Глава V. Алгебра логики (булевы функции)

§1. Высказывания, формулы. Булевы функции: основные определения.

Опр. Высказывание – повествовательное предложение, о котором можно сказать: истинно оно или ложно.

Опр. Значение истинности высказывания – истина или ложь.

и	л
1	0

Высказывания делятся на простые и составные.

Опр. Составное высказывание получено из простых при помощи операций (связок).

Операции:

конъюнкция	$X \mathbin{\&} Y$	$X \wedge Y$
дизъюнкция	$X \vee Y$	
отрицание	$\neg X$	
импликация	$X \to Y$	
эквиваленция	$X \leftrightarrow Y$	

Опр. Конъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «и», т.е. «…X... и …Y…».

$X \& Y$

Опр. Дизъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «или», т.е. «…X... или …Y…».

$X \vee Y$

Опр. Конъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «и», т.е. «…X... и …Y…».
$X \,\&\, Y$

Опр. Дизъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «или», т.е. «…X... или …Y…».
$X \vee Y$

Опр. Отрицание высказывания X – высказывание, полученное при помощи приставки «не», т.е. «не …X...».
$\neg X$

Опр. Импликация высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи конструкции «Если …X..., то …Y…».

$X \to Y$

Опр. Импликация высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи конструкции «Если …X..., то …Y…».

$X \to Y$

Опр. Эквиваленция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи конструкции «…X..., если и только если …Y…».

$X \leftrightarrow Y$

Опр. Атомарная формула логики высказываний – заглавная буква латинского алфавита, с индексом или без, а также символ 0 или 1.

Опр. Формула логики высказываний – выражение одного из двух видов:
1) атомарная формула;
2) $(F)\ \&\ (G)$, $(F) \vee (G)$, $\neg(F)$, $(F) \to (G)$, $(F) \leftrightarrow (G)$,
где F и G – формулы логики высказываний.

Пример.
Формула $\neg X\ \&\ \mathrm{Y} \to Z$ означает $((\neg X)\ \&\ \mathrm{Y}) \to Z$.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$$

Пусть $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n \cup \ldots$ – множество символов функций, V – множество переменных.

Опр. Булевыми функциями называются выражения одного из двух видов:

1) $f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, где $f \in F_n$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$;

2) $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, где $f \in F_n$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – булевы функции.

Введем обозначения для некоторых функций.

Одноместные функции:

$\theta(x)$ – константа 0 (вариант: 0);

$\iota(x)$ – константа 1 (вариант: 1);

$\varepsilon(x)$ – тождественная функция (вариант: x);

$\bar{x}$ – отрицание (вариант: $\neg x$).

x	$\theta(x)$	$\iota(x)$	$\varepsilon(x)$	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Двухместные функции (инфиксное обозначение):

$x \cdot y$ – умножение (конъюнкция);
$x \vee y$ – дизъюнкция;
$x \to y$ – импликация;
$x \leftrightarrow y$ – эквиваленция;

Двухместные функции (инфиксное обозначение):

$x \cdot y$ – умножение (конъюнкция);
$x \vee y$ – дизъюнкция;
$x \to y$ – импликация;
$x \leftrightarrow y$ – эквиваленция;

$x \oplus y$ – сложение (по модулю 2)
$x \mid y$ – штрих Шеффера
$x \downarrow y$ – стрелка Пирса

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0					
0	1	0	1					
1	0	0	1					
1	1	1	1					

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1				
0	1	0	1	1				
1	0	0	1	0				
1	1	1	1	1				

Правило:
1) из ложной посылки можно вывести что угодно;
2) импликация ложна, только если из истинной посылки получается ложное заключение.

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1			
0	1	0	1	1	0			
1	0	0	1	0	0			
1	1	1	1	1	1			

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0		
0	1	0	1	1	0	1		
1	0	0	1	0	0	1		
1	1	1	1	1	1	0		

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0	1	
0	1	0	1	1	0	1	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	
1	1	1	1	1	1	0	0	

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Свойства функций (законы логики высказываний):

1) $f \cdot 1 \equiv f$

2) $f \vee 1 \equiv 1$

3) $f \cdot 0 \equiv 0$

4) $f \vee 0 \equiv f$

Пример доказательства:

f	$f \cdot 1$	$f \vee 0$
0	0	0
1	1	1

5) $f \cdot f \equiv f$ 6) $f \vee f \equiv f$ Идемпотентность

7) $f \cdot g \equiv g \cdot f$ 8) $f \vee g \equiv g \vee f$ Коммутативность

9) $(f \cdot g) \cdot h \equiv f \cdot (g \cdot h)$

Ассоциативность

10) $(f \vee g) \vee h \equiv f \vee (g \vee h)$

Следствие:
$f \cdot g \cdot h$;
$f \vee g \vee h$.

