Глава II. Комбинаторика

§ 1. Основные комбинаторные конфигурации и формулы

Комбинаторика = комбинаторный анализ – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов конечного множества в соответствии с некоторыми правилами.

Целью комбинаторного анализа является изучение комбинаторных конфигураций: вопросы их существования, алгоритмы построения, перечисление и подсчет количества.

Неформальная постановка задачи: Дано конечное множество Ω. Найти количество всех комбинаторных конфигураций определенного вида. Комбинаторная конфигурация – выборка элементов из Ω.

При вычислениях используют два правила (принципы комбинаторики).

Правило суммы.
Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – попарно не пересекающиеся множества, каждое S_i содержит n_i элементов (вариантов). Выбираемый элемент принадлежит либо S_1, либо S_2, …, либо S_k.
Тогда количество всех возможных различных вариантов выбора элемента равно $n_1 + n_2 + \ldots n_k$.

Правило суммы равносильно формуле
$$\left|S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k\right| = \left|S_1\right| + \left|S_2\right| + \ldots + \left|S_k\right|,$$
где множества попарно не пересекаются.

Правило произведения (основной принцип комбинаторики).
Пусть имеется k независимых характеристик элементов, каждая i-ая характеристика имеет n_i различных вариантов.
Тогда количество всех возможных различных вариантов выбора элемента равно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пример.
1. Автомобиль – 3 модели, 5 окрасок.

Разных вариантов = 3 · 5 = 15 вариантов.

2. Автомобиль – 3 модели, 5 окрасок, 2 вида шин.

Разных вариантов = $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ вариантов.

Пусть упорядоченная выборка содержит n элементов (не обязательно различных), каждый элемент может быть любым из t типов.

Опр. Пусть множество Ω состоит из t элементов. Словом длины n над алфавитом Ω называется упорядоченный набор $a_1 a_2 \dots a_n$, где $a_i \in \Omega$.

Теорема.
Количество всех слов длины n над алфавитом Ω равно t^n.

Доказательство:
Для выбора каждой буквы a_i имеется вариантов. По принципу умножения количество всех вариантов $\underbrace{t \cdot t \cdot \ldots \cdot t}_{n} = t^n$.

Пример.
Количество буквенных кодов в номерах автомобилей равно
$12^3 = 1728$.

$\Omega = \{а, в, е, к, м, н, о, р, с, т, у, х\}$, $|\Omega| = 12$.
Буквенный код – слово длины 3 над алфавитом Ω.

Замечание. Слово длины n над алфавитом Ω является всюду определенным отображением $\varphi:\{1,2,\ldots,n\}\to\Omega$. Следовательно, количество всех таких отображений равно t^n, где $t=|\Omega|$.

Опр. Пусть множество Ω состоит из n элементов. Перестановкой множества Ω называется упорядоченная последовательность $a_1 a_2 \dots a_n$ различных элементов, где $a_i \in \Omega$.

Обозначим P_n количество всех различных перестановок (зависит только от n).

$P(n)$

Теорема.
$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Опр. Назовем n-факториалом число $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, если $n \geq 1$, и $0! = 1$.

Теорема.

$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$.

Доказательство:

Для наглядности представим n ячеек (кармашков), в которые по одному помещают элементы множества Ω.

$$\underset{1}{\bigcup} \quad \underset{2}{\bigcup} \quad \ldots \quad \underset{n}{\bigcup}$$

Для 1-ой ячейки $-\ n$ вариантов.

Если 1-ая занята, для 2-ой ячейки $-\ (n-1)$ вариантов.

Если 1-ая и 2-ая заняты, для 3-ой ячейки $-\ (n-2)$ вариантов.

И т.д.

Для n -ой ячейки $-\ 1$ вариант.

По принципу умножения количество всех вариантов
$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot1=n!$.

Пример.
Количество номеров сотового телефона, где все цифры различные, равно $P_{10}=10!$.

Замечание. Перестановка множества Ω является биекцией (взаимно однозначным отображением) $\varphi:\{1,2,\ldots,n\}\to\Omega$, где $n=|\Omega|$. Следовательно, количество всех таких биекций равно $P_n = n!$.

Другая комбинаторная конфигурация – размещение – получается, когда количество ячеек меньше, чем количество элементов Ω.

Опр. Пусть множество $|\Omega| = n$. Размещением из n по m называется упорядоченная последовательность $a_1 a_2 \ldots a_m$ различных элементов, где $a_i \in \Omega$.

Обозначим A_n^m количество всех различных размещений из n по m (зависит только от n и m).

$A(n, m)$

Теорема.

