ФГАОУ ВПО Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

На правах рукописи

ПЛЮЩЕНКО Андрей Николаевич

УДК 512.531

О КОМБИНАТОРНЫХ СВОЙСТВАХ БЕРНСАЙДОВЫХ ПОЛУГРУПП

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физика-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Шур Арсений Михайлович

Екатеринбург 2011 г.

Оглавление

Введение

Теория бернсайдовых полугрупп, или полугрупп с тождеством $x^n = x^{n+m}$ для некоторых $n, m \geqslant 1$ занимает важное место в теории периодических полугрупп. Бернсайдовы полугруппы естественным образом возникают при рассмотрении полугрупп с ограниченным периодом. Проблематика бернсайдовых полугрупп естественным образом развивает аналогичную проблематику для бернсайдовых групп, т. е. групп с тождеством вида $x^m = 1$. Изучение последних было начато в 1902 году Бернсайдом, интересовавшимся, всякая ли конечно порожденная группа с ограниченным периодом конечна (так называемая *ограниченная проблема Бернсайда*).

Важнейшими объектами для исследования, несомненно, являются *свободные* бернсайдовы полугруппы, то есть полугруппы, свободные в многообразии $\mathbf{var}\{x^n = x^{n+m}\}$ (для фиксированных $n, m \geqslant 1$), поскольку всякая полугруппа из $\mathbf{var}\{x^n = x^{n+m}\}$ есть гомоморфный образ подходящей свободной бернсайдовой полугруппы.

Свободным бернсайдовым полугруппам посвящено немало исследований, проясняющих многие особенности их внутренней структуры. Был разработан соответствующий инструментарий для изучения таких полугрупп, использующий как теоретико-групповые методы, так и методы теории формальных языков (в этом случае элементы свободной бернсайдовой полугруппы рассматриваются как классы эквивалентных слов над соответствующим алфавитом), методы общей комбинаторики и теории графов. Краткий обзор результатов приводится ниже в § 2°. Более подробно с теорией бернсайдовых полугрупп можно ознакомиться, например, по обзорной статье [20], немало интересных сведений можно почерпнуть из книг по теории полугрупп [3, 15] и др.

Важнейшей алгоритмической проблемой теории бернсайдовых полугрупп является *проблема равенства слов*: по двум заданным словам над алфавитом из свободных порождающих определить, представляют ли эти слова один и тот же элемент данной полугруппы. Тесным образом решение проблемы равенства слов связано с гипотезой о том, что любой элемент свободной бернсайдовой полугруппы является рациональным языком. Эта гипотеза, сформулированная Бжозовским в 1969 году для полугрупп с тождеством $x^n = x^{n+1}$, была затем расширена Маккаммондом на случай произвольных n и m. Заметим, что из справедливости (обобщенной) гипотезы Бжозовского вытекает разрешимость проблемы равенства слов в рассматриваемой полугруппе.

Центральное место в диссертации отведено исследованию проблемы равенства слов и гипотезы Бжозовского для свободных бернсайдовых полугрупп. К настоящему времени, благодаря целому ряду работ, удалось подтвердить гипотезу Бжозовского и, как следствие, решить проблему равенства слов для случая $n \geqslant 3$. Значимые результаты получены и для полугрупп с $n = 1$ (см. § 2°). Наименее изученными остаются полугруппы с тождеством $x^2 = x^{2+m}$: проблема равенства слов в этом случае до сих пор не решена, а гипотеза Бжозовского при бо́льших значениях m оказывается неверной. В данной работе рассматриваются полугруппы с тождеством $x^2 = x^3$, для которых обе исследуемые проблемы остаются открытыми. Часть полученных в диссертации результатов обобщается на случай $n = 2$ и произвольного m. Отметим, что важность изучения именно свободных бернсайдовых полугрупп с тождеством $x^2 = x^3$ была подчеркнута Бжозовским, включившим еще в 1980 году проблему равенства слов для таких полугрупп в список открытых проблем [9].

1° Предварительные сведения

В этом параграфе мы приводим базовые определения и обозначения, необходимые для понимания результатов диссертации. Большой объем справочной информации по данной тематике содержится в [3, 28].

1°.1 Слова

1. *Алфавит* Σ — это непустое множество, элементы которого называются *буквами* или *символами.* В данной работе рассматриваются только конечные алфавиты. В дальнейшем, $\Sigma_k = \{1, \ldots, k\}$, где $k = 1, 2, \ldots$. Для обозначения некоторой (неизвестной) буквы в слове используются строчные латинские буквы из начала алфавита.

Словом называется произвольная конечная последовательность букв: $W = a_1 a_2 \ldots a_n$. Число n называется *длиной слова* W. Длина слова W обозначается через $|W|$, а его i-ая буква — через $W[i]$. Таким образом, $W = W[1]W[2]\ldots W[|W|]$ или просто $W = W[1\ldots|W|]$. Символ λ обозначает *пустое слово*, имеющее длину 0. Для обозначения слов используются заглавные латинские буквы из второй половины алфавита.

2. Обозначения Σ^*, Σ^+, Σ^n используются, соответственно, для множества всех слов, всех непустых слов, слов длины n над алфавитом Σ. Множества Σ^+ и Σ^* образуют, соответственно, свободную полугруппу и свободный моноид относительно операции *конкатенации* (*приписывания*). Конкатенация слов U и V записывается как UV. Положим

$$U^n = \underbrace{UU\ldots U}_{n}$$

для обозначения *n-ой степени* слова U; по определению, $U^0 = \lambda$.

Слово Y называется *подсловом* слова U (обозначается $Y \leqslant U$), если существуют такие слова X, $Z \in \Sigma^*$, что $U = XYZ$. Слово Y называется *собственным подсловом* слова U

(обозн. $Y < U$), если $Y \leqslant U$ и $Y \neq U$. Наконец, слово Y будем называть *внутренним подсловом* слова U (обозначается $Y \ll U$), если существуют такие слова $X, Z \in \Sigma^+$, что $U = XYZ$. Таким образом, внутреннее подслово Y начинается не раньше второй буквы в слове U и заканчивается не позже предпоследней буквы, то есть содержится целиком внутри U. Слово Y называется *префиксом* (*суффиксом*) слова U, если существует слово $Z \in \Sigma^*$ такое, что $U = YZ$ (соответственно, $U = ZY$). Если при этом слово Z непустое, Y называется *собственным префиксом* (соответственно, *собственным суффиксом*) слова U.

Подслово Y может входить в слово U несколькими способами; каждое такое *вхождение* Y в U однозначно определяется позицией первой буквы слова Y в U. *Расстояние между вхождениями* — это разность соответствующих позиций. В дальнейшем под термином «подслово» часто понимается конкретное вхождение какого-то подслова: из контекста будет понятно, идет ли речь о подслове или о его вхождении.

3. *Периодом слова* W называется число p со свойством: $W[i] = W[i+p]$ для любого $i = 1, \ldots, |W|-p$. *Экспонентой* $\mathsf{exp}(W)$ *слова* W называется отношение длины слова W к его минимальному периоду, а *локальной экспонентой* $\mathsf{lexp}(W)$ — максимум из экспонент всех подслов слова W. Наконец, введем понятие *сильно локальной экспоненты* $\mathsf{lexp}_<(W)$ *слова* W как максимум из экспонент всех **собственных** подслов слова W.

Проиллюстрируем введенные в предыдущем абзаце определения примерами.

$W = 123123$	имеет период 3;	$\|W\| = 6$, $\mathsf{exp}(W) = \mathsf{lexp}(W) = 2$, $\mathsf{lexp}_<(W) = 5/3$;
$W = 1211121$	имеет периоды 4 и 6;	$\|W\| = 7$, $\mathsf{exp}(W) = 7/4$, $\mathsf{lexp}(W) = 3$, $\mathsf{lexp}_<(W) = 3$;
$W = 111$	имеет периоды 1 и 2;	$\|W\| = 3$, $\mathsf{exp}(W) = 3$, $\mathsf{lexp}(W) = 3$, $\mathsf{lexp}_<(W) = 2$.

Слово W называется *β-свободным*, если $\mathsf{lexp}(W) < \beta$, и называется *β^+-свободным*, если $\mathsf{lexp}(W) \leqslant \beta$. Аналогично, слово W мы назовем *почти β-свободным* (*почти β^+-свободным*), если, соответственно, $\mathsf{lexp}_<(W) < \beta$ и $\mathsf{lexp}_<(W) \leqslant \beta$. [Почти] 2-свободные, (3-свободные, 2^+-свободные) слова называют также [почти] *бесквадратными* (соответственно, *бескубными*, *сильно бескубными*) словами.

Пусть $\beta' < \beta''$. Очевидно, что любое β'- или β'^+-свободное слово является также и β''- или, соответственно, β''^+-свободным. Аналогичное утверждение справедливо и для почти свободных слов. Однако слово W может быть почти β'- или β'^+-свободным, но не являться β''- или β''^+-свободным. Так, например, слово 111 почти сильно бескубно, но при этом оно является кубом.

4. *Морфизмом* называется гомоморфизм свободных моноидов. Единственный нетривиальный автоморфизм свободного моноида Σ_2^* называется *операцией инвертирования* и обозначается $\overline{}$. Таким образом, операция инвертирования переобозначает буквы в слове: $\overline{1} = 2$, $\overline{2} = 1$.

Морфизм Туэ-Морса $\theta\colon \Sigma_2^* \to \Sigma_2^*$ задается равенствами $\theta(1) = 12$ и $\theta(2) = 21$. Обозначим $\mathbf{t}_n = \theta^n(1)$, тогда $\overline{\mathbf{t}}_n = \theta^n(2)$. Слова $\mathbf{t}_n$ и $\overline{\mathbf{t}}_n$ называются *словами Туэ-Морса.*

Очевидно, морфизм Туэ-Морса инъективен. Обратное отображение из $\theta(\Sigma_2^*)$ в свободный моноид Σ_2^* обозначается через θ^{-1}.

1°.2 Языки и автоматы

1. *Языком над алфавитом* Σ называют произвольное подмножество свободного моноида Σ^*. Напомним определения основных операций над языками. Под *объединением языков* $\mathcal{L}$ *и* $\mathcal{K}$ (обозначается $\mathcal{L} \cup \mathcal{K}$ или $\mathcal{L} + \mathcal{K}$) понимают их теоретико-множественное объединение, *произведением* $\mathcal{L}$ и $\mathcal{K}$ называется язык

$$\mathcal{L}\mathcal{K} = \{UV \mid U \in \mathcal{L}, V \in \mathcal{K}\},$$

левое $\mathcal{K}^{-1}\mathcal{L}$ и *правое* $\mathcal{L}\mathcal{K}^{-1}$*частные языков* $\mathcal{L}$ *и* $\mathcal{K}$ определяются как

$$\mathcal{K}^{-1}\mathcal{L} = \{U \mid \exists V \in \mathcal{K}(VU \in \mathcal{L})\} \text{ и } \mathcal{L}\mathcal{K}^{-1} = \{U \mid \exists V \in \mathcal{K}(UV \in \mathcal{L})\}$$

соответственно. Положим $\mathcal{L}^* = \cup_{i=0}^{\infty}\mathcal{L}^i$, $\mathcal{L}^+ = \cup_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^i$ (операция * называется *итерацией*). При записи одноэлементных языков вида $\{W\}$, где $W \in \Sigma^*$, фигурные скобки опускаются. Например, вместо $\mathcal{K}\{W\}^{-1}$ и $\{W\}^*$ мы пишем просто $\mathcal{K}W^{-1}$ и W^*.

Естественным образом на языки распространяются операции взятия образа и прообраза:

$$h(\mathcal{K}) = \{h(U) \mid U \in \mathcal{K}\}, \quad h^{-1}(\mathcal{L}) = \{U \mid h(U) \in \mathcal{L}\}$$

для произвольного отображения $h\colon \Delta^* \to \Sigma^*$ и языков $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$, $\mathcal{K} \subseteq \Delta^*$.

Язык называется *рациональным*, или *регулярным*, если он может быть записан при помощи *регулярного выражения* — выражения, содержащего одноэлементные языки и операции объединения, произведения и итерации языков.

Класс рациональных языков замкнут относительно взятия частного и прообраза любого морфизма. Таким образом, для произвольных языков $\mathcal{L}, \mathcal{K} \subseteq \Sigma^*$ и любого морфизма $h\colon \Delta^* \to \Sigma^*$, если язык $\mathcal{L}$ рациональный, то и языки $\mathcal{L}\mathcal{K}^{-1}$ и $h^{-1}(\mathcal{L})$ оказываются рациональными.

В дальнейшем, при рассмотрении регулярных выражений мы будем часто употреблять фразу «слово имеет вид»: слово W имеет вид $(12)^*1$, слово W вида $(12 + 21)^*$ и т. п., подразумевая, что слово W принадлежит языку, задаваемому соответствующим регулярным выражением.

2. *Детерминированным конечным автоматом* (*ДКА*) называется пятерка $(Q, \Sigma, \delta, s, T)$, состоящая из конечного множества *состояний* (*вершин*) Q, алфавита Σ, *функции перехода* $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$, *начального* состояния $s \in Q$ и множества *конечных* (*терминальных*) состояний $T \subseteq Q$. Конечный автомат удобно отождествлять с орграфом с множеством вершин Q (и метками, указывающими, является ли вершина начальной и/или конечной) и множеством дуг вида $q \to aq'$, определяемых условиями $\delta(q, a) = q'$. Операция δ естественным образом распространяется на слова:

$$\delta(q, W) = \delta(\cdots(\delta(q, W[1]), W[2])\cdots, W[|W|]) \ .$$

Каждый маршрут в автомате помечен словом над алфавитом Σ. ДКА *распознает* (*принимает*) слово W, если существует хотя бы один маршрут из начальной вершины в какую-либо из конечных, помеченный словом W. Язык всех распознаваемых ДКА $\mathcal{A}$ слов обозначается через $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Говорят, что ДКА $\mathcal{A}$ *распознает* язык $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Недетерминированный конечный автомат (*НКА*) получается из понятия ДКА путем двух обобщений: начальное состояние s заменяется множеством начальных состояний I, а функция перехода $\delta\colon Q \times \Sigma \to Q$ заменяется на тернарное отношение $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$. Представление орграфом, распознаваемый язык определяются так же, как и для ДКА. Согласно теоремам Рабина-Скотта и Клини, классы языков, распознаваемых ДКА и НКА, совпадают с классом рациональных языков (см., например, [3]).

3. Для любого языка $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ *комбинаторная сложность* есть функция $\mathsf{p}_{\mathcal{L}}(n)\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, которая определяется как $\mathsf{p}_{\mathcal{L}}(n) = |\mathcal{L} \cap \Sigma^n|$. В дальнейшем термин «сложность» применительно к языку означает комбинаторную сложность.

Основным инструментом для оценки степени роста комбинаторной сложности языка служит *индекс роста* $\mathsf{gr}(L) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathsf{p}_{\mathcal{L}}(n)^{1/n}$.

1°.3 Свободные бернсайдовы полугруппы, моноиды, группы

1. *Свободный бернсайдов моноид ранга k и тождеством $x^n = x^{n+m}$* для некоторых фиксированных чисел $n \geqslant 0, m \geqslant 1$ с точностью до изоморфизма определяется как фактор-моноид

$$\widetilde{B}(k,n,n+m) = \Sigma_k^* / \sim_{k,n,m}$$

свободного моноида Σ_k^* по конгруэнции $\sim_{k,n,m}$, порожденной всеми парами вида (Y^n, Y^{n+m}), где $Y \in \Sigma_k^+$. Моноиды $\widetilde{B}(k,0,m)$ являются группами, которые называются *свободными бернсайдовыми группами* и обозначаются $B(k,m)$. Свободная бернсайдова полугруппа $B(k,n,n+m)$, где $n,m \geqslant 1$, получается из моноида $\widetilde{B}(k,n,n+m)$ удалением единицы (нейтрального элемента) — класса эквивалентности, состоящего из пустого слова. Того же результата можно достичь, заменив Σ_k^* на Σ_k^+ и слово «моноид» на слово «полугруппа» в определении свободного бернсайдова моноида $\widetilde{B}(k,n,n+m)$. Класс эквивалентности $\sim_{k,n,m}$, содержащий слово W, обозначается через $[W]_{k,n,m}$.

Все результаты диссертации формулируются для свободных бернсайдовых полугрупп, однако те же результаты справедливы и для соответствующих этим полугруппам свободных бернсайдовых моноидов. Более того, в дальнейшем мы часто будем иметь дело именно с моноидами, рассматривая пустое слово λ и класс $[\lambda]_{k,n,m}$ везде, где это необходимо.

2. Для работы с конгруэнцией $\sim_{k,n,m}$ удобно ввести *отношения соседства* $\pi_{k,n,m}$:

$$\pi_{k,n,m} = \{(Y,Y), (XY^nZ, XY^{n+m}Z), (XY^{n+m}Z, XY^nZ) \mid X, Z \in \Sigma_k^*, Y \in \Sigma_k^+\} \ .$$

Слова U и V мы называем *соседними*, если $(U,V) \in \pi_{k,n,m}$ (при фиксированных параметрах n, m и k). Легко проверить, что $\sim_{k,n,m} = \pi_{k,n,m}^+$, то есть конгруэнция $\sim_{k,n,m}$ является транзитивным замыканием отношения соседства $\pi_{k,n,m}$.

Ввиду вложенности множеств $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma_3 \subseteq \ldots$, полугруппа $B(k,n,n+m)$ является подполугруппой полугруппы $B(k',n,n+m)$, а моноид $\widetilde{B}(k,n,n+m)$ — подмоноидом моноида $\widetilde{B}(k',n,n+m)$, если $k < k'$. Это позволяет нам опускать индекс k в обозначениях $\pi_{k,n,m}$, $\sim_{k,n,m}$ и $[W]_{k,n,m}$, где $W \in \Sigma^*$.

2° Обзор исследований в предметной области

В данном параграфе приводится краткий обзор исследований и основных результатов других авторов в теории бернсайдовых полугрупп. Более подробно с проблематикой и историей развития данной предметной области можно ознакомиться, например, по обзорной статье [20]; немало интересной информации о бернсайдовых полугруппах можно почерпнуть из книг по общей теории полугрупп, таких как [3, 15], и др.

Основные затрагиваемые здесь проблемы следующие:

Проблема конечности (ограниченная проблема Бернсайда): *при каких n, m и k полугруппа $B(k,n,n+m)$ бесконечна?* Эта проблема была впервые сформулирована Бернсайдом в 1902 году для бернсайдовых групп. Позже она была распространена на случай произвольной бернсайдовой полугруппы.

(Обобщенная) гипотеза Бжозовского: *всякий элемент свободной бернсайдовой полугруппы является рациональным языком над соответствующим алфавитом.* Гипотеза была сформулирована Бжозовским в 1969 году для полугрупп $B(k,n,n+1)$, позже Маккаммонд распространил ее на случай произвольной свободной бернсайдовой полугруппы.

Проблема равенства слов: *По произвольно заданным словам U и V определить, представляют ли они один и тот же элемент полугруппы.*

Описание структуры полугруппы в терминах отношений Грина, максимальных подгрупп и др.

Ясно, что полугруппы $B(1,n,n+m)$ суть конечные циклические полугруппы, структура которых давно изучена, каждый их элемент является рациональным языком и проблема равенства слов для таких полугрупп разрешима. Ввиду тривиальности этого случая, в дальнейшем, если не оговорено противное, мы полагаем $k > 1$.

Свойства свободных бернсайдовых полугрупп существенно зависят от параметра n. Выделяют три существенно различных случая: $n = 1$, $n = 2$ и $n \geqslant 3$. Рассмотрение бернсайдовых групп выходит за рамки диссертации, однако, ввиду тесной связи результатов для групп $B(k,m)$ и полугрупп $B(k,1,1+m)$, бернсайдовы группы будут затронуты в разделе, посвященном случаю $n = 1$.

В соответствии с вышесказанным, сначала мы рассмотрим некоторые общие методы и результаты, справедливые для всех свободных бернсайдовых полугрупп $B(k,n,n+m)$, а затем опишем состояние дел по каждому из этих трех случаев.

$2^\circ.1$ Общие методы и результаты

Зафиксируем параметры $k, n, m \geqslant 1$ и рассмотрим полугруппу $B(k, n, n+m)$. Алфавит Σ_k будем обозначать символом Σ, а в обозначениях $\sim_{n,m}$ и $[W]_{n,m}$ (где $W \in \Sigma^*$) будем опускать индексы n и m.

В качестве основного инструмента для описания структуры свободных бернсайдовых полугрупп используют отношения Грина $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$. Заметим, что ввиду периодичности свободных бернсайдовых полугрупп, мы имеем $\mathcal{D} = \mathcal{J}$.

Строение нерегулярных $\mathcal{H}$-классов полугруппы $B(k, n, n+m)$ описывается следующим предложением (см., например, [19]).

Предложение I. *Все нерегулярные $\mathcal{H}$-классы свободной бернсайдовой полугруппы тривиальны.*

Несложно доказать, что если $n = 1$, то все $\mathcal{D}$-классы регулярны. В общем случае это не так, как показывает следующий пример.

Пример ([19]). *Рассмотрим полугруппу $B(k, n, n+m)$ с $n \geqslant 2$. Тогда $\mathcal{D}$-класс слова $[1^n 2^n]$, который совпадает с множеством $\{[1^i 2^j] \mid i, j \geqslant n\}$, нерегулярен, а его $\mathcal{H}$-классы тривиальны.*

Характеризация нерегулярных $\mathcal{D}$-классов была получена в терминах теории графов, с использованием *фундаментального графа* $\mathcal{D}$-класса. Опишем кратко эту весьма полезную конструкцию (фундаментальный граф с примерами его построения подробно рассматривается в [19, 20]).

