§3. Замкнутые классы. Полные классы.

Опр. Класс K булевых функций называется замкнутым относительно переименования аргументов, если для любой $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K$ и любого набора переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n \in V$ (среди которых возможны совпавшие переменные) выполняется
$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in K$.

Пример.

Класс $K = \{x \oplus y\}$ не является замкнутым относительно переименования аргументов, т.к. при замене переменных x и y на одинаковую переменную z, получим одноместную функцию, всегда равную 0, т.е. константу 0. Однако $\theta(z) \notin K$.

Опр. Класс K булевых функций называется замкнутым относительно суперпозиции, если для любой $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K$ и любых $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in K$,…, $g_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in K$ выполняется $f(g_1(x_1, \ldots x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots x_m)) \in K$.

Пример.

Класс $K = \{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ является замкнутым относительно суперпозиции, т.к. при замене переменных на произведения других переменных, получим функцию из K.

Опр. Класс K булевых функций называется замкнутым, если:
1) $\varepsilon(x) \in K$;
2) K замкнут относительно переименования аргументов;
3) K замкнут относительно суперпозиции.

Опр. Замыканием класса K называется пересечение всех замкнутых классов, содержащих как подмножество K.

$[K]$

Замечание: пересечение бесконечного набора множеств – множество, в которое входят элементы, принадлежащие всем множествам семейства.

Свойства замыканий:

1. $K \subseteq [K]$.

2. Если $K \subseteq P$, то $[K] \subseteq [P]$.

3. K замкнут $\Leftrightarrow$ $K = [K]$.

Опр. Класс K булевых функций называется полным, если $[K]$ равно классу всех булевых функций.

Замечание: если K полный, то любую булеву функцию можно выразить через функции класса K, используя суперпозицию и переименование аргументов.

Теорема.
Следующие классы полные:

1) $K_1 = \{x \cdot y, x \vee y, \overline{x}\}$;

2) $K_2 = \{x \cdot y, \overline{x}\}$;

3) $K_3 = \{x \vee y, \overline{x}\}$;

4) $K_4 = \{x \cdot y, x \oplus y, \theta(x), \iota(x)\}$.

Доказательство: 1. $K_1 = \{x \cdot y, x \vee y, \overline{x}\}$.

Покажем, что любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть выражена через функции из K_1.

Рассмотрим два случая.

1 случай: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ всегда принимает значение 0.

Тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot \overline{x_1}$.

2 случай: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает значение 1 при каких-нибудь значениях переменных.

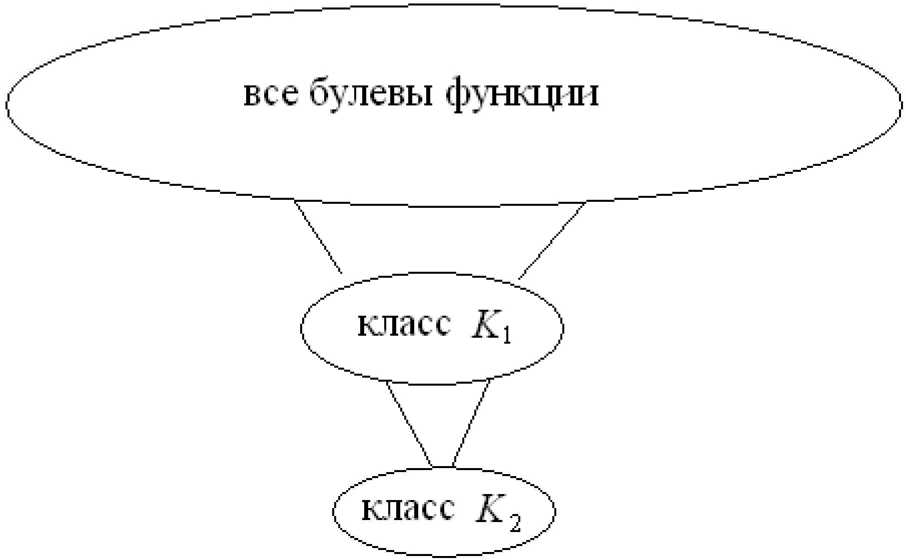
Если составить таблицу значений функции, то в ней будут строки со значением 1:

x_1	$\cdots$	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\ldots$			
			1
$\ldots$			

Запишем СДНФ, т.е. дизъюнкцию скобок, в каждой будет произведение переменных либо их отрицаний. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражена через функции из K_1.

2. $K_2 = \{x \cdot y, \overline{x}\}$.

Для доказательства полноты класса K_2 будем использовать метод сведения к известному полному классу K_1. Т.е покажем, что любая функция из K_1 может быть выражена через K_2.


все булевы функции
класс K_1
класс K_2

$$K_1 = \{x \cdot y, x \vee y, \overline{x}\},$$

$$K_2 = \{x \cdot y, \overline{x}\}.$$

Т.к. конъюнкция и отрицание напрямую присутствуют в K_2, остается доказать, что дизъюнкцию можно выразить через конъюнкцию и отрицание.

$$x \vee y = \overline{(\overline{x} \cdot \overline{y})}.$$

3. $K_3 = \{x \vee y, \overline{x}\}$.