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Доказательство:

Для наглядности представим m ячеек (кармашков), в которые по одному помещают элементы множества Ω.

$$\underset{1}{\bigcup} \quad \underset{2}{\bigcup} \quad \ldots \quad \underset{m}{\bigcup}$$

Для 1-ой ячейки $-\ n$ вариантов.

Если 1-ая занята, для 2-ой ячейки $-\ (n-1)$ вариантов.

Если 1-ая и 2-ая заняты, для 3-ой ячейки $-\ (n-2)$ вариантов.

И т.д.

Для m-ой ячейки $-\ (n-m+1)$ вариант.

По принципу умножения количество всех вариантов

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)=$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot\ldots\cdot 1}{(n-m)\cdot\ldots\cdot 1}=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример.

Количество номеров городского телефона, где все цифры различные, равно $A_{10}^{7}=\dfrac{10!}{(10-7)!}=\dfrac{10!}{3!}$.

Замечание 1. Перестановка из n элементов является размещением из n по n. Следовательно, $P_n = A_n^n$.

Замечание 2. Размещение из n по m является всюду определенной инъекцией $\varphi:\{1,2,\ldots,m\}\to\Omega$, где $n=|\Omega|$. Следовательно, количество всех таких инъекций равно A_n^m.

Ещё одна комбинаторная конфигурация – сочетание – неупорядоченная выборка, т.е. множество.

Опр. Пусть множество |Ω| = *n*. Сочетанием из *n* по *m* называется неупорядоченный набор $a_1, a_2, \ldots, a_m$ различных элементов, где $a_i \in \Omega$.

Обозначим C_n^m количество всех различных сочетаний из *n* по *m* (зависит только от *n* и *m*).

$C(n, m)$, $\binom{m}{n}$

Теорема.

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Доказательство:
Каждое сочетание из n по m можно упорядочить, получив размещение из n по m. Число способов упорядочить набор из m элементов равно $P_m = m!$.

Следовательно, $A_n^m = C_n^m \cdot m!$. Т.е. $\frac{n!}{(n-m)!} = C_n^m \cdot m!$

Пример.
Количество всех трехэлементных подмножеств множества

$\Omega = \{а, в, е, к, м, н, о, р, с, т, у, х\}$ равно $C_{12}^{3} = \dfrac{12!}{3! \cdot 9!} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 220$.

Замечание. Рассмотрим строго возрастающие функции $\varphi:\{1,2,\ldots,m\}\to\{1,2,\ldots,n\}$. Каждую такую функцию можно построить, выбрав m различных чисел из множества $\Omega=\{1,2,\ldots,n\}$, которые упорядочиваются по возрастанию единственным образом. Следовательно, количество всех таких функций равно C_n^m.

§ 2. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Обобщение бинома

Опр. Биномиальными коэффициентами называются числа

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Теорема (Бином Ньютона).

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot a^m \cdot b^{n-m}.$$

Теорема (Бином Ньютона).

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot a^m \cdot b^{n-m}.$$

Доказательство 1 (интуитивное):

$$(a+b)^n = \underset{1}{(a+b)} \cdot \ldots \cdot \underset{n}{(a+b)}.$$

Раскрывая скобки получим сумму слагаемых вида $a^m \cdot b^{n-m}$, из каждой скобки участвует либо a, либо b.

Для каждого m количество слагаемых $a^m \cdot b^{n-m}$ равно количеству вариантов выбора скобок, из которых участвует a, причем порядок номеров скобок не важен. Следовательно, количество вариантов равно C_n^m.

Теорема (Бином Ньютона).

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot a^m \cdot b^{n-m}\ .$$

Доказательство 2 (индукция по n):

Б.И. $n=1$. $(a+b)^1 \overset{?}{=} \sum_{m=0}^{1} C_n^m \cdot a^m \cdot b^{1-m} = C_1^0 \cdot a^0 \cdot b^1 + C_n^1 \cdot a^1 \cdot b^0 = b+a\ ,$

где $C_1^0=\dfrac{1!}{0!\cdot 1!}=1$, $C_1^1=\dfrac{1!}{1!\cdot 0!}=1$. Верно.

