§6. Индуктивность. Вполне упорядоченные множества

Метод математической индукции на **N**:

Надо доказать, что некоторое свойство S выполняется для любого числа $x \in$ **N.**

$\boxed{\mathrm{S}(x) \text{ верно}}$

(База индукции) Б.И. Доказать, что S(1) верно.

(Шаг индукции) Ш.И. Доказать, что если S(k) верно, то S(k +1) тоже верно.

Из Б.И. и Ш.И. следует, S(x) верно для любого числа $x \in$ **N.**

Вопрос: можно ли подобные рассуждения использовать на множестве, не являющемся множеством натуральных чисел?

Пусть $(A, \leq)$ – ч.у.м..
S – свойство на элементах A.

Теорема. Следующие условия эквивалентны:
(И) «Условие индуктивности»

(М) «Условие минимальности»

(О) «Условие обрыва убывающих цепей».

Теорема. Следующие условия эквивалентны:
(И) «Условие индуктивности»
(М) «Условие минимальности»
(О) «Условие обрыва убывающих цепей».

(И) «Условие индуктивности»

$(A, \leq)$ удовлетворяет условию индуктивности, если для любого свойства S из того, что

(И1) все минимальные элементы из A удовлетворяют S, и
(И2) если для всех $x < a$, S(x) верно, то S(a) верно; следует

(И3) все элементы из A удовлетворяют S.

Теорема. Следующие условия эквивалентны:
(И) «Условие индуктивности»
(М) «Условие минимальности»
(О) «Условие обрыва убывающих цепей».

(М) «Условие минимальности»

$(A, \leq)$ удовлетворяет условию минимальности, если в любом его непустом подмножестве есть минимальный элемент.

Теорема. Следующие условия эквивалентны:
(И) «Условие индуктивности»
(М) «Условие минимальности»
(О) «Условие обрыва убывающих цепей».

(О) «Условие обрыва убывающих цепей».

$(A, \leq)$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей, если любая убывающая цепь $a_1 > a_2 > \ldots$ ~~конечна~~ стабилизируется на каком-то элементе a_n (т.е. после a_n можно записать только $a_n = a_n = \ldots$).

Доказательство теоремы проводится по круговой схеме:

(М) $\Rightarrow$ (И) $\Rightarrow$ (О) $\Rightarrow$ (М)

Доказательство (М) $\Rightarrow$ (И):

Пусть (A, $\le$) удовлетворяет (М), и выполняется (И1) и (И2) для свойства S, но существует хотя бы один элемент, не удовлетворяющий S.

Соберем $B = \{x \in A \mid S(x) \text{ не верно}\}$.

$B \ne \varnothing$, по (М) существует минимальный элемент $c \in B$.

Т.к. S(c) не верно, по (И1) c не является минимальным в A. Найдется в A минимальный элемент b: $b < c$, и S(b) верно.

По (И2) S(c) верно – противоречие.

(И) доказано.

Доказательство (И) $\Rightarrow$ (О):

Пусть $(A, \le)$ удовлетворяет (И),

$S(x)$ = «любая убывающая цепь, начинающаяся с x, обрывается».

Тогда все минимальные элементы в A удовлетворяют S (И1).

Если для всех $x < a$, $S(x)$ верно, то любая убывающая цепь вида $a > a_2 > \ldots$ обрывается. $S(a)$ верно (И2).

Выполнение (И1) и (И2) влечет (И3), т.е. $S(x)$ верно для любого x.

(О) доказано.

Доказательство (O) $\Rightarrow$ (M):

Пусть (A, $\leq$) удовлетворяет (O), $B \subseteq A$: $B \neq \varnothing$.

Выберем $b_1 \in B$. Если b_1 минимальный в B, то (M) доказано.

Пусть b_1 не минимальный. Тогда выберем $b_2 < b_1$ в B.

Если b_2 не минимальный, выберем $b_3 < b_2$ в B. И т.д.

На некотором шаге n получим минимальный b_n (по условию (O)).

Т.е. подмножество B содержит минимальный элемент.

(M) доказано. Теорема доказана.

Вывод: можно применять обобщение метода математической индукции на ч.у.м., удовлетворяющих условию (M) или (O).

Опр. Вполне упорядоченным множеством называется линейно упорядоченное множество с условием минимальности.

Замечание: если $(A, \leq)$ л.у.м., то в любом непустом подмножестве B минимальный элемент совпадает с наименьшим элементом в B.

Применение математической индукции на вполне упорядоченных множествах называется «метод трансфинитной индукции».

Теорема Цермело.
Любое непустое множество можно вполне упорядочить.

Теорема Цермело верна при выполнении аксиомы выбора:

Аксиома выбора: Для любого фиксированного непустого множества A в любом непустом подмножестве B можно выбрать элемент.

Пример.
(**Z**, ≤) – л.у.м., не являющееся вполне упорядоченным множеством, т.к. само **Z** не содержит минимального (наименьшего) элемента.

Определим новое отношение порядка $x \prec y$:
$$1 \prec 2 \prec 3 \prec \ldots \prec 0 \prec -1 \prec -2 \prec \ldots$$

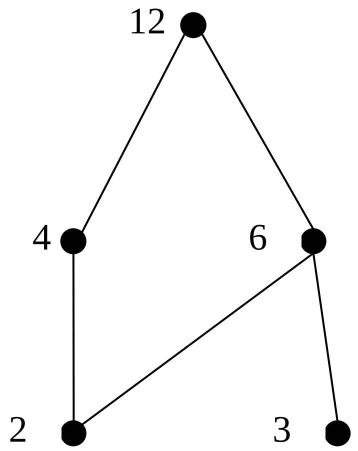
Тогда (**Z** , $\prec$) – вполне упорядоченное множество.

Вопрос: как вполне упорядочить **R**?

$\boxed{\text{Лемма Цорна.}}$

Опр. Пусть $(A, \leq)$ ч.у.м., $B \subseteq A$. Верхней гранью множества B называется любой элемент $u \in A$: для любого $x \in B$ выполняется $x \leq u$.

Пример.



$B = \{2, 3\}$

Лемма Цорна. Если в ч.у.м. $(A, \leq)$ любая цепь имеет хотя бы одну верхнюю грань, то в $(A, \leq)$ имеется максимальный элемент.