Отношения Грина в полугруппе индуцируют отношения $\mathcal{R}'$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{J}'$ в Σ^* соответственно следующим образом:

$$X\, \rho'\, Y \Leftrightarrow [X]\, \rho\, [Y], \quad \text{где } \rho \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{J}\} \ .$$

Слово W мы называем *$\mathcal{D}$-входом*, если никакое его подслово не лежит в его $\mathcal{D}'$-классе. *Переходом* (*$\mathcal{D}$-переходом*) называется любое слово aXb, где $a, b \in \Sigma$, такое, что элементы $[aX]$, $[aXb]$ и $[Xb]$ лежат в одном $\mathcal{D}$-классе, а элемент $[X]$ этому $\mathcal{D}$-классу не принадлежит.

Зафиксируем теперь произвольный элемент $[W]$ полугруппы. *Фундаментальным графом $\mathcal{D}$-класса элемента* $[W]$, или просто *фундаментальным графом элемента* $[W]$, называется четверка (V, E, α, ω), где множество вершин V состоит из всех $\mathcal{D}$-входов, содержащихся в $\mathcal{D}'$-классе W, множество ребер E состоит из всех $\mathcal{D}$-переходов $\mathcal{D}'$-класса W (строго говоря, множества V и E состоят не из самих $\mathcal{D}$-входов и $\mathcal{D}$-переходов, а из соответствующих им классов эквивалентности), а $\alpha\colon E \to V$ и $\omega\colon E \to V$ — две специальные функции инцидентности графа, определяющие для любого $\mathcal{D}$-перехода T начальную $\alpha(T)$ и конечную $\omega(T)$ вершины как $\mathcal{D}$-входы, являющиеся, соответственно, префиксом и суффиксом слова T. Построенный таким образом граф оказывается сильно связным ([19, 20]).

Теперь приведем описание произвольного нерегулярного $\mathcal{D}$-класса через его фундаментальный граф.

Предложение II ([19]). *Фундаментальный граф нерегулярного $\mathcal{D}$-класса свободной бернсайдовой полугруппы не имеет ребер и состоит из одной вершины.*

Величина $|E(\mathbf{G})|-|V(\mathbf{G})|+1$ называется *цикломатическим числом фундаментального графа* $\mathbf{G}=(V,E)$. Используя понятие цикломатического числа фундаментального графа, до Лаго описал строение максимальных подгрупп свободной бернсайдовой полугруппы.

Теорема III (теорема о максимальных подгруппах, до Лаго, [18, 19]). *Максимальными подгруппами полугруппы $B(k,n,n+m)$ являются в точности свободные бернсайдовы группы с тождеством $x^m=1$. Если при этом $m\geqslant 2$, каждая такая группа имеет ранг, равный цикломатическому числу фундаментального графа $\mathcal{D}$-класса, в котором группа содержится.*

В работах [18, 19] также показывается, как построить множество, порождающее максимальную подгруппу.

Следующий важный результат справедлив для произвольных моноидов, в том числе и для моноида $\widetilde{B}(k,n,n+m)$ и соответствующей ему бернсайдовой полугруппы.

Теорема IV ([13]). *Пусть дан произвольный алфавит Σ и сюръективный гомоморфизм $\tilde{}:\Sigma^*\to M$ свободного моноида Σ^* на некоторый моноид M. Тогда если M содержит бесконечный $\mathcal{H}$-класс H, то для любого элемента $h\in H$ язык $\{W\in\Sigma^*\mid \tilde{X}=h\}$ не является рациональным.*

Теоремы III и IV позволяют установить тесную связь между гипотезой Бжозовского для полугруппы $B(k,n,n+m)$ и проблемой конечности для бернсайдовых полугрупп с тождеством $x^m=1$. Действительно, возьмем в качестве Σ алфавит Σ_k и рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\tilde{}:\Sigma_k^*\to\widetilde{B}(k,n,n+m)$, ставящий в соответствие любому слову $W\in\Sigma_k^*$ его класс эквивалентности $[W]_{n,m}$. Согласно теореме IV, для того, чтобы класс $[W]$ был рациональным языком, необходимо, чтобы $\mathcal{H}$-класс элемента $[W]$ был конечным. Согласно классическому результату теории полугрупп (см., например, [3]), всякая максимальная подгруппа полугруппы $B(k,n,n+m)$ совпадает с некоторым ее $\mathcal{H}$-классом. Таким образом, ответ на вопрос, верна гипотеза Бжозовского для полугруппы $B(k,n,n+m)$ или нет, существенно зависит от того, содержит ли полугруппа $B(k,n,n+m)$ бесконечные подгруппы, или, ввиду теоремы III, конечны ли свободные бернсайдовы группы с тождеством $x^m=1$ и рангом, принимающим значения из множества, образованного цикломатическими числами фундаментальных графов всех регулярных $\mathcal{D}$-классов полугруппы $B(k,n,n+m)$.

2°.2 Случай $n=1$

Структура свободных бернсайдовых полугрупп с тождеством $x^{1+m}=x$ была в достаточной мере исследована в работе Грина и Риса [21] еще в 1952 году. Центральным понятием, используемым для описания таких полугрупп, служит понятие *содержания слова* — множества $c(W)$ всех букв, встречающихся в слове W.

Так, в [21] получена достаточно простая характеризация отношения $\mathcal{D}$ в терминах содержания слов:

$$W\,\mathcal{D}'\,W' \text{ тогда и только тогда, когда } c(W) = c(W')\ .$$

В частности, моноид $\widetilde{B}(k,1,1+m)$ имеет в точности 2^k различных $\mathcal{D}$-классов. Обозначим через $D_{k,m}$ мощность $\mathcal{D}$-класса, содержание элементов которого есть Σ_k, через $\mathbf{G}_{k,m}$ — цикломатическое число фундаментального графа такого $\mathcal{D}$-класса, и через $M_{k,m}$ — мощность моноида $\widetilde{B}(k,1,1+m)$. Мощность бернсайдовой группы $B(k',m)$ (для произвольного k') будем обозначать через $B_{k',m}$ (по теореме III, максимальными подгруппами $\mathcal{D}$-классов моноида $\widetilde{B}(k,1,1+m)$ являются свободные бернсайдовы группы с тождеством $x^m = 1$).

Предположим, что значение $B_{k',m}$ конечно и известно для любого k' (параметр m зафиксирован). Тогда следующие величины могут быть вычислены рекуррентно ([20]):

$$\mathbf{G}_{k,m} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 1;\\ (kD_{k-1,m} - k(k-1)D_{k-2,m} + 1, & \text{если } k \geqslant 2; \end{cases}$$

$$D_{k,m} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0;\\ (kD_{k-1,m})^2 B_{(\mathbf{G}_{k,m}),m}, & \text{если } k \geqslant 1; \end{cases}$$

$$M_{k,m} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i D_{i,m},$$

где C_k^i —биномиальные коэффициенты.

Конечность и бесконечность полугрупп $B(k,1,1+m)$. Проблема конечности полугрупп с тождеством $x^{1+m} = x$ тесно связана с проблемой конечности свободных бернсайдовых групп с тождеством $x^m = 1$. Следующий результат принадлежит Грину и Рису:

Теорема V ([21]). *Следующие условия эквивалентны для любого m:*
(1) $B(k,1,1+m)$ конечна для любого k;
(2) $B(k,m)$ конечна для любого k.

Свободные бернсайдовы группы $B(k,1)$ конечны (и тривиальны), конечность $B(k,m)$ при любом k была доказана Бернсайдом [11] для $m=2$; Бернсайдом [11], де Леви и ван дер Варденом [27] для $m=3$; И. Н. Сановым [7] для $m=4$; М. Холлом [24] для $m=6$.

В 1968 г. П. С. Новиков и С. И. Адян в серии работ [1,5,6] показали, что группы $B(k,m)$ бесконечны для любого $k>1$ и любого нечетного $m \geqslant 665$. В 1992г. С. В. Иванов ([25]) доказал, что группы $B(k,m)$ бесконечны при любом $k>1$ и **любом** $m \geqslant 2^{48}$. Одновременно с этим, И. Г. Лысенок анонсировал оценку $m \geqslant 2^{13}$ ([4]). Позже, в полной версии работы [4], эту оценку удалось улучшить до $n \geqslant 8000$. Во всех этих случаях полугруппы $B(k,1,1+m)$ также оказываются бесконечными.

Проблема остается открытой для $m = 5$, $m \in [7, 664]$ и случая, когда $m \in [666, 7998]$ и m четно.

Проблема равенства слов и гипотеза Бжозовского. Следующая теорема, по формулировке напоминающая теорему V, была получена Кадореком и Полаком в 1980 году. Она позволяет в некоторых случаях свести проблему равенства слов в полугруппе $B(k,1,1+m)$ к соответствующей проблеме для группы $B(k,m)$.

Теорема VI ([26]). *Предположим, что проблема равенства слов разрешима для группы $B(k,m)$ при любом k. Тогда проблема равенства слов разрешима и для полугруппы $B(k,1,1+m)$ с тем же значением m и любым значением k.*

В частности, проблема равенства слов разрешима при $m = 1, 2, 3, 4, 6$, так как в этом случае группа $B(k,m)$ конечна для любого k. Более того, в серии работ [1, 4–6] показывается разрешимость проблемы равенства слов для групп $B(k,m)$ при любом k и нечетном $m \geqslant 665$ или кратном 16 значении $m \geqslant 8000$. Во всех остальных случаях проблема равенства слов остается открытой.

Что касается обобщенной гипотезы Бжозовского, она, очевидно, справедлива для конечных полугрупп $B(k,1,1+m)$. В [18] до Лаго показал, что все максимальные подгруппы $\mathcal{D}$-класса элемента $[123]_{1,m}$ являются свободными бернсайдовыми группами с тождеством $x^m = 1$ и рангом как минимум $2m-1$. При $m \geqslant 8000$ и при нечетном $m \geqslant 665$ эти группы будут бесконечными, и, в силу теорем III и IV, все элементы данного $\mathcal{D}$-класса, рассматриваемые как языки над алфавитом из свободных порождающих, не являются рациональными языками. Таким образом, при $m \geqslant 8000$ (а также нечетном $m \geqslant 665$) и $k \geqslant 3$ гипотеза Бжозовского для полугруппы $B(k,1,1+m)$ неверна. Для остальных значений m и k вопрос остается открытым.

2°.3 Случай $n \geqslant 3$

Этот случай является наиболее исследованным: структура полугрупп $B(k,n,n+m)$ при $n \geqslant 3$ хорошо описана и все ключевые проблемы (проблема конечности, проблема равенства слов и проверка гипотезы Бжозовского) к настоящему времени решены. Большая часть результатов получена совместными усилиями различных авторов в серии работ [12, 14, 16, 17, 22, 23, 29], в которых постепенно понижалась нижняя граница для n.

Структура полугрупп при $n \geqslant 3$. Отметим три наиболее интересных результата. Во-первых, в каждом классе эквивалентности полугруппы $B(k,n,n+m)$ единственно слово минимальной длины. Таким образом, слова минимальной длины можно выбирать в качестве канонических представителей своих классов эквивалентности.

Во-вторых, $\mathcal{J}$-остов полугруппы $B(k,n,n+m)$ при $n \geqslant 3$ удовлетворяет следующему условию конечности.

Предложение VII ([14,17]). *Для любого элемента* $[W]$ *множество*

$$\{[U] \mid [U] \geqslant_{\mathcal{J}} [W]\}$$

конечно.

Наконец, третий результат касается строения фундаментального графа регулярных $\mathcal{D}$-классов полугруппы $B(k,n,n+m)$ при $n \geqslant 3$: оказывается, фундаментальный граф любого регулярного $\mathcal{D}$-класса есть простой цикл ([16, 17]). Как следствие, всякая максимальная подгруппа свободной бернсайдовой полугруппы с тождеством $x^n = x^{n+m}$ при $n \geqslant 3$ является циклической группой порядка m.

Проблема конечности, проблема равенства слов и гипотеза Бжозовского. При $k > 1$ и $n \geqslant 3$ бесконечность полугруппы $B(k,n,n+m)$ следует из работы [31], в которой Туэ построил бесконечную последовательность бескубных слов над алфавитом из двух букв.

Гипотеза Бжозовского для полугрупп $B(k,n,n+1)$ с $n \geqslant 5$ была подтверждена де Лукой и Вариккио в 1990 году ([12]). Маккаммонд распространил гипотезу на случай полугруппы $B(k,n,n+m)$ с произвольным $m \geqslant 1$ и независимо доказал ее справедливость при $n \geqslant 6, m \geqslant 1$ ([29], 1991). Позже до Лаго усовершенствовал метод де Луки и Варикккио и улучшил оценку до $n \geqslant 4, m \geqslant 1$ ([16], 1992). Наконец, В. С. Губа показал справедливость гипотезы для $n \geqslant 3, m \geqslant 1$ ([22, 23], 1993).

Разрешимость проблемы равенства слов следует из справедливости гипотезы Бжозовского: поскольку всякий элемент полугруппы $B(k,n,n+m)$ является рациональным языком, мы можем по одному из двух данных слов построить автомат, распознающий его класс эквивалентности, и проверить, распознает ли этот автомат второе слово.

Резюмируем приведенные выше результаты в следующей теореме.

Теорема VIII. *Пусть* $n \geqslant 3, m \geqslant 1, k > 1$. *Тогда*

1) *Каждый класс конгруэнции* $\sim_{n,m}$ *содержит единственное слово минимальной длины.*

2) *Все максимальные подгруппы полугруппы* $B(k,n,n+m)$ *циклические порядка* m.

3) *Всякий элемент полугруппы* $B(k,n,n+m)$ *является рациональным языком.*

4) *Проблема равенства слов для полугруппы* $B(k,n,n+m)$ *разрешима.*

$2^\circ.4$ Случай $n = 2$

Бесконечность полугруппы $B(k,2,2+m)$ при $k \geqslant 3$ следует из работы Туэ [32], построившего бесконечную последовательность бесквадратных слов над алфавитом из трех букв. В 1971 году Бжозовски, Кулик и Габриэлян показали бесконечность полугруппы $B(2,2,3)$ ([10]). Как следствие, полугруппы $B(k,2,2+m)$ бесконечны для всех $k \geqslant 2$ и $m \geqslant 1$.

В [18] до Лаго показал, что все максимальные подгруппы $\mathcal{D}$-класса элемента $[(21212)^2]$ являются свободными бернсайдовыми группами с тождеством $x^m = 1$ и рангом как минимум $2m-1$. Для достаточно большого m эти группы будут бесконечными, и все элементы данного $\mathcal{D}$-класса, рассматриваемые как языки над алфавитом из свободных порождающих, не являются рациональными языками.

Предложение IX ([18, 19]). *Для полугруппы $B(k, 2, 2+m)$ при $k > 1$ и $m \geqslant 8000$ гипотеза Бжозовского неверна.*

Мы видим, что уже при $m \geqslant 2$ максимальные подгруппы $\mathcal{D}$-классов могут не быть циклическими, и структура полугрупп $B(k, 2, 2+m)$ в этом случае существенно отличается от структуры полугрупп $B(k, n, n+m)$ как при $n \geqslant 3$, так и для $n = 1$. В частности, произвольный класс эквивалентности уже не обязательно содержит только одно слово минимальной длины, до сих пор не решена проблема равенства слов для полугрупп $B(k, 2, 2+m)$.

Наименее исследованным остается случай $n = 2, m = 1$: в этом случае, ввиду теоремы III, все максимальные подгруппы тривиальны, тем не менее, гипотезу Бжозовского для полугрупп $B(k, 2, 3)$ пока подтвердить не удалось. Проблема равенства слов для полугрупп $B(k, 2, 3)$ остается открытой. Также неизвестно, единственно ли слово минимальной длины в каждом классе эквивалентности $\sim_{2,1}$. Если ответ на этот вопрос положителен, полугруппа $B(k, 2, 3)$ по структуре и свойствам может оказаться схожей с полугруппами $B(k, n, n+m)$ при $n \geqslant 3$.

3° Обзор диссертации

3°.1 Цели диссертации. Основные проблемы

К настоящему времени, благодаря целому ряду исследований, удалось достаточно хорошо описать строение свободных бернсайдовых полугрупп с тождеством $x^n = x^{n+m}$ при $n \geqslant 3$ (см. § 2°). В этом случае гипотеза Бжозовского справедлива и, как следствие, разрешима проблема равенства слов. Несмотря на то, что в общем случае вопросы о справедливости гипотезы Бжозовского и разрешимости проблемы равенства слов для полугрупп $B(k, 1, 1+n)$ остаются открытыми, ответы на них определенным образом зависят от ответов на аналогичные вопросы для бернсайдовых групп. Более того, работы Грина и Риса, Кадорека и Полака и др. дают хорошее представление о строении полугрупп $B(k, 1, 1+m)$.

Наименее исследованным остается случай $n = 2$. Основной целью данной диссертации является исследование проблемы равенства слов и гипотезы Бжозовского для полугрупп $B(k, 2, 3)$, разработка новых методов и подходов к решению данных проблем.

Выбор полугруппы $B(k, 2, 3)$ не случаен. Во-первых, стоит отметить, что полугруппы вида $B(k, n, n+1)$ составляют важный подкласс бернсайдовых полугрупп. Исторически теория бернсайдовых полугрупп (исключая бернсайдовы группы) начиналась с изучения именно таких полугрупп. Многие результаты были получены сперва для полугрупп $B(k, n, n+1)$, и лишь затем распространены на полугруппы $B(k, n, n+m)$ с произвольным $m \geqslant 1$. Напомним, что вопрос о справедливости гипотезы Бжозовского и разрешимости проблемы равенства слов для полугрупп $B(k, 2, 3)$ был специально отмечен Бжозовским в списке открытых проблем [9].

Во-вторых, как было сказано в § 2°, структура полугрупп $B(k, 2, 2+m)$ при $m \geqslant 2$ существенно сложнее структуры полугрупп $B(k, n, n+m)$ при $n \geqslant 3$, и случай $m = 1$ остается единственным, при котором полугруппа $B(k, 2, 2+m)$ еще может иметь достаточно простую структуру.

Наконец, ввиду того, что $\sim_{2,m} \subseteq \sim_{2,1}$, решение проблемы равенства слов для полугруппы $B(k, 2, 3)$ в некоторых случаях позволяет давать отрицательный ответ на вопрос, представляют ли слова U и V один и тот же элемент полугруппы $B(k, 2, 2+m)$, а именно: если $U \not\sim_{2,1} V$, то и $U \not\sim_{2,m} V$ для любых слов U и V. Таким образом, решение проблемы равенства слов для полугрупп $B(k, 2, 3)$ может служить «первым приближением» и отправной точкой для решения соответствующей проблемы в полугруппах $B(k, 2, 2+m)$.

3°.2 Основные результаты

Основными результатами диссертации являются следующие.

– Теорема 1.1 об эквивалентности разрешимости проблемы равенства слов в полугруппе $B(k, 2, 3)$ произвольного ранга $k > 2$ и разрешимости этой же проблемы для полугруппы $B(2, 2, 3)$, и аналогичная ей по формулировке теорема 1.2 о справедливости гипотезы Бжозовского. (Глава 1.)

– Теорема 2.1 о единственности почти сильно бескубного слова в классах конгруэнции $\sim_{2,2,3}$. (Глава 2.)

– Линейный по времени алгоритм EqAOF построения почти сильно бескубного слова, $\sim_{2,2,3}$-эквивалентного заданному слову, и вытекающая из него теорема 2.2 о разрешимости равенства в полугруппе $B(2, 2, 3)$ любой пары слов, хотя бы одно из которых эквивалентно почти сильно бескубному слову. (Глава 2.)

– Теорема § 3.1, подтверждающая гипотезу Бжозовского для полугруппы $B(2, 2, 3)$ в частном случае, а именно, доказывающая рациональность всех классов конгруэнции $\sim_{2,2,3}$, содержащих почти сильно бескубное слово. (Глава 3.)

Кроме того, выделим еще несколько результатов диссертации, которые естественным образом дополняют результаты, описанные выше.

– Теоремы 1.3 и 1.4 являются аналогами, соответственно, теорем 1.1 и 1.2 для полугрупп $B(k, 2, 2+m)$ при произвольном $m \geqslant 2$ и могут служить отправной точкой для применения разработанной в диссертации техники к произвольным полугруппам $B(k, 2, 2+m)$. (Глава 1.)

– Теорема 3.2 гласит, что почти сильно бескубное слово является единственным словом минимальной длины в своем классе и тем самым обнаруживает в полугруппе $B(2,2,3)$ свойство, характерное для бернсайдовых полугрупп с $n \geqslant 3$. (Глава 3.)

– Теоремы 3.3 и 3.4 описывают количественные характеристики классов, содержащих почти сильно бескубные слова, и показывают, что частный случай, для которого доказана разрешимость проблемы равенства слов и подтверждена гипотеза Бжозовского, является достаточно обширным. (Глава 3.)

– Теоремы 3.5 и 3.6 являются аналогами теорем 2.1 и 2.2, с заменой почти сильно бескубных слов на почти 7/3-свободные, и демонстрируют границы применимости разработанной в диссертации комбинаторной техники. (Глава 3.)

3°.3 Основные методы

В доказательстве полученных нами результатов можно выделить следующие методы:

- Методы комбинаторики слов, основанные на применении морфизма Туэ-Морса, сильно бескубных слов, построении и анализе морфизмов, использование результатов по комбинаторике слов других авторов.
- Методы теории автоматов.
- Элементы классической комбинаторики.
- Методы теории бернсайдовых полугрупп, основанные на использовании специальных редукций и исследовании отношения соседства.