11) $f \cdot (g \vee h) \equiv (f \cdot g) \vee (f \cdot h)$

Дистрибутивность

12) $f \vee (g \cdot h) \equiv (f \vee g) \cdot (f \vee h)$

13) $f \cdot (f \vee h) \equiv f$

Законы поглощения

14) $f \vee (f \cdot h) \equiv f$

Пример доказательства:

f	h	$f \vee h$	$f \cdot (f \vee h)$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

15) $f \cdot \overline{f} \equiv 0$ Закон противоречия

16) $f \vee \overline{f} \equiv 1$ Закон исключенного третьего

17) $\overline{(f \cdot g)} \equiv \overline{f} \vee \overline{g}$

Законы де Моргана

18) $\overline{(f \vee g)} \equiv \overline{f} \cdot \overline{g}$

19) $\overline{\overline{f}} \equiv f$ Закон двойного отрицания

20) $f \to g \equiv \overline{f} \vee g$ Выражение импликации

21) $f \leftrightarrow g \equiv (f \to g) \cdot (g \to f)$ Выражение эквиваленции

§2. Нормальные формы

Опр. Литерал – переменная или ее отрицание.
(не константа 0 и 1).

Элементарная конъюнкция – литерал или конъюнкция литералов.

Опр. Функция f имеет дизъюнктивно-нормальную форму (ДНФ), если она является элементарной конъюнкцией или дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

$$(\ldots . \cdot \ldots . \cdot \ldots) \vee (\ldots . \cdot \ldots .) \vee (\ldots \quad) \ldots$$

Теорема 1.
Для всякой функции f существует тождественно равная функция, имеющая ДНФ.

Опр. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет совершенную дизъюнктивно-нормальную форму (СДНФ) относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если:

1) в записи f участвуют только $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

2) f имеет ДНФ, т.е. $f = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$;

3) Каждая C_i содержит или x_j, или $\overline{x_j}$, для любого j.

4) f не содержит одинаковых элементарных конъюнкций.

Опр. Булева функция называется выполнимой, если она не равна константе 0.

Теорема 2.

Для всякой выполнимой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существует тождественно равная функция, имеющая СДНФ.

Доказательство:

Если составить таблицу значений функции, то в ней будут строки со значением 1:

x_1	$\cdots$	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\ldots$			
			1
$\ldots$			

Запишем дизъюнкцию скобок, количество скобок равно количеству строк, где значение функции 1. В каждой скобке будет произведение переменных либо их отрицаний: если значение переменной 1 – используется эта переменная, если значение переменной 0 – используется отрицание этой переменной.

Полученная дизъюнкция скобок имеет СДНФ, и тождественно равна $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Теорема 2 доказана.

Замечание: если f выполнимая, то существует СДНФ $\Rightarrow$ существует ДНФ.

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$, то $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv x_1 \cdot \overline{x_1}$ – ДНФ.

Теорема 1 доказана.

Элементарная дизъюнкция – литерал или дизъюнкция литералов.

Опр. Функция *f* имеет конъюнктивно-нормальную форму (КНФ), если она является элементарной дизъюнкцией или конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

$(\ldots . \vee \ldots . \vee \ldots) \cdot (\ldots . \vee \ldots .) \cdot (\ldots) \ldots$

Теорема 3.
Для всякой функции f существует тождественно равная функция, имеющая КНФ.

Опр. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет совершенную конъюнктивно-нормальную форму (СКНФ) относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если:

1) в записи *f* участвуют только $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

2) f имеет КНФ, т.е. $f = D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_k$;

3) Каждая D_i содержит или x_j, или $\overline{x_j}$, для любого *j*.

4) *f* не содержит одинаковых элементарных дизъюнкций.

Опр. Булева функция называется тождественно истинной, если она равна константе 1.

Теорема 4.

Для всякой не тождественно истинной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существует тождественно равная функция, имеющая СКНФ.

Доказательство:

Если составить таблицу значений функции, то в ней будут строки со значением 0:

x_1	$\cdots$	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\ldots$			
			0
$\ldots$			

Запишем конъюнкцию скобок, количество скобок равно количеству строк, где значение функции 0. В каждой скобке будет дизъюнкция переменных либо их отрицаний: если значение переменной 0 – используется эта переменная, если значение переменной 1 – используется отрицание этой переменной.

Полученная конъюнкция скобок имеет СКНФ, и тождественно равна $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Теорема 4 доказана.

Замечание: если f не тождественно истинная, то существует СКНФ $\Rightarrow$ существует КНФ.

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 1$, то $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv x_1 \vee \overline{x_1}$ – КНФ.

Теорема 3 доказана.