1 \cdot f_1(n) + C_2 \cdot f_2(n) + ... + C_p \cdot f_p(n).$$

(1) Каждому действительному корню q (характеристического уравнения) кратности 1, соответствует $f_i(n) = q^n$;

(2) Каждому действительному корню q кратности m, соответствует

$$f_i(n) = q^n,\ f_{i+1}(n) = n \cdot q^n, ..., f_{i+m-1}(n) = n^{m-1} q^n;$$

(3) Каждой паре комплексных корней $q_{1,2} = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)$ кратности 1, соответствует $f_i(n) = r^n \cos(n\varphi)$, $f_{i+1}(n) = r^n \sin(n\varphi)$;

(4) Каждой паре комплексных корней $q_{1,2} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ кратности m, соответствует $f_i(n) = r^n \cos(n\varphi)$,

$f_{i+1}(n) = n \cdot r^n \cos(n\varphi)$, …, $f_{i+m-1}(n) = n^{m-1} r^n \cos(n\varphi)$,

$f_{i+m}(n) = r^n \sin(n\varphi)$,

$f_{i+m+1}(n) = n \cdot r^n \sin(n\varphi)$,…, $f_{i+2m-1}(n) = n^{m-1} r^n \sin(n\varphi)$;

Теорема (о линейных неоднородных рекуррентных соотношениях, порядка p, с постоянными коэффициентами).

Если $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \ldots + k_p a_{n-p} + g(n)$, то $a_n = P(n, C_1, C_2, \ldots, C_p) + Q(n)$, где $P(n, C_1, C_2, \ldots, C_p)$ – общее решение однородного соотношения $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + \ldots + k_p a_{n-p}$, и $Q(n)$ – «частное решение» исходного неоднородного соотношения.

Замечание: $Q(n)$ может быть похожа на $g(n)$.

Пример.

$a_n = 5a_{n-1} + 4,\ a_1 = 1$.

Метод исключения неоднородности:

Пусть $a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + ... + k_p a_{n-p} + g(n)$.

Тогда $a_{n-1} = k_1 a_{n-2} + k_2 a_{n-3} + ... + k_p a_{n-p-1} + g(n-1)$.

1) Если $g(n)$ = const, то $g(n) - g(n-1) \equiv 0$. Тогда

$a_n - a_{n-1} = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + ... + k_p a_{n-p} - k_1 a_{n-2} - k_2 a_{n-3} - ... - k_p a_{n-p-1}$ –

новое рекуррентное соотношение, однородное.

Пример.

$a_n = 5a_{n-1} + 4$, $a_1 = 1$.

2) Если $g(n)$ – многочлен, то $g(n) - g(n-1)$ – многочлен меньшей степени. Тогда после вычитания получим неоднородное рекуррентное соотношение, в котором многочлен можно продолжать понижать до константы.