3°.4 Структура диссертации и организация текста

Диссертация состоит, помимо введения, из трех глав и списка литературы. Главы делятся на параграфы, параграфы имеют двухиндексную нумерацию (первый индекс обозначает номер главы). Все предложения и теоремы, сформулированные во введении, отражают предшествующие результаты других авторов в данной проблемной области и не имеют отношения к результатам диссертации; все утверждения во введении нумеруются римскими цифрами и имеют единую нумерацию. Предложения, леммы, наблюдения, примеры в главах 1–3 имеют трехиндексную нумерацию, где первый индекс означает номер главы, а второй — номер параграфа. Рисунки и нумерованные формулы, ввиду их немногочисленности, имеют двухиндексную нумерацию (первый индекс соответствует номеру главы). Наконец, основные результаты диссертации оформлены в виде теорем, также имеющих двухиндексную нумерацию.

Диссертация состоит из трех глав. Первая глава посвящена исследованию проблемы равенства слов и гипотезы Бжозовского для полугрупп $B(k,2,3)$ произвольного ранга

$k \geqslant 2$. В последнем параграфе этой главы рассматриваются полугруппы $B(k, 2, 2+m)$ с произвольными $m \geqslant 1$ и $k \geqslant 2$. Центральное место в диссертации отводится главе 2, в которой мы строим алгоритм EqAOF, позволяющий за линейное время решать проблему равенства слов для полугруппы $B(2, 2, 3)$ в случае, когда одно из слов эквивалентно почти сильно бескубному. Наконец, третья глава посвящена гипотезе Бжозовского для полугруппы $B(2, 2, 3)$ и другим приложениям алгоритма EqAOF, а также обобщениям результатов главы 2.

$3^{\circ}.5$ Апробация и публикации

Результаты диссертации были представлены на XIV международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2007», на свердловском областном конкурсе студенческих работ «Олимп-2007», на 6-й международной конференции по комбинаторике слов WORDS2007 (Марсель, 2007), «международной конференции по полугруппам, алгебре и приложениям AAA82» (Потсдам, 2011), 15-й международной конференции «Развитие теории языков» (Милан, 2011), международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2011). Автор выступал с докладами по теме диссертации на семинаре «Алгебраические системы» (УрГУ, рук. Л.Н. Шеврин, 2007–2011), на алгебраическом семинаре института математики и механики УрО РАН (2011), на семинаре «Алгоритмические вопросы алгебры и логики» (МГУ, рук. С. И. Адян, 2011).

По теме диссертации написано 7 работ: [33–39]. Из них статья [36] опубликована в издании из списка, рекомендованного ВАК, а статьи [38, 39] — в зарубежных изданиях, удовлетворяющих достаточному условию ВАК. Работы [33, 35] являются тезисами (в том числе электронная публикация [35]); статьи [37, 38] опубликованы в сборниках трудов конференций; 3 работы ([37–39]) написаны совместно с А. М. Шуром, однако доказательство основных результатов принадлежит автору.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Арсению Михайловичу Шуру за неоценимую помощь и руководство при написании диссертации и подготовке статей к публикации, Льву Наумовичу Шеврину за его многочисленные советы и ценные замечания. С теплым чувством я вспоминаю своего первого научного руководителя Евгения Витальевича Суханова, который и вдохновил автора на исследования в данной предметной области.

Глава 1

Полугруппы $B(k, 2, 3)$

§ 1.1 Введение и формулировка результатов

Как говорилось в разделе 2°, структура свободных бернсайдовых полугрупп в основном зависит от параметров n и m (от n в большей степени и от m — в меньшей). Что касается параметра k, то при $k = 1$ свободные бернсайдовы полугруппы суть конечные циклические полугруппы. При $k > 1$ полугруппы $B(k, n, m)$ имеют весьма схожую структуру (при фиксированных n и m). В частности, все приведенные в разделе 2° результаты справедливы для свободных бернсайдовых полугрупп любого конечного ранга $k > 1$.

В связи с вышесказанным, изучение проблемы равенства слов и гипотезы Бжозовского для полугрупп $B(k, 2, 3)$ представляется разумным проводить в два этапа: на первом этапе доказать сводимость рассматриваемых проблем для полугрупп $B(k, 2, 3)$ произвольного ранга k к соответствующим проблемам для какой-то полугруппы $B(k', 2, 3)$ фиксированного ранга k', после чего работать только с этой полугруппой. Наиболее перспективной в этом плане является полугруппа $B(2, 2, 3)$: во-первых, для исследования слов и языков над бинарным алфавитом разработан достаточно большой и разнообразный инструментарий, во-вторых, случай $k = 2$ представляется наиболее простым, в-третьих, для полугруппы $B(2, 2, 3)$ уже получен ряд результатов. В частности, представленная диссертация существенно развивает технику и методы, введенные в [2].

В этой главе мы полностью реализуем первый этап нашего исследования. Второму этапу посвящены главы 2–3.

Поскольку в данной главе, за исключением последнего параграфа, рассматриваются свободные бернсайдовы полугруппы с фиксированным тождеством $x^2 = x^3$, мы будем опускать индексы n и m и писать $\sim$, π, $[W]$ вместо $\sim_{2,1}$, $\pi_{2,1}$ и, соответственно, $[W]_{2,1}$ (для произвольного слова W). Более того, мы будем использовать буквы n и m для обозначений наравне с другими буквами латинского алфавита. (Как было сказано выше, исключение составляет лишь § 1.5, в котором m по-прежнему используется для обозначения одного из параметров полугруппы $B(k, 2, 2 + m)$.)

Основными результатами этой главы являются следующие две теоремы.

Теорема 1.1. *Проблема равенства слов для полугруппы $B(k,2,3)$ произвольного ранга $k \geqslant 2$ разрешима тогда и только тогда, когда проблема равенства слов разрешима для полугруппы $B(2,2,3)$.*

Теорема 1.2. *Гипотеза Бжозовского для полугруппы $B(k,2,3)$ при $k \geqslant 2$ справедлива тогда и только тогда, когда эта гипотеза справедлива для полугруппы $B(2,2,3)$.*

Для доказательства теорем 1.1 и 1.2 мы построим функцию $\alpha\colon \Sigma_k^* \to \Sigma_2^*$, такую, что для любых слов $U, V \in \Sigma_k^+$ соотношение $U \sim V$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется $\alpha(U) \sim \alpha(V)$.

Глава состоит из пяти параграфов. Во втором и третьем параграфах вводятся вспомогательные конструкции, необходимые для построения отображения α с нужными свойствами. Четвертый параграф посвящен доказательству теорем 1.1 и 1.2. Наконец, в последнем, пятом, параграфе мы обобщаем полученные результаты на случай бернсайдовых полугрупп $B(k,2,2+m)$ с произвольным значением m.

§ 1.2 Основная техника, используемая в диссертации

В этом разделе собраны понятия и факты, которые необходимы для дальнейшего понимания работы и которые используются во всех главах диссертации. В частности, понятия r_1-редуцируемости и $\widetilde{AB}$-целого слова необходимы для построения отображения α. Используемый инструментарий был разработан в [2, 30], некоторые понятия (такие, как r_1-редукция) возникли и использовались раньше (см., например, [3]).

1. Из определения морфизма Туэ-Морса следует, что $\theta(\Sigma_2^*) = (12+21)^*$, т. е. любое слово из $\theta(\Sigma_2^*)$ представляется в виде произведения блоков — двухбуквенных слов, каждое из которых равно 12 или 21. Далее слова из языка $\theta(\Sigma_2^*)$ мы будем называть *θ-образами.* Сделаем одно полезное наблюдение, характеризующее множество всех θ-образов.

Наблюдение 1.2.1. *Слово $W \in \Sigma_2^*$ тогда и только тогда будет θ-образом, когда длина W четна и все вхождения подслов 11 и 22 в слово W начинаются только с четных позиций.*

В дальнейшем нам понадобится следующее обобщение свойства слова быть θ-образом (см. [30]): слово $W \in \Sigma_2^*$ будем называть *регулярным* (английский термин «uniform»), если все вхождения подслов 11 и 22 начинаются в U в позициях одной четности. Слово $W \in \Sigma_2^*$ называется *буквочередующимся*, если оно не содержит подслов 11 и 22. По определению, буквочередующиеся слова являются регулярными.

2. В этом пункте мы получим одну очень полезную характеризацию регулярных слов в терминах вполне редуцируемости. Фактически, мы покажем, как из произвольного слова

$W \in \Sigma_2^*$ получить регулярное слово. Для этого, следуя [2], мы введем три специальные операции редукции, упрощающих структуру слова.

Операция r_1 сокращает в слове все степени букв выше второй до квадратов:

$$c^n \to c^2, \quad n \geqslant 3. \tag{1.1}$$

Результат применения операции r_1 к слову W обозначим через $\mathsf{r}_1(W)$. Ясно, что $\mathsf{r}_1(W)$ не зависит от порядка применения сокращений (1.1). Слово W назовем r_1-*редуцированным*, если $W = \mathsf{r}_1(W)$.

Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ обозначают языки буквочередующихся слов нечетной длины $1(21)^+$ и $2(12)^+$ соответственно (однобуквенные слова 1 и 2 исключаются). Выбор обозначений $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ объясняется тем, что довольно часто буквы бинарного алфавита обозначают латинскими буквами a и b, при этом полагая $\Sigma_2 = \{a, b\}$. При таких обозначениях мы имеем $\widetilde{A} = a(ba)^+$ и $\widetilde{B} = b(ab)^+$.

Обозначим через $\mathsf{r_A}(W)$ слово, полученное из W применением, пока возможно, преобразований вида

$$W \to 11, \text{ где } W \in 1\widetilde{A}1, \tag{1.2a}$$

а через $\mathsf{r_B}(W)$ — слово, полученное из W применением (пока возможно) преобразований вида

$$W \to 22, \text{ где } W \in 2\widetilde{B}2\ . \tag{1.2b}$$

Предварительно заметим, что операции $\mathsf{r_A}$ и $\mathsf{r_B}$ применяются только к r_1-редуцированному слову W. В этом случае сокращения (1.2a) и (1.2b) можно производить в любом порядке ([2]). Слово W называется $\mathsf{r_A}$-*редуцированным*, если $\mathsf{r_A}(W) = W$, и называется $\mathsf{r_B}$-*редуцированным, если* $\mathsf{r_B}(W) = W$. Наконец, слово W называется *вполне редуцированным*, или r-*редуцированным*, если оно r_1-, $\mathsf{r_A}$- и $\mathsf{r_B}$-редуцировано. Операцию полной редукции обозначим через r. Таким образом, $\mathsf{r}(W) = \mathsf{r_B}(\mathsf{r_A}(\mathsf{r}_1(W))) = \mathsf{r_A}(\mathsf{r_B}(\mathsf{r}_1(W)))$.

Следующее предложение устанавливает связь между понятиями регулярности, вполне редуцированности и θ-образами.

Предложение 1.2.1. *Для произвольного слова $W \in \Sigma_2^*$ следующие условия эквивалентны:*
(1) *W регулярно;*
(2) *W вполне редуцировано;*
(3) *W является подсловом θ-образа.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна: так как в словах 111, 222, $11(21)^l1$ и $22(12)^l2$ (для любого $l \geqslant 1$) позиции первого и последнего вхождения квадрата буквы имеют разную четность, регулярное слово W не содержит подслов указанного вида, и, следовательно, является вполне редуцированным.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что слово W вполне редуцировано, но не регулярно. Пусть Y — минимальное по длине нерегулярное подслово W. Тогда Y начинается и заканчивается квадратом буквы, и длина Y нечетна. Ввиду r_1-редуцированности, слово W не содержит подслов 111 и 222, поэтому квадраты букв в слове Y не могут перекрываться. Следовательно, $Y = ccY'dd$ для некоторых букв c и d и слова Y' нечетной длины.

Если слово $cY'd$ не является буквочередующимся, то есть $cY'd = PeeQ$ для некоторых $P, Q \in \Sigma_2^*$ и $e \in \Sigma_2$, то одно из собственных подслов слова Y — $ccPee$ или $eeQdd$ — нерегулярно, что противоречит выбору слова Y. Таким образом, $cY'd$ — буквочередующееся слово нечетной длины, Следовательно, $c = d$, откуда $Y \in 1\widetilde{A}1$ или $Y \in 2\widetilde{B}2$, что невозможно ввиду того, что слово W вполне редуцировано. Полученное противоречие доказывает импликацию (2) $\Rightarrow$ (1).

Эквивалентность условий (1) и (3) непосредственно следует из определения регулярности и наблюдения 1.2.1. $\square$

Таким образом, операция r преобразует любое слово над алфавитом Σ_2 в регулярное.

3. Слово W называется *$\widetilde{A}$-целым*, если оно r_1-редуцировано и любое подслово $Y \in 1\widetilde{A}1$ входит в W только внутри подслова $12Y21$. Двойственным образом определяется $\widetilde{B}$-целое слово. Наконец, назовем слово $\widetilde{AB}$-целым, если оно одновременно $\widetilde{A}$- и $\widetilde{B}$-целое.

Понятие $\widetilde{AB}$-целого слова, введенное в [2], играет весьма важную роль во всех последующих рассмотрениях. Подслова $\widetilde{A}$-, $\widetilde{B}$- и $\widetilde{AB}$-целых слов мы называем, соответственно, *потенциально $\widetilde{A}$-, $\widetilde{B}$ и $\widetilde{AB}$-целыми словами.*

4. Сформулируем несколько наиболее часто используемых в диссертации утверждений, устанавливающих базовые свойства введенных выше понятий относительно конгруэнции $\sim$.

Начнем со свойств операции r_1 — самой простой, но вместе с тем наиболее важной из всех операций редуцирования, входящих в определение r-редукции. Очевидно, для любого слова $W \in \Sigma_2^*$ мы имеем $\mathsf{r}_1(W) \sim W$. Отсюда, в частности, следует, что условие $U \sim V$ влечет $\mathsf{r}_1(U) \sim \mathsf{r}_1(V)$. Оказывается, справедливо более сильное утверждение.

Предложение 1.2.2 ([2, 3]). *Если $(W_1, W_2) \in \pi$, то $(\mathsf{r}_1(W_1), \mathsf{r}_1(W_2)) \in \pi$.*

Ввиду предложения 1.2.2, если мы рассмотрим ограничение π_{r_1} отношения соседства π и ограничение $\sim_{\mathsf{r}_1}$ конгруэнции $\sim$ на множество всех r_1-редуцированных слов над алфавитом Σ_2, то по-прежнему отношение $\sim_{\mathsf{r}_1}$ будет транзитивным замыканием π_{r_1}. Действительно, ввиду равенства $\sim = \pi^+$, для любых r_1-редуцированных слов U и V существует последовательность слов $\{W_i\}_{i=0}^n$ такая, что $W_0 = U$, $W_n = V$ и $(W_i, W_{i-1}) \in \pi$ для всех $i \in [1, n]$. Применив операцию r_1 ко всем членам последовательности, мы получим последовательность $\{\mathsf{r}_1(W_i)\}_{i=0}^n$, все члены которой r_1-редуцированы, при этом $\mathsf{r}_1(W_0) = U$, $\mathsf{r}_1(W_n) = V$ и $(\mathsf{r}_1(W_i), \mathsf{r}_1(W_{i-1})) \in \pi$ для всех $i \in [1, n]$.

Таким образом, проблему равенства слов для полугруппы $B(2,2,3)$ достаточно решить на множестве всех r_1-редуцированных слов. Поэтому далее почти все рассматриваемые слова над алфавитом Σ_2 будут r_1-редуцированными. Множество всех r_1-редуцированных слов, эквивалентных слову W, мы обозначаем через $[W]_{\mathsf{r}_1}$. Легко видеть, что $[U]_{\mathsf{r}_1} = \mathsf{r}_1([U])$ для любого $U \in \Sigma_2^*$.

Следующее предложение утверждает, что свойство слова быть $\widetilde{AB}$-целым сохраняется конгруэнцией $\sim$. Это означает, что свойство быть $\widetilde{AB}$-целым присуще не только словам, но и классам эквивалентности — элементам полугруппы $B(2,2,3)$.

Предложение 1.2.3. *Пусть $U, V \in \Sigma_2^*$, слова U и V являются r_1-редуцированными и $U \sim V$. Тогда если U — [потенциально] $\widetilde{A}$-целое ($\widetilde{B}$-, $\widetilde{AB}$-целое) слово, то и V — [потенциально] $\widetilde{A}$-целое (соответственно, $\widetilde{B}$-, $\widetilde{AB}$-целое) слово.*

Доказательство. Доказательство проведем только для случая, когда U — $\widetilde{A}$-целое или потенциально $\widetilde{A}$-целое слово. Случай, когда слово V является (потенциально) $\widetilde{B}$-целым, симметричен данному. Наконец, утверждение для (потенциально) $\widetilde{AB}$-целых слов следует из этих двух случаев.

Ввиду равенства $\sim_{\mathsf{r}_1} = \pi_{\mathsf{r}_1}$, достаточно рассмотреть соседнюю пару слов U и V: общее утверждение следует из данного частного случая по индукции. Пусть $U = XY^sZ$, $V = XY^tZ$, где $X, Z \in \Sigma_2^*$, $Y \in \Sigma_2^+$ и $\{s,t\} = \{2,3\}$. Доказываемое утверждение равносильно тому, что если слово V не является (потенциально) $\widetilde{A}$-целым, то и слово U не является таковым.

Предположим, что слово V не является потенциально $\widetilde{A}$-целым. Тогда слово V содержит подслово $2211(21)^l1$ или $11(21)^l122$ для некоторого $l \geqslant 1$. Без ограничения общности можно считать, что $2211(21)^l1 \leqslant V$ (случай $11(21)^l122 \leqslant V$ симметричен данному относительно прочтения слов справа налево). Ясно, что если $2211(21)^l1 \leqslant XYY$ или $2211(21)^l1 \leqslant YYZ$, то слово U также содержит подслово $2211(21)^l1$, а потому не является $\widetilde{A}$-целым. Если же вхождение подслова $2211(21)^l1$ начинается в префиксе XYY, а заканчивается в суффиксе YYZ слова V, то мы имеем либо $Y[|Y|]YY[1] \leqslant 2211(21)^l1$ (этот случай возможен только, когда $t = 3$), либо $YY \ll 2211(21)^l1$. Мы видим, что в обоих случаях слово Y не содержит подслова 22.

Рассмотрим сначала случай $t = 3$ и $Y[|Y|]YY[1] \leqslant 2211(21)^l1$. Легко заметить, что ситуация $Y[1] = Y[|Y|] = 2$ невозможна, так как слово $2211(21)^l1$ содержит только одно вхождение подслова 22. Таким образом, слово YY не содержит подслова 22, поэтому подслово $2211(21)^l1$ начинается в слове V внутри его префикса X, в результате мы приходим к случаю $YY \ll 2211(21)^l1$.

Итак, пусть $YY \ll 2211(21)^l1$. Заметим, что слово YY содержит не более одного вхождения подслова 11, поэтому $11 \nleqslant Y$. Так как Y также не содержит и подслова 22, слово Y — буквочередующееся. В этом случае мы имеем $YY \leqslant 1(21)^l$, что возможно только, когда длина слова Y четна. Тогда оба слова YY и YYY являются буквочередующимися, а потому $Y^t \leqslant 1(21)^l$, то есть замена $Y^t \to Y^s$ происходит внутри подслова $2211(21)^l1$ слова V. Легко видеть, что слово U, получающееся из V после такой замены, содержит подслово $2211(21)^m1$ для некоторого $m \geqslant 1$. Следовательно, слово U не является $\widetilde{A}$-целым, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что если слово V не является $\widetilde{A}$-целым, то и слово U не является таковым. По доказанному выше, это верно в случае, когда V — не потенциально $\widetilde{A}$-целое слово.

Предположим теперь, что слово V является потенциально $\widetilde{A}$-целым, но не является $\widetilde{A}$-целым. Тогда V имеет префикс вида $1\widetilde{A}1$ или $21\widetilde{A}1$ и/или имеет суффикс вида $1\widetilde{A}1$ или $1\widetilde{A}12$. Пусть слово V имеет префикс $P \in \{1(12)^l11, 21(12)^l11\}$ для некоторого $l \geqslant 1$ (случай с суффиксами рассматривается аналогично). Ясно, что если $P \leqslant XYY$, то слово P является также префиксом слова U, и, следовательно, слово U не является $\widetilde{A}$-целым. С другой стороны, если $XYY < P$, то Y — буквочередующееся слово, так как $22 \nleqslant P$ и любое собственное подслово слова P содержит не более одного вхождения подслова 11. Легко проверить, что $YY \leqslant 1(21)^l$, поэтому слово YY является буквочередующимся, а слово Y имеет четную длину. В этом случае слово YYY также является буквочередующимся. Следовательно, $XY^t < P$, причем замена $Y^t \to Y^s$ происходит внутри подслова $1(21)^l$ слова P. Мы видим, что слово U, полученное из слова V после такой замены, имеет префикс $11(21)^m1$ (если $P = 11(21)^l1$) или $211(21)^m1$ (если $P = 211(21)^l1$) для некоторого $m \geqslant 1$, поэтому слово U не является $\widetilde{A}$-целым. $\square$

Отметим, что предложение 1.2.3 в предположении, что U является $\widetilde{A}$-, $\widetilde{B}$ или $\widetilde{AB}$-целым словом, впервые было установлено в [2]. Мы привели альтернативное доказательство этого факта.

Очевидно, любой морфизм, в том числе и морфизм Туэ-Морса, сохраняет отношение $\sim$, то есть из $U \sim V$ следует $\theta(U) \sim \theta(V)$ для любых слов $U, V \in \Sigma_2^*$. Замечательное свойство морфизма Туэ-Морса состоит в том, что и обратная импликация $\theta(U) \sim \theta(V) \Rightarrow U \sim V$ также имеет место. Более общо этот результат формулируется следующим образом.

Предложение 1.2.4 ([2]). *Пусть $W \sim \theta(V)$ и W — регулярное слово. Тогда найдется слово U такое, что $W = \theta(U)$ и $U \sim V$.*

Предложение 1.2.4 играет ключевую роль в построениях главы 2. В данной главе оно встречается эпизодически.