Для доказательства полноты класса K_3 также будем использовать метод сведения к известному полному классу K_1. Т.е покажем, что любая функция из K_1 может быть выражена через K_3.

$$K_1 = \{x \cdot y, x \vee y, \overline{x}\},$$

$$K_3 = \{x \vee y, \overline{x}\}.$$

Т.к. дизъюнкция и отрицание напрямую присутствуют в K_3, остается доказать, что конъюнкцию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание.

$$x \cdot y = \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})}.$$

4. $K_4 = \{x \cdot y, x \oplus y, \theta(x), \iota(x)\}$.

Для доказательства полноты класса K_4 также будем использовать метод сведения к известному полному классу K_2. Т.е покажем, что любая функция из K_2 может быть выражена через K_4.

$K_2 = \{x \cdot y, \overline{x}\}$.

$K_4 = \{x \cdot y, x \oplus y, \theta(x), \iota(x)\}$.

Т.к. конъюнкция напрямую присутствует в K_4, остается доказать, что отрицание можно выразить через K_4.

$\overline{x} = x \oplus \iota(x)$.

Замечание.
Каждую функцию, записанную с использованием умножения, сложения, констант 0 и 1, называют полиномом Жегалкина.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}} a_{i_1,\ldots,i_k} \cdot x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}.$$

Следовательно, любая булева функция может быть записана как полином Жегалкина.

Пример.
$x \vee y = x \oplus y \oplus x \cdot y$.

Теорема.
Полином Жегалкина определяется однозначно.

Опр. Базисом класса всех булевых функций называется минимальный полный класс.

Пример. K_2, K_3 – базисы класса всех булевых функций.

§4. Классы функций, сохраняющих константы

Опр. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функцией, сохраняющей 0, если $f(0,0,\ldots,0) = 0$.

Опр. Обозначим T_0 класс всех функций, сохраняющих 0.

Пример.

$\theta(x),\ \varepsilon(x),\ x \cdot y,\ x \vee y,\ x \oplus y\ \in T_0$.

Утверждение.
Класс T_0 замкнут.

Доказательство:
1) $\varepsilon(x) \in T_0$;

2) при переименовании переменных равенство $f(0,0,\ldots,0)=0$ сохраняется;

3) при суперпозиции $f(g_1(0,\ldots,0),\ldots,g_n(0,\ldots,0)) = f(0,\ldots,0)=0$.

Опр. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функцией, сохраняющей 1, если $f(1,1,\ldots,1) = 1$.

Опр. Обозначим T_1 класс всех функций, сохраняющих 1.

Пример.
$\iota(x)$, $\varepsilon(x)$, $x \cdot y$, $x \vee y$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$ $\in T_1$.

Утверждение.

Класс T_1 замкнут.

§5. Класс самодвойственных функций

Опр. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется двойственной функцией к $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{(g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n))}$.

Опр. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется самодвойственной функцией, если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{(f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n))}$.

Замечание.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является самодвойственной функцией, если $\overline{(f(x_1, x_2, \dots, x_n))} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

Опр. Обозначим S класс всех самодвойственных функций.

Пример.

$\varepsilon(x),\ \overline{x}\ \in S$.

Проверка:

$$1 = \overline{(\theta(x))} \neq \theta(\bar{x}) = 0.$$

$$0 = \overline{(\iota(x))} \neq \iota(\bar{x}) = 1.$$

$$\overline{x} = \overline{(\varepsilon(x))} = \varepsilon(\bar{x}) = \overline{x}.$$

$$\overline{(\bar{x})} = \overline{(\bar{x})}.$$

$$\overline{x} \vee \overline{y} = \overline{(x \cdot y)} \neq \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{(x \vee y)} \neq \overline{x} \vee \overline{y}.$$

x	y	$\overline{(x \to y)}$	$\bar{x} \to \bar{y}$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1

т.е. $\overline{(x \to y)} \neq \bar{x} \to \bar{y}$.

x	y	$f(x,y)$
0	0	
0	1	*
1	0	$\overline{(*)}$
1	1	

Утверждение.
Класс S замкнут.

Лемма (о несамодвойственной функции).

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin S$ и $K = \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \overline{x} \}$, то $[K] \ni \theta(x), \iota(x)$.

Лемма (о несамодвойственной функции).

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin S$ и $K = \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \overline{x} \}$, то $[K] \ni \theta(x), \iota(x)$.

Доказательство:

Требуется показать, что константы $\theta(x)$ и $\iota(x)$ можно выразить через функции класса K.

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin S$, то существует набор $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$ значений переменных, для которых

$\overline{(f(a_1, a_2, \ldots, a_n))} \neq f(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$.

Это значит $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$.

Будем считать, что $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$, а остальные $a_{k+1} = \ldots = a_n = 1$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(\underbrace{x,\ldots,x}_{k},\bar{x},\ldots,\bar{x})$.

Функция $g(x) \in [K]$.

Ее значение $g(0) = f(\underbrace{0,\ldots,0}_{k},1,\ldots,1) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$

$$= f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) = f(\underbrace{1,\ldots,1}_{k},0,\ldots,0) = g(1).$$

Т.о. $g(x)$ является одной из констант (либо $\theta(x)$, либо $\iota(x)$).

Тогда $\overline{(g(x))}$ будет второй константой. Лемма доказана.