Ш.И. Пусть формула верна для степени (n – 1), т.е.

$$(a+b)^{n-1}=\sum_{m=0}^{n-1}C_{n-1}^{m}\cdot a^{m}\cdot b^{n-1-m}.$$

Тогда $(a+b)^{n}=(a+b)\cdot(a+b)^{n-1}=(a+b)\cdot\sum_{m=0}^{n-1}C_{n-1}^{m}\cdot a^{m}\cdot b^{n-1-m}=$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}C_{n-1}^{m}\cdot a^{m+1}\cdot b^{n-1-m}+\sum_{m=0}^{n-1}C_{n-1}^{m}\cdot a^{m}\cdot b^{n-1-m+1}=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}C_{n-1}^{m}\cdot a^{m+1}\cdot b^{n-1-m}+\sum_{m=0}^{n-1}C_{n-1}^{m}\cdot a^{m}\cdot b^{n-m}=$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^{m} \cdot a^{m+1} \cdot b^{n-1-m} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^{m} \cdot a^{m} \cdot b^{n-m} =$$

Сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые степени a и b.

$$= C_{n-1}^{0} \cdot a^{0} \cdot b^{n} + C_{n-1}^{n-1} \cdot a^{n} \cdot b^{0} + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}) \cdot a^{k} \cdot b^{n-k} =$$

Упростим $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-(k-1))!} + \dfrac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)} = C_{n}^{k}.$$

Продолжим равенство

$$= C_{n-1}^{0} \cdot a^{0} \cdot b^{n} + C_{n-1}^{n-1} \cdot a^{n} \cdot b^{0} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n}^{k} \cdot a^{k} \cdot b^{n-k} =$$

Вычислим $C_{n-1}^{0} = \dfrac{(n-1)!}{0! \cdot (n-1)!} = 1 = \dfrac{n!}{0! \cdot n!} = C_{n}^{0}$.

Аналогично $C_{n-1}^{n-1} = \dfrac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot 0!} = 1 = \dfrac{n!}{n! \cdot 0!} = C_{n}^{n}$. Следовательно,

$$= \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} \cdot a^{k} \cdot b^{n-k}.$$

Свойства биномиальных коэффициентов ($C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$).

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

2. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, где $1 \le m \le n-1$.

3. $C_n^0 = C_n^n = 1$.

4. Треугольник Паскаля

n	$m = 0, 1, \ldots, n$										
0						1					
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1

5. $\sum_{m=0}^{n} C_n^m =$

5. $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$.

Доказательство:

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot 1^m \cdot 1^{n-m} = (1+1)^n = 2^n.$$

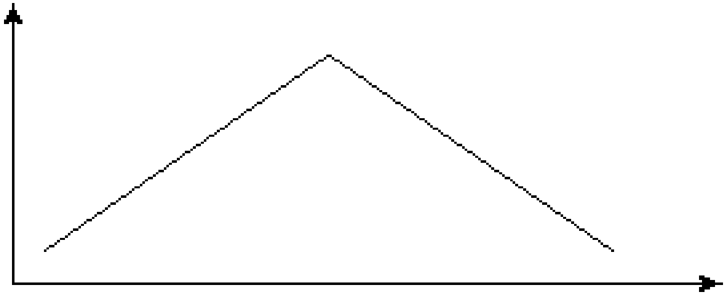
6. $\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m = \ ?$

6. $\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m = 0$, для $n \geq 1$.

Доказательство:

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot (-1)^m \cdot 1^{n-m} = (-1+1)^n = 0^n.$$

7. При фиксированном *n* переменном *m* последовательность C_n^m унимодальная, т.е. существует *k*, такая, что $C_n^0 < C_n^1 < \ldots < C_n^k \geq C_n^{k+1} > \ldots > C_n^n$.



Если *n* четное, то $k = \dfrac{n}{2}$, и $C_n^k > C_n^{k+1}$.

Если *n* нечетное, то $k = \dfrac{n-1}{2}$, и $C_n^k = C_n^{k+1}$.

8. Пусть $f(x) = (1+x)^n$.

При разложении в сумму получим биномиальные коэффициенты C_n^m как коэффициенты при соответствующей степени x^m.

Теорема (Обобщение бинома Ньютона).

$$(a_1+\ldots+a_S)^n=\sum_{\{k_1,\ldots,k_{S-1}\}}C(n;k_1,\ldots,k_{S-1})\cdot a_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot a_{S-1}^{k_{S-1}}\cdot a_S^{n-(k_1+\ldots+k_{S-1})}$$, где

$C(n;k_1,\ldots,k_{S-1})$ – число способов выбрать элементы $a_1,\ldots,a_S$ при раскрытии скобок.

Опр. Полиномиальными коэффициентами называются числа $C(n;k_1,\ldots,k_{S-1})$.

Теорема.

$$C(n;k_1,\ldots,k_{S-1})=C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-(k_1+\ldots+k_{S-2})}^{k_{S-1}}.$$