Наконец, в дальнейшем мы будем часто пользоваться (явно или без ссылки) следующим простым утверждением.

Предложение 1.2.5. *Пусть $U \sim V$ для некоторых $U, V \in \Sigma_2^*$ и U имеет префикс (суффикс) W. Тогда если*

1) *слово W почти бесквадратно*

или

2) *слова U, V являются r_1-редуцированными и среди собственных подслов слова W нет квадратов, кроме квадратов букв,*

то W есть префикс (соответственно, суффикс) слова V.

Доказательство. Достаточно рассмотреть пару соседних слов U и V: общее утверждение следует из данного частного случая по индукции. Пусть $U = XY^sZ$ и $V = XY^tZ$ для некоторых слов $X, Z \in \Sigma_2^*$, $Y \in \Sigma_2^+$ и чисел $\{s,t\} = \{2,3\}$. Если слова U и V являются r_1-редуцированными, подслово Y не может быть степенью буквы. В частности, в этом случае $|Y| \geqslant 2$. По условию, YY не является собственным подсловом слова W, поэтому префикс (суффикс) W слова U не длиннее префикса XYY (соотв., суффикса YYZ). Поскольку подслово XYY является общим префиксом, а YYZ — общим суффиксом слов U и V, мы получаем требуемое утверждение. □

§ 1.3 Построение отображения α

Нашей целью является построение такого отображения $\alpha\colon \Sigma_k^* \to \Sigma_2^*$, что для любых слов $U, V \in \Sigma_k^+$ соотношение $U \sim V$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется $\alpha(U) \sim \alpha(V)$.

Естественно, казалось бы, в качестве α выбрать какой-нибудь подходящий морфизм: поскольку любой морфизм сохраняет отношение π, импликация $U \sim V \Rightarrow \alpha(U) \sim \alpha(V)$ становится очевидной. Трудности, однако, возникают при попытке доказать обратное утверждение: из того, что морфизм α сохраняет отношение $\sim$, не следует, вообще говоря, что то же верно и для отображения α^{-1}. Более того, это отображение является частичным, и может оказаться, что α^{-1} применимо не ко всем словам из $[\alpha(U)]$. Действительно, из соотношений $\alpha(U) \sim \alpha(V)$ и $\sim = \pi^+$ следует лишь существование последовательности $\{W_i\}_{i=0}^n$ такой, что $W_0 = \alpha(U)$, $W_n = \alpha(V)$ и $(W_i, W_{i-1}) \in \pi$ для всех $i \geqslant 1$. При этом, если крайние члены последовательности (слова W_0 и W_n) имеют прообразы при действии α, то промежуточные члены $W_1, \ldots, W_{n-1}$ прообразов при действии α могут и не иметь.

Более того, мы не можем гарантировать выполнение $U \sim V$ даже для пары соседних слов $\alpha(U)$ и $\alpha(V)$: если $\alpha(U) = XYYZ$ и $\alpha(V) = XYYYZ$ для некоторых слов $X, Z \in \Sigma_2^*$ и $Y \in \Sigma_2^+$, то мы имеем $U \sim V$ в случае, когда слово Y имеет вид $Y = \alpha(U[i{+}1]) \ldots \alpha(U[i{+}r])$ для некоторых $i, r \geqslant 1$. Однако подслово Y может входить в U другими способами: например, начинаться внутри подслова $\alpha(U[i{-}1])$, заканчиваться внутри $\alpha(U[i{+}r{+}1])$ и иметь вид $Y = P\alpha(U[i]) \ldots \alpha(U[i{+}r])Q$; подслово Y (и даже YY) может целиком входить в $\alpha(U[i])$ или лежать на стыке подслов $\alpha(U[i])$ и $\alpha(U[i+1])$ для некоторого i. Во всех перечисленных случаях замена $YY \to YYY$, превращающая слово $\alpha(U)$ в $\alpha(V)$, индуцирует в слове U замену, в общем случае не сохраняющую отношение $\sim$, поэтому $(\alpha(U), \alpha(V)) \in \pi$ не влечет $U \sim V$.

Мы видим, что поиск подходящего отображения α — весьма непростая задача. Конечно, здесь уместно вспомнить о морфизме Туэ-Морса, который, по предложению 1.2.4, удовлетворяет условию $U \sim V \Leftrightarrow \theta(U) \sim \theta(V)$ для любых слов $U, V \in \Sigma_2^*$. К сожалению, морфизм θ определен только для слов над алфавитом Σ_2, к тому же θ-образы букв имеют длину два, что почти полностью исключает описанные выше «плохие» случаи расположения подслов вида YY и YYY, где $Y \in \Sigma^+$. Так как мы имеем дело с алфавитом Σ_k произвольной (конечной) мощности, ясно, что при больших значениях k образы букв при действии α могут быть сколь угодно длинными.

Для построения функции α нам потребуется следующее обобщение операции произведения слов. Зафиксируем некоторое слово S над произвольным алфавитом Σ, и пусть $X = X_1S$ и $Y = SY_1$ для некоторых $X_1, Y_1 \in \Sigma^*$. *Склейкой слов X и Y по слову S* называется слово $X \circ_S Y = X_1SY_1$. Таким образом, $X \circ_S Y = XY_1 = X_1Y$. В частности, если в качестве S взять пустое слово, мы получим обычную операцию произведения слов, определенную на всем множестве Σ^*. Зафиксируем теперь два слова $S_1, S_2 \in \Sigma^*$. Несложно убедиться, что если слово X заканчивается на S_1, слово Y начинается на S_1 и заканчивается на S_2, а слово Z начинается на S_2, имеет место равенство: $(X \circ_{S_1} Y) \circ_{S_2} Z = X \circ_{S_1} (Y \circ_{S_2} Z)$. В дальнейшем мы будем опускать скобки и писать просто $X \circ_{S_1} Y \circ_{S_2} Z$. Поскольку произведение слов есть склейка по пустому слову, в выражении, в котором встречаются только произведение слов и склейка, порядок действий не важен. *Степень со склейкой слова W по слову S* мы будем обозначать следующим образом:

$$(\circ_S W)^n = \underbrace{W \circ_S W \circ_S \ldots \circ_S W}_{W \text{ повторяется } n \text{ раз}}$$

(при этом предполагается, что W начинается и заканчивается на S). Так, например,

$$(\circ_S W)^2 = W \circ_S W, \quad U(\circ_S W)^3 V = UW \circ_S W \circ_S WV,$$
$$U \circ_S (\circ_S W)^3 V = U \circ_S W \circ_S W \circ_S WV \text{ и } U \circ_S (\circ_S W)^3 \circ_S V = U \circ_S W \circ_S W \circ_S W \circ_S V.$$

Для любого $S \in \Sigma^*$, склейка по слову S естественным естественным образом распространяется на языки.

Идея заключается в том, чтобы в качестве α искать не морфизм, а отображение со схожими свойствами, используя вместо операции произведения слов операцию склейки по непустому слову. При этом образы букв $\alpha(i)$ (где $i = 1, \ldots, k$) нужно выбрать таким образом, чтобы подслова вида YY, где $Y \in \Sigma_2^*$, не могли входить в слова из множества $\alpha(\Sigma_k^*)$ в произвольных позициях, а вынуждены были располагаться строго определенным образом, избегая случаев «плохого» расположения, описанных выше. Для этого мы воспользуемся свойством $\widetilde{AB}$-целости слов и тем, что это свойство сохраняется конгруэнцией $\sim$. Но сначала мы рассмотрим слова, не являющиеся потенциально $\widetilde{AB}$-целыми.

Несложно проверить, что если r_1-редуцированное слово $U \in \Sigma_2^*$ не является потенциально $\widetilde{AB}$-целым, то оно содержит по крайней мере одно из подслов $11(21)^l122$, $1122(12)^l2$, $22(12)^l211$ или $2211(21)^l1$ для некоторого $l \geqslant 1$. Такие слова мы будем называть *маркерами*; в дальнейшем мы будем использовать только маркеры 1121122, 1122122, 2212211 и 2211211. Слова $M^0 = 11211221122122$, $\overline{M^0} = 22122112211211$ и все r_1-редуцированные слова, эквивалентные M^0 или $\overline{M^0}$, называются *двойными маркерами*. Следующая лемма описывает двойные маркеры, эквивалентные слову M^0.

Лемма 1.3.1.

$$[M^0]_{\mathsf{r}_1} = (112)^*112112\,2(1122)^*1\,122122(122)^* \ . \tag{1.3}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{L}$ язык, задаваемый регулярным выражением в правой части равенства (1.3). Несложно убедиться, что $\mathcal{L} \subseteq [M^0]_{\mathsf{r}_1}$. Для доказательства обратного включения заметим, что $M^0 \in \mathcal{L}$. Таким образом, достаточно показать, что если некоторое r_1-редуцированное слово U принадлежит $\mathcal{L}$, то и любое r_1-редуцированное соседнее с U слово V также принадлежит $\mathcal{L}$. Требуемое включение $[M^0]_{\mathsf{r}_1} \subseteq \mathcal{L}$ следует из данного утверждения по индукции, поскольку $\sim_{\mathsf{r}_1} = \pi^+_{\mathsf{r}_1}$.

Пусть $(U,V) \in \pi$, где $U,V \in \Sigma_2^+$, и $U = (112)^{2+l_1}2(1122)^{l_2}1(122)^{2+l_3}$ для некоторых целых чисел $l_1,l_2,l_3 \geqslant 0$. По определению соседства, $U = XY^sZ$ и $V = XY^tZ$ для некоторых слов $X,Z \in \Sigma_2^*$ и $Y \in \Sigma_2^+$, где $\{s,t\} = \{2,3\}$.

В силу предложения 1.2.3, если слово Y^2 потенциально $\widetilde{AB}$-целое, то и слово Y^3 является таковым. В этом случае замена $Y^s \to Y^t$ происходит внутри одного из подслов $(112)^{2+l_1}$, $121122(1122)^{l_2}112212 = 12(1122)^{2+l_2}12$ или $(122)^{2+l_3}$. Предположим, что $Y^s \leqslant (112)^{2+l_1}$. Легко видеть, что если $Y[1] = 1$ и $Y[|Y|] = 2$, то $Y = (112)^r$ а если $Y[1] = 2$ и $Y[|Y|] = 1$, то $Y = (211)^r$ для некоторого $r \geqslant 1$. Наконец, если $Y[1] = Y[|Y|] = 1$, слово Y имеет вид $Y = (121)^r$, где $r \geqslant 1$. Случай $Y[1] = Y[|Y|] = 2$ невозможен, так как в противном случае слово Y^s содержало бы подслово 22, в то время как слово $(112)^{2+l_1}$ подслова 22 не содержит. Легко проверить, что во всех трех случаях, после замены $Y^s \to Y^t$, слово $(112)^{2+l_1}$ преобразуется в слово $(112)^p$, где $p = 2+l_1+r$, если $s=2, t=3$, и $p = 2+l_1-r$, если $s=3, t=2$. Так как полученное таким образом слово содержит подслово YY, мы заключаем, что $p \geqslant 2$, то есть слово $(112)^p$ имеет вид $(112)^2(112)^*$.

Случай $Y^s \leqslant (122)^{2+l_3}$ симметричен только что рассмотренному с точностью до инвертирования букв и прочтения слов справа налево. Разберем оставшийся случай, когда $Y^s \leqslant 12(1122)^{2+l_2}12$. Ясно, что $Y^s \ll 12(1122)^{2+l_2}12$, так как слово $12(1122)^{2+l_2}12$ содержит единственное вхождение каждого из подслов 121 и 212. Нетрудно убедиться, что, в зависимости от того, с какой буквы начинается и на какую букву заканчивается слово Y, возможны четыре варианта: $Y = (1122)^r$, $Y = (2211)^r$, $Y = (1221)^r$ или $Y = (2112)^r$. Во всех четырех случаях замена $Y^s \to Y^t$ в слове $12(1122)^{2+l_2}12$ приводит нас к слову $12(1122)^p21$, где $p = 2+l_2+r$, если $s=2, t=3$, и $p = 2+l_2-r$, если $s=3, t=2$. Так как слово $12(1122)^p21$ содержит подслово Y^t, мы имеем $p \geqslant 2$, поэтому слово $12(1122)^p21$ имеет вид $121122(1122)^*112221$.

Мы видим, что слово V, полученное из U заменой $Y^s \to Y^t$, удовлетворяет регулярному выражению (1.3), поэтому $V \in \mathcal{L}$.

Предположим теперь, что слово YY содержит маркер S. Поскольку U содержит в точности одно вхождение S, мы имеем $s = 2$, так как слово YYY содержит как минимум два различных вхождения S (внутри различных вхождений подслова YY), и $S \not\leqslant Y$. Таким образом, маркер S входит в слово YY на стыке вхождений Y. Без ограничения общности, пусть $S = 1121122$ (случай $S = 1122122$ рассматривается симметрично). Тогда $Y \leqslant (112)^{2+l_1}$, в частности, слово Y не содержит подслова 22. С другой стороны, имеет место $22 \leqslant S$. Следовательно, подслово 22 образуется в YY на стыке вхождений Y, то есть $Y[|Y|] = Y[1] = 2$. Легко видеть, что в этом случае $Y = 2112$ и слово $V = XYYYZ$ удовлетворяет регулярному выражению (1.3), что и требовалось доказать. □

Класс $[\overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1}$ получается инвертированием всех слов из $[M^0]_{\mathsf{r}_1}$. Важное свойство двойных маркеров состоит в следующем: если двойной маркер M является подсловом в YY, то слово Y содержит хотя бы один маркер и поэтому не является потенциально $\widetilde{AB}$-целым.

Зафиксируем теперь некоторый набор $C_1, \ldots, C_k$ попарно неэквивалентных $\widetilde{AB}$-целых слов, каждое из которых начинается и заканчивается на 212212, но при этом $C_i \not\sim 212212$ для всех $i \leqslant k$. Определим отображение $\widetilde{\alpha}$, положив

$$\widetilde{\alpha}(i) = [M^0 \circ_{2122} C_i \circ_{2212} \overline{M^0} \circ_{1211} \overline{C_i}]_{\mathsf{r}_1} \tag{1.4}$$

для всех $i \leqslant k$ и

$$\widetilde{\alpha}(W) = \widetilde{\alpha}(W[1]) \circ_{1121} \widetilde{\alpha}(W[2]) \circ_{1121} \cdots \circ_{1121} \widetilde{\alpha}(W[|W|]) \tag{1.5}$$

для любого слова $W \in \Sigma_k^+$. Слова из $\widetilde{\alpha}(i)$ для всех $i \leqslant k$ называются *блоками*, а слова из $\widetilde{\alpha}(W)$ для любого $W \in \Sigma_k^+$ — *блочными словами*. Мы говорим, что W — *прообраз слова* U, и пишем $W = \widetilde{\alpha}^{-1}(U)$, если $U \in \widetilde{\alpha}(W)$.

Покажем, что для любого натурального числа k существует набор слов $C_1, C_2, \ldots, C_k$, удовлетворяющий всем условиям из определения отображения $\widetilde{\alpha}$. Оказывается, требуемый набор можно получить при помощи слов Туэ–Морса.

Лемма 1.3.2. *Последовательность $\{2\mathbf{t}_{2n}2\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из попарно неэквивалентных $\widetilde{AB}$-целых слов, начинающихся и заканчивающихся на* 212212.

Доказательство. Заметим, что слова $\mathbf{t}_n$ начинаются с 1 при любом $n \geqslant 0$, в то время как последний символ зависит от четности n: при четном n слово $\mathbf{t}_n$ заканчивается на 1, при нечетном n — на 2. В частности, слово $\mathbf{t}_{2n-3}$ начинается с 1 и заканчивается на 2 для любого $n \geqslant 2$. Так как $\mathbf{t}_3 = 12212112$ и $\overline{\mathbf{t}}_3 = 21121221$, мы видим, что слово $2\mathbf{t}_{2n}2$ начинается и заканчивается на 212212 для любого $n \geqslant 2$. Очевидно, тем же свойством обладает и слово $2\mathbf{t}_2 2 = 212212$.

Ввиду предложения 1.2.1, слова $2\mathbf{t}_{2n}2$ являются вполне редуцированными, и, следовательно, $\widetilde{AB}$-целыми, при любом $n \geqslant 0$.

Наконец, предположим, что $2\mathbf{t}_{2n}2 \sim 2\mathbf{t}_{2m}2$ для некоторых целых чисел $n, m \geqslant 1$, причем $n < m$. Среди всех таких пар (n, m)выберем пару с наименьшим значением n. Припишем в начало и конец слов $2\mathbf{t}_{2n}2$ и $2\mathbf{t}_{2m}2$ символ 1. Применяя предложение 1.2.4, мы получаем

$$1\mathbf{t}_{2n-1}2 = \theta^{-1}(12\mathbf{t}_{2n}21) \sim \theta^{-1}(12\mathbf{t}_{2m}21) = 1\mathbf{t}_{2m-1}2\ .$$

Теперь припишем в начало слов $1\mathbf{t}_{2n-1}2$ и $1\mathbf{t}_{2m-1}2$ символ 2, а в конец — символ 1. Повторное использование предложения 1.2.4 приводит нас к паре эквивалентных слов $2\mathbf{t}_{2n-2}2$ и $2\mathbf{t}_{2m-2}2$. Случай $n \geqslant 2$ противоречит выбору пары (n,m) ввиду того, что $2\mathbf{t}_{2n-2}2 \sim 2\mathbf{t}_{2m-2}2$ и $1 \leqslant n-1 < n$. С другой стороны, при $n=1$ и $n<m$ слова $2\mathbf{t}_{2n-2}2 = 212$ и $2\mathbf{t}_{2m-2}2$ не эквивалентны. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Так как $2\mathbf{t}_2 2 = 212212$, из леммы 1.3.2, в частности, следует, что $2\mathbf{t}_{2n}2 \not\sim 212212$ для любого $n \geqslant 2$. Таким образом, в качестве C_i мы можем выбрать слово $2\mathbf{t}_{2i+2}2$ для каждого $i = 1,\dots,k$. Такой выбор слов $C_1,\dots,C_k$, вероятно, не является оптимальным в плане минимизации суммарной длины слов, однако такая задача в диссертации не рассматривается, поскольку наша цель — показать существование набора слов $C_1,\dots,C_k$ с требуемыми свойствами.

Заметим, что, в силу предложений 1.2.3 и 1.2.5, для любого $i \leqslant k$ все слова из $[C_i]_{\mathsf{r}_1}$ являются $\widetilde{AB}$-целыми, начинаются и заканчиваются на 212212.

Следующая лемма дает описание структуры произвольных блоков.

Лемма 1.3.3. *Для любого $i = 1,\dots,k$ имеет место*
1) $[M^0 \circ_{2122} C_i \circ_{2212} \overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1} = [M^0]_{\mathsf{r}_1} \circ_{2122} [C_i]_{\mathsf{r}_1} \circ_{2212} [\overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1}$;
2) $[M^0 \circ_{2122} C_i \circ_{2212} \overline{M^0} \circ_{1211} \overline{C_i}]_{\mathsf{r}_1} = [M^0]_{\mathsf{r}_1} \circ_{2122} [C_i]_{\mathsf{r}_1} \circ_{2212} [\overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1} \circ_{1211} [\overline{C_i}]_{\mathsf{r}_1}$.

Доказательство. Мы докажем утверждение 2 леммы, утверждение 1 доказывается аналогично. Пусть
$$\mathcal{R} = [M^0]_{\mathsf{r}_1} \circ_{2122} [C_i]_{\mathsf{r}_1} \circ_{2212} [\overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1} \circ_{1211} [\overline{C_i}]_{\mathsf{r}_1}$$
и
$$R = M^0 \circ_{2122} C_i \circ_{2212} \overline{M^0} \circ_{1211} \overline{C_i}\ .$$
Очевидно, $\mathcal{R} \subseteq [R]_{\mathsf{r}_1}$. Ввиду равенства $\sim_{\mathsf{r}_1} = \pi^+_{\mathsf{r}_1}$, для доказательства обратного включения достаточно показать, что для произвольной пары r_1-редуцированных соседних слов U и V, если $U \in \mathcal{R}$, то и $V \in \mathcal{R}$. Так как $R \in \mathcal{R}$, включение $[R]_{\mathsf{r}_1} \subseteq \mathcal{R}$ будет следовать из этого утверждения по индукции.

Пусть $U = XY^sZ$ и $V = XY^tZ$ для некоторых слов $X, Z \in \Sigma_2^*$, $Y \in \Sigma_2^+$ и чисел $\{s,t\} = \{2,3\}$. Предположим, что $U \in \mathcal{R}$. Тогда
$$U = M_1 \circ_{2122} D_1 \circ_{2212} M_2 \circ_{1211} D_2$$
для некоторых слов $M_1 \in [M^0]_{\mathsf{r}_1}$, $M_2 \in [\overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1}$, $D_1 \in [C_i]_{\mathsf{r}_1}$ и $D_2 \in [\overline{C_i}]_{\mathsf{r}_1}$. По лемме 1.3.1, мы имеем
$$M_1 = (112)^{2+l_1}\, 2(1122)^{l_2}1\, (122)^{2+l_3} \text{ и } M_2 = (221)^{2+l_4}\, 1(2211)^{l_5}2\, (211)^{2+l_6},$$
где $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 \geqslant 0$.

Заметим, что

$$(122)^{2+l_3} \circ_{2122} D_1 \circ_{2212} (221)^{2+l_4} = 12\underbrace{(212)^{l_3} D_1 (212)^{l_4}}_{D_1'}21 =$$
$$12D_1'21 = 122122 \circ_{2122} D_1' \circ_{2212} 221221\ .$$

Слово D_1 начинается и заканчивается на 212212, поэтому $D_1' \sim D_1 \sim C_i$. Таким образом, мы можем считать, что $l_3 = l_4 = 0$ (в противном случае заменим слово D_1 в наших рассуждениях на слово D_1'). По схожим соображениям мы считаем, что $l_6 = 0$.

Слово U содержит в точности по одному вхождению каждого из четырех маркеров. Так как Y входит в U по крайней мере дважды, слово Y является потенциально $\widetilde{AB}$-целым. Предположим, что $S \leqslant YY$ для некоторого маркера S. Тогда S образуется в YY на стыке вхождений Y, причем других маркеров слово YY не содержит. Следовательно, слово U совпадает с $XYYZ$, поскольку $XYYYZ$ содержит по крайней мере два различных вхождения S (внутри различных вхождений подслова YY).

Если $S = 1121122$, то $YY \leqslant M_1$; очевидно, в этом случае слово V, полученное из U заменой $YY \to YYY$, принадлежит $\mathcal{R}$. Предположим, что $S = 1122122$. Слово D_1 начинается с 212212, поэтому маркер S входит в U внутри подслова $S12$. Представим слово Y в виде $Y = PS_1 = S_2Q$, где $P, Q \in \Sigma_2^*$, $S_1, S_2 \in \Sigma_2^+$ и $S_1S_2 = S$. Заметим, что $S \leqslant YY$ влечет $|Y| \geqslant 4$. Легко видеть, что $212 \leqslant Y$. Действительно, если $S12 \leqslant YY$, то слово Y содержит подслово $S[7]12 = 212$, в противном случае $|Q| \leqslant 1$. Если $Q = \lambda$, то $Y = S_2$ и длина S_2 не меньше четырех. Так как, очевидно, $Y \neq 1221$, в случае $|Q| = 1$, то есть когда $Q = 1$, длина S_2 также не меньше четырех. Но S_2 является суффиксом маркера S, а всякий суффикс слова S длины четыре или более содержит подслово 212.

Итак, мы доказали, что $212 \leqslant Y$. С другой стороны, слово $Y = PS_1$ целиком лежит в двойном маркере M_1, а подслово 212 встречается в M_1 только внутри S (ввиду того, что $l_3 = 0$). Следовательно, $S_1 = 112212$ и $S_2 = 2$. Но тогда слово Y содержит лишь одно вхождение подслова 212, причем Y начинается и заканчивается на 212 (поскольку Y начинается с $S_2 12$ и заканчивается на S_1). Это возможно только, если $Y = 212$. Мы приходим к противоречию с тем, что $|Y| \geqslant 4$.

Случаи $S = 2212211$ и $S = 2211211$ симметричны случаю $S = 1122122$ (относительно прочтения слов справа налево и операции инвертирования соответственно). Наконец, предположим, что слово YY не содержит маркеров, то есть является потенциально $\widetilde{AB}$-целым. По предложению 1.2.3, оба слова Y^s и Y^t потенциально $\widetilde{AB}$-целые. Тогда имеет место один из следующих четырех вариантов:

а) $Y^s \leqslant M_1$;

б) $Y^s \leqslant 122122 \circ_{2122} D_1 \circ_{2212} 221221$;

в) $Y^s \leqslant M_2$;

г) $Y^s \leqslant 211211 \circ_{1211} D_2$.

В случаях а) и в) замена $Y^s \to Y^t$ происходит внутри двойных маркеров, поэтому слово V, полученное при помощи такой замены, принадлежит языку $\mathcal{R}$.

Пусть теперь $U' = X'Y^sZ' = 122122 \circ_{2122} D_1 \circ_{2212} 221221$, где X' — суффикс слова X, а Z' — префикс слова Z. Положим $V' = X'Y^tZ'$. Слова U' и V' эквивалентны, а потому, ввиду предложения 1.2.5, имеют общий префикс 122122 и общий суффикс 221221. Так как слово U' потенциально $\widetilde{AB}$-целое, то и слово V' является потенциально $\widetilde{AB}$-целым по предложению 1.2.3, следовательно, либо $V' = 1221221$, либо V' начинается на 12212212 и заканчивается на 21221221.

Рассмотрим теперь слово $2V'2$. Ясно, что $2V'2 \sim 2U'2 = 212D_1212 \sim D_1 \sim C_i$, так как слово D_1 имеет префикс 212212 и суффикс 212212. Заметим, что слово $2V'2$ начинается и заканчивается на $(212)^3$, при этом $2V'2 \neq 212212212$ ввиду того, что $C_i \not\sim 212212$ (по определению отображения $\widetilde{\alpha}$) и $2V'2 \sim C_i$. Поэтому слово $D_1' = V'[3\ldots|V'|-2]$, полученное из $2V'2$ заменой префикса и суффикса $(212)^3$ на слово $(212)^2$, также эквивалентно D_1. Таким образом,

$$V' = 12D_1'21 = 122122 \circ_{2122} D_1' \circ_{2212} 221221$$

и $D_1' \in [C_i]_{\mathsf{r}_1}$, откуда $V \in \mathcal{R}$.

Аналогично показывается, что и в случае $Y^s \leqslant 211211 \circ_{1211} D_2$ мы имеем $V \in \mathcal{R}$. Таким образом, при любом расположении подслова Y^s в слове U из языка $\mathcal{R}$, слово V, полученное из U заменой $Y^s \to Y^t$, также принадлежит языку $\mathcal{R}$; это завершает доказательство леммы. $\square$

Согласно лемме 1.3.3, любой блок $B \in \widetilde{\alpha}(i)$, где $i \leqslant k$, можно представить в виде

$$B = M_1 \circ_{2122} D_1 \circ_{2212} M_2 \circ_{1211} D_2, \tag{1.6}$$

где $M \in [M^0]_{\mathsf{r}_1}$, $M_2 \in [\overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1}$, $D_1 \in [C_i]_{\mathsf{r}_1}$ и $D_2 \in [\overline{C_i}]_{\mathsf{r}_1}$ для некоторого $i \leqslant k$. Слова D_1 и D_2 мы будем называть *первым* и *вторым контентами блока* B соответственно. Легко видеть, что блок B с точностью до эквивалентности определяется любым из своих контентов: для любого блока B' и его контента D' из $D' \sim D_1$ или $D' \sim D_2$ следует $B \sim B'$. Если $B = PQ$ для некоторых слов $P, Q \in \Sigma_2^*$, то либо $D_1 \leqslant P$, либо $D_2 \leqslant Q$. Таким образом, если блочное слово U содержит подслова P и Q, то хотя бы одно из этих подслов всегда будет входить в U внутри блока B (или эквивалентного ему блока).

Из доказательства леммы 1.3.3 следует, что можно выбрать такое представление блока B в виде (1.6), при котором M_1 заканчивается маркером 1122122, а M_2 начинается и заканчивается соответственно маркерами 2212211 и 2211211. Рассуждая аналогично (с точностью до операции инвертирования слов), можно показать, что блочное слово U можно разбить на блоки так, что каждый блок, начиная со второго, имеет префикс 1121122. Если слово U начинается маркером $(112)^{2+l}2$ ($l > 0$), то есть $U = (112)^{2+l}2U'$ для некоторого $U' \in \Sigma_2^*$ то слово $1121122U'$ является блочным, при этом его первый блок начинается с маркера 1121122. Таким образом, для блочного слова U справедливо следующее представление:

$$U = (112)^l B_1 \circ_{1121} B_2 \circ_{1121} \ldots \circ_{1121} B_n, \tag{1.7}$$

где каждый блок B_j $(j = 1, \ldots, n)$ начинается с маркера 1121122. Префикс $(112)^l$ (где $l \geqslant 0$) мы называем *вводным префиксом слова* U. Из однозначности разбиения (1.7) вытекает, что блочное слово U имеет только один прообраз $\widetilde{\alpha}^{-1}(U)$.

Теперь построим функцию $\alpha\colon \Sigma_k^+ \to \Sigma_2^+$: выберем из каждого блока $\widetilde{\alpha}(i)$ по одному слову T_i и положим $\alpha(i) = T_i$ для любого $i = 1, \ldots, k$ и

$$\alpha(W) = \alpha(W[1]) \circ_{1121} \cdots \circ_{1121} \alpha(W[|W|])$$

для любого слова $W \in \Sigma_k^+$. Поскольку всякое блочное слово U имеет только один прообраз $\widetilde{\alpha}^{-1}(U)$, функция α взаимно-однозначна, и притом $\alpha^{-1}(U) = \widetilde{\alpha}^{-1}(U)$ для всех $U \in \alpha(\Sigma_k^+)$.

§ 1.4 Доказательство основных результатов

Вхождения маркеров S_1 и S_2 в блочное слово U назовем *соседними*, если между S_1 и S_2 в слове U не содержится других вхождений маркеров. Отметим, что в блочном слове соседними могут являться только вхождения различных маркеров, тогда как вхождения одного и того же маркера не являются соседними.

Докажем основную техническую лемму главы 1.

Лемма 1.4.1 (Лемма о сведении)**.** *Для любых слов $U, V \in \Sigma_k^+$, $U \sim V$ тогда и только тогда, когда $\alpha(U) \sim \alpha(V)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала пару соседних слов $U = XYYZ$ и $V = XYYYZ$, где $X, Z \in \Sigma_k^*$ и $Y \in \Sigma_k^+$. Очевидно, слова

$$\alpha(U) = \alpha(X) \circ_{1121} \alpha(Y) \circ_{1121} \alpha(Y) \circ_{1121} \alpha(Z) = \\ (\alpha(X)(1121)^{-1})\, (\alpha(Y)(1121)^{-1})^2\, \alpha(Z)$$

и

$$\alpha(V) = \alpha(X) \circ_{1121} \alpha(Y) \circ_{1121} \alpha(Y) \circ_{1121} \alpha(Y) \circ_{1121} \alpha(Z) = \\ (\alpha(X)(1121)^{-1})\, (\alpha(Y)(1121)^{-1})^3\, \alpha(Z)$$

также являются соседними. Ввиду равенства $\sim\, = \pi^+$, для произвольной пары эквивалентных слов U и V выполнимость соотношения $\alpha(U) \sim \alpha(V)$ устанавливается по индукции.

Справедливость обратной импликации вытекает из более общего утверждения:

(∗) *Пусть $U, V \in \Sigma_2^+$, слова U и V являются r_1-редуцированными и $U \sim V$. Тогда если U — блочное слово, то V также является блочным словом и $\widetilde{\alpha}^{-1}(U) \sim \widetilde{\alpha}^{-1}(V)$.*

Ввиду равенства $\sim_{\mathsf{r}_1} = \pi^+_{\mathsf{r}_1}$, утверждение (∗) достаточно доказать для пары r_1-редуцированных соседних слов $U = XY^sZ$ и $V = XY^tZ$, где $X, Z \in \Sigma_2^*$, $Y \in \Sigma_2^+$ и $\{s,t\} = \{2,3\}$. Для блочного слова U мы будем пользоваться представлением (1.7) в виде произведения блоков. Рассмотрим различные варианты расположения подслова Y^s внутри U.

Предположим сперва, что слово Y потенциально $\widetilde{AB}$-целое. Ясно, что в этом случае слово Y^s содержит не более одного маркера (если на стыке вхождений Y в слове Y^s образуется маркер, то $s = 2$, так как при $s = 3$ слово $Y^s = YYY$ содержало бы два соседних вхождения одного и того же маркера, что невозможно). Тогда либо $Y^s \leqslant B_p$ для некоторого блока B_p, либо $Y^s \leqslant M_2 \circ_{1211} D_2 \circ_{1121} M_1$, причем слово $M_2 \circ_{1211} D_2$ является суффиксом блока B_p (со вторым контентом D_2 и двойным маркером $M_2 \in [\overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1}$), а слово $M_1 \in [M^0]_{\mathsf{r}_1}$ — префиксом блока B_{p+1}. В силу леммы 1.3.3, в обоих случаях (во втором случае применяется утверждение 1 леммы с точностью до операции инвертирования слов), слово V получается из U заменой одного (B_p) или двух (B_p и B_{p+1}) блоков на им эквивалентные, поэтому $\widetilde{\alpha}^{-1}(U) = \widetilde{\alpha}^{-1}(V)$.

Пусть теперь $1121122 \leqslant Y$. Предположим, что Y содержит r различных вхождений маркера 1121122 ($r \geqslant 1$). В этом случае слово Y можно представить в виде

$$Y = PB_{p+1} \circ_{1121} B_{p+2} \circ_{1121} \ldots \circ_{1121} B_{p+r-1} \circ_{1121} Q,$$

где Q — префикс блока B_{p+r}, начинающийся с 1121122 (это последнее вхождение маркера 1121122 в Y), а P — или пустое слово, или суффикс вводного слова (при $p = 0$), или суффикс подслова $B_p(1121)^{-1}$. Тогда подслова $U_1 = X(YQ^{-1})1121$, $U_2 = Q(YQ^{-1})1121$ и $U_3 = QZ$ блочного слова U состоят из целого числа блоков. В силу равенств

$$XYYZ = U_1 \circ_{1121} U_2 \circ_{1121} U_3 \quad \text{и} \quad XYYYZ = U_1 \circ_{1121} U_2 \circ_{1121} U_2 \circ_{1121} U_3,$$

оба слова U и V являются блочными.

Подслово $QP1121122$, входящее в YY, начинается и заканчивается маркером 1121122. Если на стыке Q и P маркер 1121122 не образуется, слово $QP1121$ совпадает с блоком B_{p+r}, причем хотя бы одно из слов Q или $P1121$ содержит какой-нибудь из его контентов. Если Q содержит какой-либо из контентов блока B_{p+r}, то первый блок слова $U_3 = QZ$ эквивалентен B_{p+r}, поэтому, с точностью до замены блоков на эквивалентные,

$$Y^sZ' = P(\circ_{1121} B_{p+1} \circ_{1121} \ldots \circ_{1121} B_{p+r})^s,$$

где Z' — некоторый префикс слова Z. Дополнительно положим $X' = \lambda$.

В случае, когда контент блока B_{p+r} содержится в слове $P1121$, мы имеем $p > 0$ и $B_p \sim B_{p+r}$, откуда, с точностью до эквивалентных блоков,

$$X'Y^s = (\circ_{1121} B_p \circ_{1121} \ldots \circ_{1121} B_{p+r-1})^s \circ_{1121} Q$$

для подходящего суффикса X' слова X. В этом случае положим $Z'=\lambda$.

Наконец, если на стыке вхождений Q и P в слово YY образуется маркер 1121122, то слово $QP1121$ состоит из двух блоков: $QP1121 = B_{p+r} \circ_{1121} B_{p+r+1}$. При этом Q содержит первый контент блока B_{p+r}, а подслово $P1121$ — оба контента блока B_{p+r+1}, поэтому первый блок слова U_3 эквивалентен B_{p+r} и $B_p \sim B_{p+r+1}$. Таким образом, мы получаем

$$X'Y^sZ' = (\circ_{1121} B_p \ldots \circ_{1121} B_{p+r})^s$$

для соответствующих суффикса X' слова X и префикса Z' слова Z.

Легко видеть, что во всех трех случаях замена $X'Y^sZ' \to X'Y^tZ'$ в слове U приводит к одной из замен вида $T^s \to T^t$ в слове $W = \widetilde{\alpha}^{-1}(U)$, где

$$T \in \{W[p{+}1 \ldots p{+}r], W[p \ldots p{+}r{-}1], W[p \ldots p{+}r]\} \ .$$

Поэтому слово $\widetilde{\alpha}^{-1}(V)$, получающееся после такой замены, оказывается соседним с $\widetilde{\alpha}^{-1}(U)$.

Для завершения доказательства осталось рассмотреть вариант, при котором слово Y не является потенциально $\widetilde{AB}$-целым, но при этом $1121122 \not\leqslant Y$. Пусть S — какой-нибудь маркер, входящий в Y. Ясно, что слово Y^s содержит по крайней мере два различных вхождения S. Тогда, по построению отображения $\widetilde{\alpha}$, слово Y^s содержит все четыре маркера. Это возможно только, если маркер 1121122 образуется внутри слова Y^s на стыке вхождений Y, в то время как остальные маркеры встречаются в Y по одному разу.

Представим Y в виде $Y = PQR$, где $Q \in \Sigma_2^*$, $P, R \in \Sigma_2^+$, причем $RP = 1121122$. Слово RPQ является префиксом некоторого блока B_p слова U. Пусть

$$B_p = M_1 \circ_{2122} D_1 \circ_{2212} M_2 \circ_{1211} D_2,$$

где M_1 и M_2 — двойные маркеры, а D_1 и D_2 — соответственно, первый и второй контенты B_p. Поскольку в слове Y все вхождения маркеров встречаются внутри подслова Q, мы можем записать

$$RPQ = M_1 \circ_{2122} D_1 \circ_{2212} M_2 \circ_{1211} T$$

для некоторого префикса T контента D_2.

С другой стороны, слово $PQ1121$ является суффиксом блока B_{p-1} и имеет вид

$$PQ1121 = T' \circ_{2122} D_1' \circ_{2212} M_2' \circ_{1211} D_2',$$

где M_1' и M_2' — двойные маркеры, D_1' и D_2' — соответственно, первый и второй контенты блока B_{p-1}, и $T' \leqslant M_1'$, причем T' содержит маркер 1122122. В силу единственности вхождения каждого маркера в слово Y, мы заключаем, что $D_1' = D_1$, $M_2' = M_2$ и

$$RPQ1121 = M_1 \circ_{2122} D_1 \circ_{2212} M_2 \circ_{1211} D_2',$$

причем $D_2' \sim \overline{D_1'} = \overline{D_1}$.

Таким образом, слово $RPQ1121$ является блоком, первый контент которого совпадает с первыми контентами блоков B_p и B_{p-1}. Следовательно, $B_{p-1} \sim B_p \sim RPQ1121$. Заметим, что подслова $XPQ1121$ и $RPQRZ$ блочного слова U состоят из целого числа блоков. Ввиду равенств

$$XYYZ = XPQ\underbrace{1121122}_{RP}QRZ = (XPQ1121) \circ_{1121} (RPQRZ)$$

и

$$\begin{aligned} XYYYZ = & XPQ\underbrace{1121122}_{RP}Q\underbrace{1121122}_{RP}QRZ = \\ & (XPQ1121) \circ_{1121} (RPQ1121) \circ_{1121} (RPQRZ), \end{aligned}$$

оба слова U и V являются блочными. Преобразование $Y^s \to Y^t$ в слове U индуцирует преобразование $(W[p])^s \to (W[p])^t$ в его прообразе $W = \widetilde{\alpha}^{-1}(U)$, поэтому прообразы слов U и V являются соседними, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 1.1 непосредственно следует из леммы о сведении.

Доказательство теоремы 1.2. Для доказательства нетривиальной импликации теоремы рассмотрим морфизм $\beta\colon \Sigma_k^* \to \Sigma_2^*$, действующий на Σ_k по правилу: $\beta(i) = \alpha(i)(1121)^{-1}$. Несложно проверить, что $\alpha(U) = \beta(U)1121$ для любого слова $U \in \Sigma_k^+$. Если гипотеза Бжозовского справедлива для полугруппы $B(2,2,3)$, то для любого слова $U \in \Sigma_k^*$ класс $[\alpha(U)]$ является рациональным языком. Следовательно, класс $[U] = \beta^{-1}([\alpha(U)](1121)^{-1})$ также является рациональным языком, поэтому гипотеза Бжозовского справедлива и для полугруппы $B(k,2,3)$. $\square$

§ 1.5 Обобщение результатов на полугруппы $B(k,2,2{+}m)$

До сих пор мы рассматривали только полугруппы $B(k,2,3)$. Оказывается, при небольших изменениях в доказательстве, теоремы 1.1 и 1.2 могут быть обобщены на полугруппы $B(k,2,2+m)$ с произвольным значением m. А именно, справедливы следующие две теоремы.

Теорема 1.3. *Проблема равенства слов для полугруппы $B(k,2,2+m)$ ранга $k \geqslant 2$ разрешима тогда и только тогда, когда проблема равенства слов разрешима для полугруппы $B(2,2,2+m)$.*

Теорема 1.4. *Гипотеза Бжозовского для полугруппы $B(k,2,2+m)$ при $k \geqslant 2$ справедлива тогда и только тогда, когда гипотеза справедлива для полугруппы $B(2,2,2+m)$.*

Зафиксируем параметры $m > 1$ и $k \geqslant 2$ и рассмотрим полугруппу $B(k,2,2+m)$. В этом параграфе, при отсутствии индексов, под обозначениями $\sim$, π и $[W]$ (где $W \in \Sigma_k$) мы понимаем, соответственно, $\sim_{2,m}$, $\pi_{2,m}$ и $[W]_{2,m}$. Эквивалентными (соседними) мы называем слова, эквивалентные относительно конгруэнции $\sim_{2,m}$ (соотв., лежащие в отношении $\pi_{2,m}$).

Для доказательства теорем 1.3 и 1.4 мы воспользуемся уже построенным в § 1.3 отображением α, немного подправив его определение (точнее, мы подкорректируем определение отображения $\widetilde{\alpha}$). Но сначала проверим, какие утверждения остаются в силе при замене конгруэнции $\sim_{2,1}$ на $\sim_{2,m}$.

Существенной является утрата свойства $\mathsf{r}_1(W) \sim W$ для произвольного слова $W \in \Sigma_2^*$, так как сокращения вида $c^l \to c^2$ $(l \geqslant 3)$ в слове W в общем случае могут выводить нас из класса $[W]$. Конечно, можно было бы изменить определение операции r_1 таким образом, чтобы сохранить свойство $\mathsf{r}_1(W) \sim W$, однако такой подход делает невозможным использование понятия $\widetilde{AB}$-целого слова, для которого необходимо отсутствие любых степеней букв в слове выше второй. Таким образом, от свойства $\mathsf{r}_1(W) \sim W$ нам придется отказаться. Тем не менее, предложение 1.2.2 остается в силе.

Предложение 1.5.1. *Если* $(W_1, W_2) \in \pi_{2,m}$, *то* $(\mathsf{r}_1(W_1), \mathsf{r}_1(W_2)) \in \pi_{2,m}$.

Доказательство. Пусть $W_1 = XYYZ$ и $W_2 = XY^{2+m}Z$ для некоторых слов $X, Z \in \Sigma_2^*$ и $Y \in \Sigma_2^+$. Так как степени букв можно сокращать в любом порядке, применим операцию r_1 сначала к словам X, Y и Z. Поскольку слова $\mathsf{r}_1(X)\mathsf{r}_1(Y)\mathsf{r}_1(Y)\mathsf{r}_1(Z)$ и $\mathsf{r}_1(X)\mathsf{r}_1(Y)^{2+m}\mathsf{r}_1(Z)$, очевидно, являются соседними, мы можем считать, что слова X, Y и Z уже r_1-редуцированы. Заметим, что если Y является степенью буквы, то $\mathsf{r}_1(W_2) = \mathsf{r}_1(W_1)$: в этом случае доказываемое утверждение очевидно. В дальнейшем мы будем считать, что $Y \neq c^l$ ни для каких $c \in \Sigma_2$ и $l \geqslant 0$.

Предположим, что $X = X'c^{l_1}$ и $Y = c^{l_2}Y'$ для некоторой буквы c и слов $X' \in \Sigma_2^*$, $Y' \in \Sigma_2^+$ таких, что $Y'[1] \neq c$, $0 < l_1, l_2 \leqslant 2$ и $l_1 + l_2 > 2$. Тогда мы редуцируем только суффикс слова X, оставляя слово Y нетронутым. Таким образом, если $l_2 = 2$, слово XY редуцируется до $X'Y$, а при $l_2 = 1$ мы получаем $\mathsf{r}_1(XY) = X'cY$. В обоих случаях, после сокращения $c^{l_1+l_2} \to c^2$, слова U и V остаются соседними. Аналогично показывается, что применение r_1 к подслову YZ сохраняет отношение соседства между словами U и V, поэтому мы можем считать, что подслова XY и YZ уже r_1-редуцированы.

Осталось рассмотреть случай, когда степень буквы образуется на стыке вхождений Y. Пусть $Y = c^{l_1}Y'c^{l_2}$, где $c \in \Sigma_2$, $Y' \in \Sigma_2^+$, $Y'[1] \neq c$, $Y'[|Y'|] \neq c$, $0 < l_1, l_2 \leqslant 2$ и $l_1 + l_2 > 2$. Тогда

$$\mathsf{r}_1(W_1) = Xc^{l_1}Y'ccY'c^{l_2}Z = Xc^{l_1-1}\,(cY'c)^2\,c^{l_2-1}Z$$

и

$$\mathsf{r}_1(W_2) = Xc^{l_1}(Y'cc)^{1+m}Y'c^{l_2}Z = Xc^{l_1-1}\,(cY'c)^{2+m}\,c^{l_2-1}Z \ .$$

Таким образом, $(\mathsf{r}_1(W_1), \mathsf{r}_1(W_2)) \in \pi_{2,m}$, что и требовалось доказать. □

Ввиду предложения 1.5.1, если мы рассмотрим ограничения π_{r_1} и $\sim_{\mathsf{r}_1}$, соответственно, отношения соседства π и конгруэнции $\sim$ на множество всех r_1-редуцированных слов над алфавитом Σ_2, то отношение $\sim_{\mathsf{r}_1}$ будет транзитивным замыканием π_{r_1}. Множество всех r_1-редуцированных слов из класса $[W]$ мы по-прежнему обозначаем через $[W]_{\mathsf{r}_1}$.

Что касается свойства слов быть (потенциально) $\widetilde{AB}$-целым, оно по-прежнему сохраняется конгруэнцией $\sim$ ввиду импликации $U \sim_{2,m} V \Rightarrow U \sim_{2,1} V$, тривиально выполнимой для любых $U, V \in \Sigma_2^*$.

Определение двойных маркеров мы оставляем неизменным, при этом, как было сказано выше, под эквивалентностью мы подразумеваем отношение $\sim_{2,m}$. Это несколько сужает множество двойных маркеров, как показывает следующая лемма (для сравнения, см. лемму 1.3.1).

Лемма 1.5.1.

$$[M^0]_{\mathsf{r}_1} = ((112)^m)^* 112112\,2((1122)^m)^* 1\,122122((122)^m)^* \ . \tag{1.8}$$

Доказательство леммы 1.5.1 почти полностью повторяет доказательство леммы 1.3.1: отличие состоит в том, что теперь $\{s,t\} = \{2, 2+m\}$, а числа l_1, l_2 кратны m.

Определение отображения $\widetilde{\alpha}$ переносится на случай конгруэнции $\sim_{2,m}$ с одним небольшим изменением. Как было сказано выше, для любых слов U и V справедлива импликация $U \sim_{2,m} V \Rightarrow U \sim_{2,1} V$, которая, очевидно, равносильна импликации $U \not\sim_{2,1} V \Rightarrow U \not\sim_{2,m} V$. Таким образом, замена конгруэнции $\sim_{2,1}$ на $\sim_{2,m}$ ослабляет условия, наложенные на слова $C_1, \ldots, C_k$ из определения отображения $\widetilde{\alpha}$. Чтобы не допускать этого, мы потребуем, чтобы по-прежнему выполнялось $C_i \not\sim_{2,1} C_j$ для любых $i, j \leqslant k$, $i \neq j$, и $C_i \notin [212212]_{2,1}$ для любого $i \leqslant k$. Позже мы увидим, для чего нам необходимо сохранить определение слов $C_1, \ldots, C_k$ в таком виде. По лемме 1.3.2, которая, очевидно, остается в силе, такой набор слов существует.

Остановимся подробнее на доказательстве аналога леммы 1.3.3.

Лемма 1.5.2. *Для любого $i = 1, \ldots, k$ имеет место*
1) $[M^0 \circ_{2122} C_i \circ_{2212} \overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1} = [M^0]_{\mathsf{r}_1} \circ_{2122} [C_i]_{\mathsf{r}_1} \circ_{2212} [\overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1}$;
2) $[M^0 \circ_{2122} C_i \circ_{2212} \overline{M^0} \circ_{1211} \overline{C_i}]_{\mathsf{r}_1} = [M^0]_{\mathsf{r}_1} \circ_{2122} [C_i]_{\mathsf{r}_1} \circ_{2212} [\overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1} \circ_{1211} [\overline{C_i}]_{\mathsf{r}_1}$.

Доказательство. Как и в лемме 1.3.3, мы ограничимся доказательством утверждения 2. Для этого достаточно рассмотреть пару соседних r_1-редуцированных слов U и V и показать, что если $U \in \mathcal{R}$, то и $V \in \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ обозначает язык, задаваемый соответствующим регулярным выражением из условия (см лемму 1.3.3).

Пусть $U = XY^sZ$ и $V = XY^tZ$ для некоторых слов $X, Z \in \Sigma_2^*$, $Y \in \Sigma_2^+$ и чисел $\{s,t\} = \{2, 2+m\}$, и

$$U = M_1 \circ_{2122} D_1 \circ_{2212} M_2 \circ_{1211} D_2$$

для некоторых слов $M_1 \in [M^0]_{\mathsf{r}_1}$, $M_2 \in [\overline{M^0}]_{\mathsf{r}_1}$, $D_1 \in [C_i]_{\mathsf{r}_1}$ и $D_2 \in [\overline{C_i}]_{\mathsf{r}_1}$. Разбор всех случаев расположения подслова Y^s в слове U происходит так же, как и раньше, при доказательстве леммы 1.3.3. Изменения касаются только случаев, когда слово YY потенциально $\widetilde{AB}$-целое и либо $Y^s \leqslant 122122 \circ_{2122} D_1 \circ_{2212} 221221$, либо $Y^s \leqslant 211211 \circ_{1211} D_2$.

Предположим, что $U' = X'Y^sZ' = 122122 \circ_{2122} D_1 \circ_{2212} 221221$, где X' — суффикс слова X, а Z' — префикс слова Z. Положим $V' = X'Y^tZ'$. Слова U' и V' эквивалентны, поэтому, ввиду предложения 1.2.5, они имеют общий префикс 122122 и общий суффикс 221221. Так как слово U' потенциально $\widetilde{AB}$-целое, то и слово V' является потенциально $\widetilde{AB}$-целым по предложению 1.2.3, следовательно, либо $V' = 1221221$, либо V' начинается на 12212212 и заканчивается на 21221221.

Рассмотрим теперь слово $V'' = (212)^{m-1}2V'2(212)^{m-1}$. Ясно, что

$$(212)^{m-1}2V'2(212)^{m-1} \sim (212)^{m-1}2U'2(212)^{m-1} = (212)^m D_1 (212)^m \sim D_1 \sim C_i,$$

так как слово D_1 имеет префикс 212212 и суффикс 212212. Заметим, что слово V'' начинается и заканчивается на $(212)^{2+m}$. Покажем, что при одновременном сокращении $(212)^{2+m} \to 212212$ и в префиксе, и в суффиксе слова V'' результирующее слово будет эквивалентно V''. Это очевидно, если префикс $(212)^{2+m}$ и суффикс $(212)^{2+m}$ не пересекаются внутри слова V''. При пересечении возможны два варианта: либо $V'' = (212)^r$ для некоторого $r \geqslant 2+m$, либо $V'' = (212)^{1+m}(21212)(212)^{1+m}$. В первом случае, очевидно, $V'' \sim 212(21212)212$. Второй случай невозможен. Действительно, ранее мы показали, что $V'' \sim C_i$, однако, по определению C_i, мы имеем $C_i \notin [212212]_{2,1}$.

Итак, мы убедились, что слово $D_1' = V'[3\ldots|V'|-2]$, которое получается из слова $(212)^{m-1}2V'2(212)^{m-1}$ заменой префикса $(212)^{2+m}$ и суффикса $(212)^{2+m}$ на слово $(212)^2$, эквивалентно слову D_1. Следовательно,

$$V' = 12D_1'21 = 122122 \circ_{2122} D_1' \circ_{2212} 221221$$

и $D_1' \in [C_i]_{\mathsf{r}_1}$, откуда $V \in \mathcal{R}$, что и требовалось доказать.

Случай $Y^s \leqslant 211211 \circ_{1211} D_2$ разбирается аналогично. $\square$

Доказательство леммы о сведении, теорем 1.3 и 1.4 с незначительными изменениями повторяет доказательство для полугрупп $B(k,2,3)$.

Глава 2

Проблема равенства слов для полугруппы $B(2,2,3)$

§ 2.1 Введение и формулировка результатов

В этой и следующей главах мы рассматриваем только полугруппу $B(2,2,3)$. В связи с этим, мы будем опускать индексы в обозначениях $\sim_{2,1}$, $\pi_{2,1}$ и $[W]_{2,1}$ (где $W \in \Sigma_2^*$) и писать просто $\sim$, π и $[W]$. Всюду далее символ Σ обозначает алфавит Σ_2.

Один из возможных путей решения проблемы равенства слов в полугруппе $B(2,2,3)$ состоит в том, чтобы в каждом классе конгруэнции $\sim$ выбрать подходящим образом канонического представителя. Тогда решение проблемы равенства слов сводится к нахождению по данному слову соответствующего его классу представителя. Естественно, казалось бы, выбрать в качестве канонических представителей бескубные слова, так как, очевидно, любое слово эквивалентно некоторому бескубному слову, однако, как показывает следующий пример, существуют классы эквивалентности, содержащие более одного бескубного слова:

Пример 2.1.1.

$$1212\,2121 \sim 1\underline{21212}\,\underline{21212}1 \sim 1\underline{21212}\,\underline{21212}\,\underline{21212}1 \sim 1212\,21212\,2121 \ .$$

Более того, как показал К. В. Костоусов (результат не опубликован), для любого наперед заданного числа N найдется класс, содержащий не менее N бескубных слов.

Таким образом, круг «кандидатов» в канонические представители необходимо сузить. Разумно в качестве канонического представителя в каждом классе эквивалентности выбрать минимальное по длине слово, однако неясно, как находить такое слово в произвольном классе эквивалентности. К тому же до сих пор не известно, в каждом ли классе слово минимальной длины единственно (см. раздел 2°).

Интересным представляется вопрос, как по классам эквивалентности распределены сильно бескубные и почти сильно бескубные слова. Е. В. Сухановым была выдвинута гипотеза, что каждый класс эквивалентности содержит не более одного сильно бескубного слова. Косвенно эта гипотеза подтверждается результатами работ [2] и [30]: в [2] доказывается, что всякий класс эквивалентности содержит не более одного слова Туэ-Морса, а согласно [30], произвольное сильно бескубное слово в некотором смысле очень похоже на подходящее слово Туэ-Морса.

В данной главе мы докажем чуть более сильное утверждение.

Теорема 2.1. *Всякий класс конгруэнции $\sim$, за исключением классов* [11] *и* [22]*, содержит не более одного почти сильно бескубного слова. Каждый из классов* [11], [22] *содержит в точности два почти сильно бескубных слова.*

Класс $[11] = 111^*$ (класс $[22] = 222^*$) содержит два почти сильно бескубных слова 11 и 111 (соответственно, 22 и 222), из них только одно слово является сильно бескубным. Таким образом, из теоремы 2.1 непосредственно вытекает справедливость сформулированной выше гипотезы.

Следствие. *Всякий класс конгруэнции $\sim$ содержит не более одного сильно бескубного слова.*

Для решения проблемы равенства слов недостаточно выбрать в каждом классе эквивалентности элемент, служащий его каноническим представителем. Необходимо уметь находить такой элемент в классе $[U]$ для произвольного слова U. Эту задачу решает построенный нами алгоритм EqAOF, который за линейное от $|U|$ время по данному слову U находит почти сильно бескубное слово V, эквивалентное U, или сообщает, что таких слов нет. Таким образом, алгоритм EqAOF позволяет получить частичное решение проблемы равенства слов для полугруппы $B(2,2,3)$.

Теорема 2.2. *В полугруппе $B(2,2,3)$ проблема равенства слов разрешима за время $O(\max\{|U|,|V|\})$ для всех пар (U,V), в которых по крайней мере одно из слов эквивалентно почти сильно бескубному слову.*

К сожалению, существуют классы, не содержащие почти сильно бескубных слов, например, класс $[121211] = (12)^2(12)^*111^*$. Поэтому нами получено лишь частичное решение проблемы равенства слов.

Глава состоит из 7 параграфов. §§ 2.4–2.6 содержат вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теоремы 2.1 и для построения алгоритма EqAOF. Теорема 2.1 доказывается в § 2.5. Наконец, последние два параграфа посвящены построению и анализу алгоритма EqAOF.

§ 2.2 Свойства r-редукции

При доказательстве теорем 2.1 и 2.2 мы существенно опираемся на результаты работ [2] и [30], используя разработанные в них вспомогательные понятия и методы. Почти весь нужный нам инструментарий был введен в § 1.2.

Ключевую роль в наших последующих построениях играет предложение 1.2.4. Ввиду того, что любой морфизм очевидным образом сохраняет отношение $\sim$, из предложения 1.2.4 следует, что $\theta(U) \sim \theta(V)$ выполняется тогда и только тогда, когда $U \sim V$. Мы видим, что, проблема равенства слов для пары θ-образов может быть сведена к проблеме равенства слов в два раза меньшей длины. Идея заключается в том, чтобы произвольную пару слов U и V превратить в пару θ-образов, а затем применить к ним отображение θ^{-1}, обратное к морфизму Туэ-Морса. К полученной таким образом паре слов мы снова применяем описанную последовательность действий, и т. д. В силу конечной длины слов U и V, такой процесс не может продолжаться бесконечно долго: в конце концов, мы придем к паре коротких слов, для которых проблема равенства слов тривиально разрешима.

В этом и двух последующих параграфах мы рассмотрим следующие преобразования, которые позволяют привести произвольное слово U к θ-образу:

- введенная ранее r-редукция, которая преобразует $\widetilde{AB}$-целое слово в эквивалентное ему регулярное слово;
- r_T-редукция, применяемая к паре эквивалентных слов для получения пары эквивалентных $\widetilde{AB}$-целых слов;
- функции ξ and η, каждая из которых трансформирует пару эквивалентных регулярных слов в пару эквивалентных θ-образов.

Заметим, что каждое из перечисленных преобразований сохраняет эквивалентность в одном их следующих двух смыслов: либо трансформация касается одного слова, которое заменяется на эквивалентное, либо преобразование применяется к паре эквивалентных слов (U, V), сохраняя отношение эквивалентности между словами (исключение составляет разве что функция η, но об этом речь пойдет позже, в соответствующих параграфах).

Мы начнем с изучения первой из перечисленных операций — операции r.

2.2.1 Нередуцируемые хвосты. Свойство $r(U) \sim U$

Как мы знаем из § 1.2, операция r, в отличие от r_1, в общем случае не сохраняет отношение эквивалентности в том смысле, что слово $\mathsf{r}(U)$ не обязательно эквивалентно слову U. Выясним, при каких условиях соотношение $\mathsf{r}(U) \sim U$ все же имеет место. Оказывается, простой ответ на этот вопрос можно получить, рассматривая операцию r на множестве $\widetilde{AB}$-целых слов.

Предложение 2.2.1. *Для $\widetilde{AB}$-целого слова U, соотношение $\mathsf{r}(U) \sim U$ имеет место тогда и только тогда, когда, с точностью до инвертирования букв, слово U не имеет префикса вида* $121(121)^*(12)^2(12)^*11$ *и суффикса вида* $11(21)^*(21)^2(121)^*121$.

Префиксы и суффиксы указанного в условии предложения 2.2.1 вида будем называть *нередуцируемыми хвостами*, или *хвостами второго рода*. Мы различаем следующие типы нередуцируемых хвостов:

	левый	правый
1-хвост	$121(121)^*(12)^2(12)^*11$	$11(21)^*(21)^2(121)^*121$
2-хвост	$212(212)^*(21)^2(21)^*22$	$22(12)^*(12)^2(212)^*212$

Перед тем, как приступить к доказательству предложения 2.2.1, докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2.2.1. *Пусть $U, V \in \Sigma^*$, слова U и V являются r_1-редуцированными и $U \sim V$. Тогда если слово U имеет нередуцируемый хвост, то слово V имеет нередуцируемый хвост того же типа.*

Доказательство. Поскольку $\sim_{\mathsf{r}_1} = \pi_{\mathsf{r}_1}^+$, достаточно рассмотреть случай, когда слова U и V являются соседними. Пусть $U = XY^sZ$ и $V = XY^tZ$ для некоторых слов $X, Z \in \Sigma^*$, $Y \in \Sigma^+$ и чисел $\{s,t\} = \{2,3\}$. Без ограничения общности будем считать, что U имеет левый 1-хвост, то есть $U = (121)^{l_1}(12)^{l_2}11T$, где $l_1 \geqslant 1$, $l_2 \geqslant 2$ и $T \in \Sigma^*$ (остальные варианты разбираются аналогично). Слова U и V имеют общий префикс XYY. Ясно, что если хвост не длиннее префикса XYY, то слово V имеет тот же хвост, что и слово U. Предположим теперь, что XYY является собственным префиксом слова $(121)^{l_1}(12)^{l_2}11$. Рассмотрим все возможные случаи.

1) $|X| \geqslant |(121)^{l_1}|$. В этом случае $YY \leqslant (12)^{l_2}1$, поэтому Y — буквочередующееся слово четной длины. Тогда слово Y^s также является буквочередующимся для любого $s \in \{2,3\}$, и мы имеем $Y^s \leqslant (12)^{l_2}1$. Следовательно, слово V имеет префикс $(121)^{l_1}S1$ для некоторого соседнего с $(12)^{l_2}1$ слова S. Легко проверить, что $[(12)^{l_2}1] = (12)^2(12)^*1$ при $l_2 \geqslant 2$. Таким образом, префикс $(121)^{l_1}S1$ является левым 1-хвостом слова V.

2) $|X| < |(121)^{l_1}|$ и $|XY| > |(121)^{l_1}|$. На стыке вхождений подслов $(121)^{l_1}$ и $(12)^{l_2}1$ в слово U образуется подслово 11, которое целиком лежит внутри слова Y. С другой стороны, суффикс Y слова XYY целиком лежит внутри $(12)^{l_2}1$, поэтому Y — буквочередующееся слово. Полученное противоречие показывает, что этот случай невозможен.

3) $|XY| \leqslant |(121)^{l_1}|$. Так как слово Y не содержит подслов 1212 и 2121, мы имеем $XYY \leqslant (121)^{l_1}(121)$. Таким образом, слово YY также не содержит подслов 1212 и 2121, в частности, $Y \notin \{12, 21\}$. В силу r_1-редуцированности слов U и V, мы имеем $Y \notin \{1, 2, 11, 22\}$. Суммируя все вышесказанное, мы заключаем, что длина слова Y больше двух, поэтому любое вхождение подслова 1212 или 2121 встречается в слове Y^s внутри YY. Следовательно, Y^s не содержит подслов 1212 и 2121, и мы получаем $XY^s \leqslant (121)^{l_1+1}$. Тогда слово V имеет префикс $S2(12)^{l_2-2}11$ для некоторого соседнего с $(121)^{l_1+1}$ слова S. Легко проверить, что $[(121)^{l_1+1}]_{\mathsf{r}_1} = 121(121)^*121$, значит, слово $S2(12)^{l_2-2}11$ является левым 1-хвостом слова V.

Итак, во всех трех случаях слово V имеет хвост того же типа, что и хвост слова U, что и требовалось доказать. □

Доказательство предложения 2.2.1. Если $\mathsf{r}(U) \sim U$, предложение непосредственно следует из леммы 2.2.1, так как слово $\mathsf{r}(U)$ не имеет нередуцируемых хвостов.

Докажем обратное утверждение. Пусть U — $\widetilde{AB}$-целое слово, не имеющее нередуцируемых хвостов. Поскольку любое $\widetilde{AB}$-целое слово по определению является r_1-редуцированным, мы имеем $\mathsf{r}(U) = \mathsf{r}_\mathsf{B}(\mathsf{r}_\mathsf{A}(U))$. Операция r_A производит в слове U сокращения вида (1.2a), которые можно применять в произвольном порядке (см. § 1.2). Выберем следующую последовательность действий: сначала произведем в слове U все возможные редукции $11211 \to 11$, а затем выполним остальные сокращения вида (1.2a).

Предположим, что $U = P11211Q$ для некоторых слов $P, Q \in \Sigma^*$. Так как слово U является $\widetilde{AB}$-целым, мы имеем $P = P'12$ и $Q = Q'21$, откуда $U = P'(121)^3Q'$. Сокращение $11211 \to 11$ приводит нас к слову $P11Q = P'(121)^2Q'$, эквивалентному U. Таким образом, после сокращения всех вхождений подслова 11211 в слово U, мы получим некоторое слово U', эквивалентное U. В силу предложения 1.2.3 и леммы 2.2.1, слово U' является $\widetilde{AB}$-целым и не имеет нередуцируемых хвостов, то есть удовлетворяет тем же условиям, что и слово U. Поэтому, для простоты обозначений, мы будем считать, что U не содержит подслова 11211, то есть $U' = U$.

Пусть теперь $U = P1\,(12)^l 1\,1Q$ для некоторых слов $P, Q \in \Sigma^*$ и целого числа $l \geqslant 2$. Ввиду того, что слово U является $\widetilde{AB}$-целым, мы имеем $P = P'12$, $Q = Q'21$ и $U = P'121\,(12)^l 1\,121$. Заметим, что если $P' = \lambda$ (или $Q' = \lambda$), то слово U имеет левый (или, соотв., правый) 1-хвост, что невозможно по условию. Следовательно, $P', Q' \neq \lambda$. В то же время, слово U не содержит подслова 11211, поэтому $P'[|P'|] \neq 1$ и $Q'[1] \neq 1$, то есть $P'[|P'|] = Q'[1] = 2$. Положим $P'' = P'[1 \ldots |P'|{-}1]$ и $Q'' = Q'[2 \ldots |Q'|]$. Тогда, после сокращения $1(12)^l 11 \to 11$, мы получим слово $P11Q$, эквивалентное U:

$$\begin{gathered} U = P''2121\,(12)^l 1\,1212Q'' \sim P''(21)^{l+1}\,(12)^l 1\,(12)^{l+1}Q'' = \\ P''2\,(12)^l 1\,\underbrace{(12)^l 1}\,(12)^l 1\,2Q'' \sim P''2(12)^l 1\,(12)^l 12Q'' = \\ P''(21)^{l+1}\,(12)^{l+1}Q'' \sim P''2121\,1212Q'' = P11Q\ . \end{gathered}$$

Таким образом, после любых сокращений вида (1.2a) результирующее слово остается эквивалентным слову U, поэтому слово $\mathsf{r}_\mathsf{A}(U)$, получаемое после всех таких сокращений, также эквивалентно U. Двойственным образом доказывается, что и $\mathsf{r}_\mathsf{B}(U) \sim U$. Более того, ввиду предложения 1.2.3 и леммы 2.2.1, слово $\mathsf{r}_\mathsf{A}(U)$ является $\widetilde{AB}$-целым и не имеет нередуцируемых хвостов, поэтому, применяя r_B к слову $\mathsf{r}_\mathsf{A}(U)$, мы получаем

$$\mathsf{r}(U) = \mathsf{r}_\mathsf{B}(\mathsf{r}_\mathsf{A}(U)) \sim \mathsf{r}_\mathsf{A}(U) \sim U,$$

что и требовалось доказать. □

2.2.2 Регулярные соседние слова и квазисоседние слова

Из предложения 1.2.2 следует, что $\sim_{\mathsf{r}_1} = \pi^+_{\mathsf{r}_1}$. С учетом того, что $\mathsf{r}_1(U) \sim U$ для любого слова U, это означает, что при решении проблемы равенства достаточно ограничиться рассмотрением только r_1-редуцированных слов. Мы хотим перенести полезные свойства r_1-редукции на операцию r. В предложении 2.2.1 мы уже установили, что при дополнительных ограничениях на слово U имеет место $\mathsf{r}(U) \sim U$. Обозначим через $\sim_r$ и π_r ограничения конгруэнции $\sim$ и, соответственно, отношения соседства π на множество всех регулярных слов. В этом пункте мы установим следующее свойство.

Предложение 2.2.2. $\sim_r = \pi^+_r$.

Доказательство предложения 2.2.2 базируется на лемме 2.2.2, которая является аналогом предложения 1.2.2 для операции r. Для того, чтобы сформулировать лемму, нам потребуется понятие квазисоседних слов из [2]. Слова U и V мы называем 12-*соседними* и пишем $(U, V) \in \pi_{12}$, если одно из слов U и V имеет вид $X(12)^2Z$ или $X(21)^2Z$, а другое слово — $X(12)^3Z$ или, соответственно, $X(21)^3Z$ для некоторых $X, Z \in \Sigma^*$. Слова U и V называются *квазисоседними*, если существуют последовательности слов $\{U_i\}_{i=1}^n$ и $\{V_j\}_{j=1}^m$ такие, что $U_1 = U$, $V_1 = V$, $(U_{i-1}, U_i) \in \pi_{12}$ для всех $i \geqslant 2$, $(V_{j-1}, V_j) \in \pi_{12}$ для всех $j \geqslant 2$ и $(U_n, V_m) \in \pi$. Другими словами, слова U и V квазисоседние, если с помощью преобразований $(12)^3 \leftrightarrow (12)^2$ и $(21)^3 \leftrightarrow (21)^2$ их можно сделать соседними.

Лемма 2.2.2. *Пусть U и V — r_1-редуцированные $\widetilde{AB}$-целые слова, не имеющие нередуцируемых хвостов. Тогда если слова U и V соседние, то слова $\mathsf{r}(U)$ и $\mathsf{r}(V)$ — квазисоседние.*

Доказательство. Пусть $U = XYYZ$ и $V = XYYYZ$ для некоторых слов $X, Z \in \Sigma^*$ и $Y \in \Sigma^+$. Так как слова U, V уже r_1-редуцированы, операция r производит внутри этих слов только сокращения вида (1.2a) и (1.2b), которые можно применять в произвольном порядке. Заметим, что, ввиду предложения 2.2.1, каждое такое сокращение в слове U или V не выводит нас из класса $[U]_{\mathsf{r}_1} = [V]_{\mathsf{r}_1}$, а в силу предложения 1.2.3 и леммы 2.2.1, все слова из этого класса являются $\widetilde{AB}$-целыми и не имеют нередуцируемых хвостов.

Применим операцию r сначала к подсловам $XY[1]$, Y и $Y[|Y|]Z$ слов U и V. Очевидно, что $\mathsf{r}(XY[1]) = X'Y[1]$ и $\mathsf{r}(Y[|Y|]Z) = Y[|Y|]Z'$ для некоторых $X', Z' \in \Sigma^*$, а слово $\mathsf{r}(Y)$ начинается на $Y[1]$ и заканчивается на $Y[|Y|]$. Таким образом, мы получаем пару соседних слов $X'\mathsf{r}(Y)\mathsf{r}(Y)Z'$ и $X'\mathsf{r}(Y)\mathsf{r}(Y)\mathsf{r}(Y)Z'$. Поэтому, упрощая обозначения, мы будем считать, что слова $XY[1]$, Y и $Y[|Y|]Z$ уже регулярны.

Предположим, что хотя бы одно из слов U и V не является регулярным, и P — его подслово такое, что $P \in 1\widetilde{A}1 \cup 2\widetilde{B}2$. Без ограничения общности пусть $P = 1(12)^l11$ для некоторого $l > 0$. Тогда либо $Y \ll P$, либо P встречается внутри подслова XY, YY или YZ. Рассмотрим все возможные случаи.

1) $Y \ll P$. В этом случае Y — буквочередующееся слово. Если длина Y нечетна, V содержит подслово $Y[|Y|]YY[1] \in 1\widetilde{A}1 \cup 2\widetilde{B}2$. Так как в слове V операция r производит, в том числе, сокращение $Y[|Y|]YY[1] \to Y[|Y|]Y[1]$, мы получаем $\mathsf{r}(U) = \mathsf{r}(V)$. Если же длина слова Y четна, слова Y^2 и Y^3 также являются буквочередующимися, а потому $P = X'Y^sZ'$ для некоторого суффикса X' слова X, префикса Z' слова Z и числа s такого, что $s = 2$, если $P \leqslant U$, и $s = 3$, если $P \leqslant V$. Легко видеть, что оба слова $X'Y^2Z'$ и $X'Y^3Z'$ принадлежат языку $1\widetilde{A}1$. В результате сокращений $X'Y^2Z' \to 11$ в слове U и $X'Y^3Z' \to 11$ в слове V, мы получаем одно и то же слово, поэтому $\mathsf{r}(U) = \mathsf{r}(V)$.

2) $P \leqslant YY$. Пусть $P = 1Y_2Y_11$, где Y_11 и $1Y_2$ — соответственно, префикс и суффикс слова Y такие, что $Y_2Y_1 = (12)^l1$. Очевидно. префикс Y_1 и суффикс Y_2 внутри слова Y не пересекаются, так как в противном случае слово Y_1 содержало бы подслово $1Y_2[1] = 11$, что невозможно. Таким образом, $Y = Y_1Y'Y_2$ для некоторого $Y' \in \Sigma^*$. Тогда

$$U = XY_1Y'(Y_2Y_1)Y'Y_2Z \text{ и } V = XY_1Y'(Y_2Y_1)Y'(Y_2Y_1)Y'Y_2Z,$$

и сокращение $P \to 11$ приводит нас к паре соседних слов $XY_1Y'Y'Y_2Z$ и $XY_1Y'Y'Y'Y_2Z$.

Теперь предположим, что все вхождения слов из языка $1\widetilde{A}1 \cup 2\widetilde{B}2$, подпадающие под случаи ходящие к случаям 1–2, в словах U и V уже сокращены.

3) Дополнительно предположим, что слово YZ регулярно. Тогда $P \leqslant XY$, причем подслово P образуется внутри XY на стыке слов X и Y, и это единственное вхождение в слова U и V как подслова P, так и других слов из языка $1\widetilde{A}1 \cup 2\widetilde{B}2$.

Пусть $P = 1X_1Y_11$, где $1X_1$ и Y_11 — соответственно, суффикс слова X и префикс слова Y ($X_1 \in \Sigma^*$, $Y_1 \in \Sigma^+$) такие, что $X_1Y_1 = (12)^l1$. Положим $Y = Y_11Y'$, где $Y' \in \Sigma^*$. Так как слова U и V являются $\widetilde{AB}$-целыми, мы имеем $X = X'121X_1$ для некоторого слова $X' \in \Sigma^*$.

Если $l = 1$, то

$$U = X'121(121)1Y'YZ \text{ и } V = X'121(121)1Y'YYZ.$$

После сокращения $P \to 11$ мы получаем два соседних слова

$$X'\underbrace{121}_{X_1Y_1}1Y'YZ = X'X_1\underbrace{Y_11Y'}_{Y}YZ = X'X_1YYZ$$

и

$$X'\underbrace{121}_{X_1Y_1}1Y'YYZ = X'X_1\underbrace{Y_11Y'}_{Y}YYZ = X'X_1YYYZ\ .$$

В случае $l \geqslant 2$ мы имеем $X' \neq \lambda$ ввиду того, что слова U и V не имеют нередуцируемых хвостов. Заметим, что $X'[|X'|] \neq 1$, так как слово X регулярно, поэтому $X = X''2121X_1$ для некоторого слова $X'' \in \Sigma^*$. Сокращение $P \to 11$ приводит нас к паре квазисоседних слов

$$U' = X''21211Y'YZ \text{ и } V' = X''21211Y'YYZ\ .$$

Действительно, пусть

$$U_i = X''21(21)^i1Y'YZ \text{ и } V_i = X''21(21)^i1Y'YYZ,$$

где $i = 1, \ldots, l$. Легко видеть, что $U_1 = U'$, $V_1 = V'$, $(U_i, U_{i-1}) \in \pi_{12}$ и $(V_i, V_{i-1}) \in \pi_{12}$ для всех $i = 2, \ldots, l$, а слова

$$U_l = X''2\underbrace{1(21)^l}_{X_1Y_1}1Y'YZ = X''2X_1\underbrace{Y_11Y'}_{Y}YZ = X''2X_1YYZ$$

и

$$V_l = X''2\underbrace{1(21)^l}_{X_1Y_1}1Y'YYZ = X''2X_1\underbrace{Y_11Y'}_{Y}YYZ = X''2X_1YYYZ$$

являются соседними. Ввиду равенств $U' = \mathsf{r}(U)$ и $V' = \mathsf{r}(V)$, мы заключаем, что слова $\mathsf{r}(U)$ и $\mathsf{r}(V)$ квазисоседние.

4) Случай, когда слово XY регулярно и $P \leqslant YZ$, разбирается аналогично. Наконец, предположим, что оба слова XY и YZ не являются регулярными, и пусть $P_1 \leqslant XY$ и $P_2 \leqslant YZ$ для некоторых $P_1, P_2 \in 1\widetilde{A}1 \cup 2\widetilde{B}2$. Тогда, после редукции слов P_1 и P_2, мы получаем два квазисоседних слова $\mathsf{r}(U)$ и $\mathsf{r}(V)$. Действительно, рассуждая так же, как и в случае 3, мы можем построить две последовательности слов (вместо одной, как было в случае 3), последовательно увеличивая степень подслова 12 или 21 одновременно и в префиксе $\mathsf{r}(XY)$, и в суффиксе $\mathsf{r}(YZ)$ слов $\mathsf{r}(U)$ и $\mathsf{r}(V)$. Эти последовательности будут удовлетворять всем условиям из определения отношения квазисоседства. $\square$

Отметим, что лемма 2.2.2 была доказана в [2] в предположении, что слова U и V эквивалентны некоторому θ-образу. Таким образом, нам удалось ослабить условие леммы.

Последовательность слов $\{W_i\}_{i=0}^n$ мы называем *связующей* (U,V)*-цепочкой*, если $W_0 = U$, $W_n = V$ и $(W_{i-1}, W_i) \in \pi$ для любого $i = 1, \ldots n$. Если все слова в связующей (U,V)-цепочке r-редуцированы (r_1-редуцированы), такая последовательность слов называется r-*связующей* (соответственно, r_1-*связующей*) (U,V)*-цепочкой*. В этих терминах, предложение 2.2.2 формулируется следующим образом:

Два регулярных слова эквивалентны тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна r*-связующая* (U,V)*-цепочка.*

Доказательство предложения 2.2.2. Включение $\pi_r^+ \subseteq \sim_r$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть слова U и V регулярны и $U \sim V$. Построим r-связующую (U,V)-цепочку. Ввиду равенства $\sim_{\mathsf{r}_1} = \pi_{\mathsf{r}_1}^+$, существует r_1-связующая (U,V)-цепочка $\{W_i\}_{i=0}^n$. Из регулярности слов U и V, предложения 1.2.3 и леммы 2.2.1 следует, что все слова из $\{W_i\}_{i=0}^n$ являются $\widetilde{AB}$-целыми и не имеют нередуцируемых хвостов. Рассмотрим последовательность $\{W_i' = \mathsf{r}(W_i)\}_{i=0}^n$. Ясно, что $W_0' = U$ и $W_n' = V$. По лемме 2.2.2, регулярные слова W'_{i-1} и W'_i являются квазисоседними для всех $i = 1, \ldots, n$. Осталось заметить, что любые два регулярных квазисоседних слова, по определению отношения квазисоседства, можно соединить r-связующей цепочкой, так как преобразования $(12)^2 \leftrightarrow (12)^3$ и $(21)^2 \leftrightarrow (21)^3$ сохраняют свойство регулярности слов. $\square$

Итак, мы видим, что несмотря на то, что сокращения вида (1.2a) и (1.2b) в общем случае не сохраняют отношение эквивалентности, операция r по своим свойствам напоминает операцию r_1.

§ 2.3 Нерегулярные почти сильно бескубные слова. Хвосты первого рода

2.3.1 Нерегулярные почти сильно бескубные слова

При изучении операции r мы ограничивались рассмотрением только $\widetilde{AB}$-целых слов. Предположим, что слово U не является $\widetilde{AB}$-целым и при этом U эквивалентно почти сильно бескубному слову V. По предложению 1.2.3, слово V также не является $\widetilde{AB}$-целым, в частности, слово V нерегулярно. Положим

$$\mathcal{A}'_1 = \{11211, 112112, 211211, 2112112, 1121122, 2211211, 1121121, 1211211\},$$

и пусть $\mathcal{S}'_1 = \mathcal{A}'_1 \cup \overline{\mathcal{A}'_1}$.

Следующее предложение описывает все нерегулярные почти сильно бескубные слова.

Предложение 2.3.1 ([30]). *Пусть V — r_1-редуцированное нерегулярное почти сильно бескубное слово. Тогда имеет место один из двух вариантов:*

1) $V \in \mathcal{S}'_1$*;*

2) *С точностью до инвертирования букв, V имеет префикс* 11211221 *или суффикс* 12211211.

Заметим, что все слова из $\mathcal{S}'_1$ почти сильно бескубны, нерегулярны и не являются $\widetilde{AB}$-целыми. Таким образом, верно следующее наблюдение.

Наблюдение 2.3.1. *Почти сильно бескубное слово регулярно тогда и только тогда, когда оно является $\widetilde{AB}$-целым.*

Наблюдение 2.3.1 можно получить и непосредственно из определений, так как произвольное почти сильно бескубное слово не содержит подслов $11(21)^l1$ и $22(12)^l2$ при $l > 1$, в добавок $\widetilde{AB}$-целое почти сильно бескубное слово не может содержать подслов 11211 и 22122, поскольку подслова 11211 и 22122 могут входить в $\widetilde{AB}$-целое слово только внутри подслов $(121)^3$ и $(212)^3$ соответственно.

Изучение нерегулярных почти сильно бескубных слов мы начнем с описания классов эквивалентности для всех слов из множества $\mathcal{S}'$. Дополнительно рассмотрим еще четыре слова из пункта 2 предложения 2.3.1: 11211221, 12211211, 22122112 и 21122122.

Лемма 2.3.1. 1) $[11211]_{\mathsf{r}_1} = 11211$;
2) $[112112]_{\mathsf{r}_1} = (112)^*(112)^2$;
3) $[211211]_{\mathsf{r}_1} = (211)^2(211)^*$;
4) $[2112112]_{\mathsf{r}_1} = (211)^*(211)^2 2$;
5) $[1121122]_{\mathsf{r}_1} = (112)^*(112)^2 2$;
6) $[2211211]_{\mathsf{r}_1} = 2(211)^2(211)^*$;
7) $[1121121]_{\mathsf{r}_1} = (112)^*(112)^2 1$;
8) $[1211211]_{\mathsf{r}_1} = 1(211)^2(211)^*$;
9) $[11211221]_{\mathsf{r}_1} = (112)^*(112)^2 21$;
10) $[12211211]_{\mathsf{r}_1} = 12(211)^2(211)^*$.
Классы $[V]_{\mathsf{r}_1}$, *где* $V \in \overline{\mathcal{A}'_1} \cup \{22122112, 21122122\}$, *получаются из классов 1–10 путем инвертирования.*

Доказательство. Пусть $V \in \mathcal{A}'_1 \cup \{11211221, 12211211\}$. Обозначим через $\mathcal{R}_V$ язык, задаваемый регулярным выражением из правой части соответствующего языку $[V]_{\mathsf{r}_1}$ равенства. Достаточно доказать включение $[V]_{\mathsf{r}_1} \subseteq \mathcal{R}_V$, поскольку обратное включение очевидно. Рассмотрим по порядку все случаи.

1) Случай $V = 11211$ тривиален.

2) $V = 112112$. Пусть $W \sim V$. Тогда $2W \sim 2V$ и, по пункту 4 (см. ниже), слово $2W$ имеет вид $(211)^*(211)^2 2 = 2(112)^*(112)^2$, откуда слово W имеет вид $(112)^*(112)^2$, что и требовалось показать.

3) Случай $V = 211211$ симметричен предыдущему с точностью до прочтения слов справа налево.

4) $V = 2112112$. Ввиду того, что $\sim_{\mathsf{r}_1} = \pi^+_{\mathsf{r}_1}$ и $V \in \mathcal{R}_V$, достаточно рассмотреть пару соседних слов W_1 и W_2 и показать, что если $W_1 \in \mathcal{R}_V$, то и $W_2 \in \mathcal{R}_V$. Пусть $W_1 = XY^sZ$ и $W_2 = XY^tZ$ для некоторых слов $X, Z \in \Sigma^*$, $Y \in \Sigma^+$ и чисел $\{s,t\} = \{2,3\}$, и $W_1 = (211)^l(211)^2 2$, где $l \geqslant 0$. Если $Y[1] = 2$ и $Y[|Y|] = 1$, то $Y = (211)^i$ для некоторого $i > 0$. Если $Y[1] = 1$ и $Y[|Y|] = 2$, то $Y = (112)^i$ $(i > 0)$. Наконец, при $Y[1] = Y[|Y|] = 1$ мы получаем $Y = (121)^i$ $(i > 0)$. Случай $Y[1] = Y[|Y|] = 2$, очевидно, невозможен: слово W_1 не содержит подслова 22, поэтому $Y[|Y|]Y[1] \neq 22$.

Итак, во всех трех случаях, с учетом того, что слово W_2 содержит как минимум два вхождения Y, мы приходим к выводу, что $W_2 \in \mathcal{R}_V$.

5) $V = 1121122$. Как и в предыдущем случае, достаточно рассмотреть пару соседних слов W_1 и W_2 и показать, что если $W_1 \in \mathcal{R}_V$, то и $W_2 \in \mathcal{R}_V$. Пусть $(W_1, W_2) \in \pi_{\mathsf{r}_1}$ и $W_1 = (112)^l(122)^2 2$ для некоторого $l \geqslant 0$. Заметим, что слово W_1 содержит лишь одно вхождение подслова 22, поэтому при любой замене вида $YY \to YYY$ или $YYY \to YY$ в слове W_1 подслово Y не содержит суффикс 22 слова W_1. Таким образом, любое преобразование вида $YY \to YYY$ или $YYY \to YY$ в слове W_1 происходит внутри подслова $(112)^l(122)^2$, поэтому $W_2 \in \mathcal{R}_V$ по пункту 2.

6) Случай $V = 2211211$ симметричен предыдущему с точностью до прочтения слов справа налево.

7) $V = 1121121$. Пусть $W \sim V$. Тогда $W12 \sim V12 = (112)^3 \sim 112112$. Согласно пункту 2, мы имеем $W12 = (112)^l(112)^2$ для некоторого $l \geqslant 0$. Поскольку, очевидно, $W \neq 1121$, мы получаем $W12 \neq 112112$. Следовательно, $l > 0$ и $W = (112)^{l-1}(112)^2 1 \in \mathcal{R}_V$.

8) Случай $V = 1211211$ симметричен предыдущему.

9) $V = 11211221$. Как и в случаях 4 и 5, достаточно рассмотреть пару соседних слов W_1 и W_2 и показать, что если $W_1 \in \mathcal{R}_V$, то и $W_2 \in \mathcal{R}_V$. Пусть $(W_1, W_2) \in \pi_{\mathsf{r}_1}$ и $W_1 = (112)^l(112)^2 21$ для некоторого $l \geqslant 0$. Слова W_1 и W_2 можно представить в виде $W_1 = XY^sZ$ и $W_2 = XY^tZ$, где $X, Z \in \Sigma^*$, $Y \in \Sigma^+$ и $\{s,t\} = \{2,3\}$. Заметим, что W_1 содержит лишь одно вхождение подслова 22, поэтому слово 22 не является подсловом слова Y. Следовательно, Y не может быть суффиксом слова W_1, и замена $Y^s \to Y^t$ в слове W_1 происходит внутри подслова $(112)^l(112)^2 2$, откуда $W_2 \in \mathcal{R}_V$ по пункту 5.

10) Случай $V = 12211211$ симметричен случаю 9 с точностью до прочтения слов справа налево. □

Таким образом, для любого слова $V \in \mathcal{S}'_1$, класс $[V]_{\mathsf{r}_1}$ является рациональным языком, и проблема равенства произвольного слова слову V решается построением автомата, распознающего V.

Префикс (суффикс) P произвольного слова U, принадлежащий множеству $[11211221]_{\mathsf{r}_1}$ или $[22122112]_{\mathsf{r}_1}$ (соотв., $[12211211]_{\mathsf{r}_1}$ или $[21122122]_{\mathsf{r}_1}$) называется *нерегулярным хвостом*, или *хвостом первого рода*. Подобно хвостам второго рода, мы выделяем четыре типа хвостов первого рода:

	левый	правый
1-хвост	$(112)^*(112)^2 21$	$12(211)^2(211)^*$
2-хвост	$(221)^*(221)^2 12$	$21(122)^2(122)^*$

У читателя может возникнуть вопрос: почему именно эти хвосты называются нерегулярными? Ведь нередуцируемые хвосты тоже являются нерегулярными словами. Отличие хвостов первого и второго родов заключается в том, что хвосты первого рода не являются потенциально $\widetilde{AB}$-целыми. Выбор названия «нерегулярные» объясняется тем, что такие хвосты были введены раньше нередуцируемых хвостов в связи с характеризацией и изучением нерегулярных почти сильно бескубных слов. Нередуцируемые хвосты при этом не возникали ввиду того, что почти сильно бескубное слово не может иметь такой хвост. Этим отчасти объясняется и то, почему именно нерегулярные хвосты мы называем хвостами первого рода, хотя в диссертации они изучаются позже нередуцируемых хвостов. Другая причина кроется в порядке появления хвостов по мере преобразования произвольного слова U в θ-образ. Хвосты второго рода возникают лишь на этапе трансформации $\widetilde{AB}$-целого слова U в регулярное слово $\mathsf{r}(U)$: мы должны проверить слово U на наличие таких хвостов прежде, чем применить операцию r. Однако еще раньше мы должны превратить U в $\widetilde{AB}$-целое слово, а на этом этапе мы сталкиваемся с хвостами первого рода.

2.3.2 Хвосты первого рода. Операция r_T

Казалось бы, нерегулярные хвосты не должны создавать больших трудностей, ведь к таким хвостам мы можем применить операцию r. На самом деле ситуация намного сложнее, ибо нерегулярное почти сильно бескубное слово V не является $\widetilde{AB}$-целым, а потому мы не можем утверждать, что в этом случае выполняется $\mathsf{r}(V) \sim V$. Конечно, можно было бы надеяться, что операция r сохраняет отношение $\sim$ для пары эквивалентных слов V и U, наподобие операции r_1 при переходе от конгруэнции $\sim_{2,1}$ к конгруэнции $\sim_{2,m}$ (см. предложение 1.5.1). Следующий пример показывает, что и это свойство в общем случае не имеет места.

Пример 2.3.1. *Пусть* $V = 1\,121122\,121122$ *и* $U = 1\,121122\,121122\,121122 \in [V]$. *Заметим, что* V *— нерегулярное почти сильно бескубное (и даже просто сильно бескубное) слово, причем* $\mathsf{r}(V) = 1122121122$. *Легко показать, что* $[112\,2121\,122]_{\mathsf{r}_1} = 112\,(21)^2(21)^*\,122$. *Таким образом, мы имеем* $\mathsf{r}(U) = 1122121122121122 \not\sim \mathsf{r}(V)$ *и* $\mathsf{r}(V) \not\sim V$.

Мы видим, что операция r не может использоваться для корректной обработки нерегулярных хвостов. Для этого мы введем специальную *операцию редуцирования хвостов* r_T, которая обрезает левый нерегулярный хвост слова до семи последних символов, а правый нерегулярный хвост — до семи первых символов:

	левый	правый
r_T-редуцированный 1-хвост	1211221	1221121
r_T-редуцированный 2-хвост	2122112	2112212

По определению, если слово U не имеет нерегулярных хвостов, $\mathsf{r}_\mathsf{T}(U) = U$. Заметим, что если V — нерегулярное почти сильно бескубное слово, то операция r_T удаляет в точности по одной букве от каждого имеющегося у слова V нерегулярного хвоста.

В продолжение всего параграфа термин «хвост», если не оговорено противное, означает нерегулярный хвост. Слова, имеющие нерегулярные хвосты, называются также *хвостатыми*.

В дополнение к r_T, мы будем пользоваться функциями $\mathsf{r}_\mathsf{T}^\mathsf{l}$ и $\mathsf{r}_\mathsf{T}^\mathsf{r}$, первая из которых редуцирует левый хвост слова до семи последних символов, а вторая редуцирует правый хвост слова до семи первых символов. Заметим, что левый и правый хвосты, если они оба присутствуют в слове, могут иметь в пересечении не более шести символов (с точностью до инвертирования букв, как у слов вида $(112)^*1121122122(122)^*$). Следовательно, операция $\mathsf{r}_\mathsf{T}^\mathsf{l}$ сохраняет правый хвост слова, а операция $\mathsf{r}_\mathsf{T}^\mathsf{r}$ — его левый хвост, поэтому

$$\mathsf{r}_\mathsf{T}(U) = \mathsf{r}_\mathsf{T}^\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}^\mathsf{l}(U)) = \mathsf{r}_\mathsf{T}^\mathsf{l}(\mathsf{r}_\mathsf{T}^\mathsf{r}(U))$$

для любого слова U.

Наша цель — показать, что операция r_T сохраняет отношение $\sim$ между словами. Предварительно исследуем операцию r_T на предмет сохранения отношения соседства.

Лемма 2.3.2. *Пусть $(W_1, W_2) \in \pi_{\mathsf{r}_1}$. Тогда*

1) *Если слово W_1 имеет нерегулярный хвост, то слово W_2 имеет нерегулярный хвост того же типа.*

2) *Если слово $\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_1)$ является $\widetilde{AB}$-целым и*

$$W_1 \notin (112)^*(112)^2(211)^2(211)^* + (221)^*(221)^2(122)^2(122)^*,$$

то $(\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_1), \mathsf{r}_\mathsf{T}(W_2)) \in \pi_{\mathsf{r}_1}$.

Доказательство. Так как слова W_1 и W_2 соседние, мы можем записать $W_1 = XY^sZ$ и $W_2 = XY^tZ$ для некоторых слов $X, Z \in \Sigma^*$, $Y \in \Sigma^+$ и чисел $\{s,t\} = \{2,3\}$. Докажем первое утверждение леммы. Без ограничения общности будем считать, что слово W_1 имеет левый хвост $P = (112)^l(112)^2 21$, где $l \geqslant 0$.

Слова W_1 и W_2 имеют общий префикс XYY, поэтому в случае $P \leqslant XYY$ утверждение 1 очевидно. С другой стороны, если $XY^s \leqslant P$, утверждение следует по определению нерегулярных хвостов: в этом случае слово W_2 будет иметь хвост, эквивалентный P.

Наконец, пусть $s = 3$ и $XYY < P < XYYY$. Легко заметить, что $XYY \neq (112)^l(112)^2 2$, так как в противном случае $22 \leqslant Y$ и хвост P содержал бы как минимум два вхождения подслова 22 внутри различных вхождений Y, что невозможно. Таким образом, мы имеем $XYY \leqslant (112)^{l+2}$ и, в частности, слово XYY не содержит подслова 22. Но тогда и слово $XYYY$ не содержит подслова 22, что противоречит условию $22 \leqslant P < XYYY$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение леммы.

Приступим к доказательству второго утверждения. По утверждению 1 леммы, если слово W_1 не имеет хвостов, то и слово W_2 их не имеет, поэтому $\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_1) = W_1$, $\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_2) = W_2$, и утверждение 2 леммы очевидно.

Предположим теперь, что слово W_1 имеет только один хвост. Без ограничения общности, пусть $W_1 = (112)^l(112)^2 21Q$ для некоторого слова $Q \in \Sigma^*$. Обозначим хвост слова W_1 через P. Рассмотрим все возможные варианты вхождения подслова Y^s в слово W_1.

1) Случаи $XY^s \leqslant P$ и $(112)^l 1 \leqslant X$ очевидны: в первом случае замена $Y^s \to Y^t$ происходит в хвосте P, во втором — в слове $\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_1)$.

2) $XY \leqslant (112)^{l+2} < P < XY^s$. Слово XY не содержит подслова 22. С другой стороны, мы имеем $22 < P < XY^s$. Это возможно только, если подслово 22 образуется в слове XYY на стыке двух вхождений Y, когда $Y[1] = Y[|Y|] = 2$. Ввиду того, что $XYY[1] \leqslant P$ и хвост P содержит лишь одно вхождение подслова 22, мы заключаем, что $XY = (112)^{l+2}$ и $Y^{s-1}Z = 21Q$:

$$\underbrace{(11\overbrace{2)^{l+1}112}^{Y}\,\overbrace{21}^{Y}}_{P}\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{Q}$$

Пусть $Y = (211)^r 2$ для некоторого $r \geqslant 1$. Если $r > 1$, то слово Y начинается с 211211. Так как $Y^{s-1}Z = 21Q$, слово Q начинается с 1211. Тогда слово $\mathsf{r_T}(W_1) = 1211221Q$ содержит подслово $221Q[1\ldots 4] = 2211211$, что противоречит тому, что $\mathsf{r_T}(W_1)$ — $\widetilde{AB}$-целое слово.

Если $r = 1$, то $Y = 2112$. Тогда из равенства $XY = (112)^{l+2}$ следует $(112)^l 1 \leqslant X$, и мы находимся в условиях случая 1.

3) $X \leqslant (112)^l \mathrel{\widetilde{<}} (112)^{l+2}2 \leqslant XY$. Легко видеть, что слово Y содержит подслово 1121122, не являющееся $\widetilde{AB}$-целым. Это, однако, противоречит тому, что слово $\mathsf{r_T}(W_1)$ является $\widetilde{AB}$-целым, поскольку суффикс YZ слова W_1 целиком лежит внутри $\mathsf{r_T}(W_1)$.

Наконец, предположим, что слово W_1 имеет одновременно левый и правый хвосты P_1 и, соответственно, P_2. Мы будем пользоваться представлением $W_1 = S_1\mathsf{r_T}(W_1)S_2$ для слова W_1, где S_1 и S_2 — обрезаемые части хвостов P_1 и P_2 соответственно. Рассмотрим различные варианты расположения подслов X, Y^s и Z слова W_1 относительно его хвостов P_1 и P_2.

4) $S_2 \leqslant Z$. Пусть $Z = Z'S_2$, где $Z' \in \Sigma^*$, $W_1' = S_1\mathsf{r_T}(W_1) = XY^sZ'$ и $W_2' = XY^tZ'$. Заметим, что слово W_1' имеет в точности один хвост (левый), а слово $\mathsf{r_T}(W_1') = \mathsf{r_T}(W_1)$ является $\widetilde{AB}$-целым. По доказанному выше (случаи 1–3), мы имеем $(\mathsf{r_T}(W_1), \mathsf{r_T}(W_2')) \in \pi_{\mathsf{r}_1}$. Согласно утверждению 1 леммы, слово W_2' также имеет только один (левый) хвост, поэтому $\mathsf{r_T}(W_2') = \mathsf{r^l_T}(W_2')$. В тоже время, в силу предложения 1.2.5, слово W_2' имеет суффикс 1221121 (если P_2 — правый 1-хвост) или 2112212 (если P_2 — правый 2-хвост). Следовательно, правый хвост слова $W_2 = W_2'S_2$ совпадает с P_2, и мы получаем

$$\mathsf{r_T}(W_2) = \mathsf{r^l_T}(\mathsf{r^r_T}(W_2)) = \mathsf{r^l_T}(\mathsf{r^r_T}(XY^tZ'S_2)) = \mathsf{r^l_T}(XY^tZ') = \mathsf{r_T}(W_2') \ .$$

Таким образом, $(\mathsf{r_T}(W_1), \mathsf{r_T}(W_2)) \in \pi_{\mathsf{r}_1}$, что и требовалось доказать.

5) Случай $S_1 \leqslant X$ разбирается аналогично предыдущему случаю.

Нерассмотренным остался только вариант $\mathsf{r_T}(W_1) \ll Y^s$. Здесь ситуация зависит от того, являются ли хвосты P_1 и P_2 *однотипными* (когда оба хвоста являются или 1-хвостами, или 2-хвостами) или *неоднотипными* (когда один из хвостов P_1 или P_2 есть 1-хвост, а другой — 2-хвост).

6) $\mathsf{r_T}(W) \ll Y^s$, хвосты P_1 и P_2 неоднотипные. Без ограничения общности будем считать, что P_1 является левым 1-хвостом, а P_2 — правым 2-хвостом. Пусть $P_1 = (112)^{l_1+2}21$ и $P_2 = 21(122)^{l_2+2}$ для некоторых $l_1, l_2 \geqslant 0$. Тогда операция $\mathsf{r_T}$ обрезает от хвоста P_1 префикс $S_1 = (112)^{l_1}1$, а от хвоста P_2 — суффикс $S_2 = 2(122)^{l_2}$.

Представим слово Y^s в виде $Y^s = Q'\mathsf{r_T}(W_1)Q''$, где $Q', Q'' \in \Sigma^+$. Ввиду соотношений $11 \leqslant Y^s$ и $22 \leqslant Y^s$, хотя бы одно из слов 11 и 22 (пусть, скажем, слово 22) входит в Y^s внутри подслова Y. Тогда Y имеет префикс $Q'121122$, так как любой более короткий префикс слова Y^s не содержит подслова 22. В частности, мы имеем $1121122 \leqslant Y$:

$$\underbrace{(112)^{l_1}1}_{S_1}\underbrace{121122\ldots\ldots2}_{\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)}\underbrace{2(122)^{l_2}}_{S_2}\;.$$

С другой стороны, $Y^{s-1}Z \leqslant \mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)S_2$, поэтому слово $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)S_2$ также содержит подслово 1121122. Нетрудно убедиться, что подслово 1121122 и хвост P_2 или не пересекаются внутри $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)S_2$, или пересекаются по подслову длиной не более пяти символов (максимально возможное их пересечение — подслово 21122). Поскольку операция r_{T} сохраняет первые семь символов хвоста P_2, мы получаем $1121122 \leqslant \mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)$, что противоречит тому, что слово $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)$ — $\widetilde{AB}$-целое. Таким образом, этот случай невозможен.

7) $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W) \ll Y^s$, левый и правый хвосты однотипные. Без ограничения общности будем считать, что оба хвоста являются 1-хвостами. Пусть $P_1 = (112)^{l_1+2}21$ и $P_2 = 12(211)^{l_2+2}$ для некоторых $l_1, l_2 \geqslant 0$; операция r_{T} обрезает от хвостов P_1 и P_2 соответственно префикс $S_1 = (112)^{l_1}1$ и суффикс $S_2 = 1(211)^{l_2}$.

Положим $Y^s = Q'\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)Q''$ для некоторых слов $Q', Q'' \in \Sigma^+$. Слово Y^s содержит подслово 22. Если $22 \leqslant Y$, то, рассуждая аналогично случаю 6, мы получим $1121122 \leqslant \mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)$, что противоречит тому, что слово $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)$ — $\widetilde{AB}$-целое. Поэтому будем считать, что слово Y не содержит подслова 22. Тогда $Y[1] = Y[|Y|] = 2$ и слово 22 образуется на стыке вхождений Y в слово Y^s. Так как, по определению, $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)$ начинается на 1211221 и заканчивается на 1221121, и при этом $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1) \neq 1211221121$ (в противном случае слово W_1 имело бы вид $(112)^*(112)^2(211)^2(211)^*$, что противоречит условиям леммы), слово $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)$ содержит как минимум два различных вхождения подслова 22, откуда $s = 3$. Легко видеть, что $Y = (211)^r2$ для некоторого числа $r \geqslant 2$:

$$\underbrace{(112)^{l_1}1}_{S_1}\underbrace{121122\ldots\ldots221121}_{\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)}\underbrace{1(211)^{l_2}}_{S_2}\;.$$

В то же время, $\widetilde{AB}$-целое слово $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(W_1)$ содержит подслово Y. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Предложение 2.3.2. *Пусть $U \sim V$ и слова U и V являются r_1-редуцированными. Тогда*

1) *Если слово U имеет нерегулярный хвост, то слово V имеет нерегулярный хвост того же типа.*

2) *Если $V \notin [112112211211] \cup [221221122122]$ и слово $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(V)$ является $\widetilde{AB}$-целым, то $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(U) \sim \mathsf{r}_{\mathsf{T}}(V)$.*

Доказательство. Пусть $\{W_i\}_{i=0}^{n}$ — r_1-связующая (V,U)-цепочка. Легко показать индукцией по $i = 0,\ldots,n$, что каждое слово W_i имеет хвосты того же типа, что и хвосты слова V. Действительно, база индукции ($W_0 = V$) очевидна, шаг индукции обеспечивает лемма 2.3.2 (1). Тогда первое утверждение немедленно следует ввиду равенства $W_n = U$.

Для доказательства второго утверждения предположим, что слово $\mathsf{r}_\mathsf{T}(V)$ является $\widetilde{AB}$-целым и $V \notin [112112211211] \cup [221221122122]$. Опять, индукцией по i покажем, что все слова $\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_i)$, где $i = 0,\ldots,n$, эквивалентны слову $\mathsf{r}_\mathsf{T}(V)$: тогда, ввиду того, что $W_n = U$, утверждение 2 будет следовать по индукции. База индукции ($W_0 = V$) очевидна. Теперь предположим, что для некоторого $i < n$ выполняется $\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_i) \sim \mathsf{r}_\mathsf{T}(V)$, и докажем, что $\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_{i+1}) \sim \mathsf{r}_\mathsf{T}(V)$. По предложению 1.2.3, из условия $\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_i) \sim \mathsf{r}_\mathsf{T}(V)$ следует, что слово $\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_i)$ является $\widetilde{AB}$-целым. Легко видеть, что

$$(112)^*(112)^2(211)^2(211)^* + (221)^*(221)^2(122)^2(122)^* \subseteq [112112211211] \cup [221221122122].$$

Так как $W_i \sim V$ и $V \notin [112112211211] \cup [221221122122]$, к паре слов W_i и W_{i+1} применима лемма 2.3.2 (2). В результате мы получаем $(\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_i), \mathsf{r}_\mathsf{T}(W_{i+1})) \in \pi$, откуда следует $\mathsf{r}_\mathsf{T}(W_{i+1}) \sim \mathsf{r}_\mathsf{T}(W_i) \sim \mathsf{r}_\mathsf{T}(V)$, что и требовалось доказать. □

2.3.3 Классы $[112112211211]_{\mathsf{r}_1}$ и $[221221122122]_{\mathsf{r}_1}$

В условиях предложения 2.3.2 исключается случай, когда слово V принадлежит одному из классов $[112112211211]$ или $[221221122122]$. Заметим, что слова 112112211211 и 221221122122 сильно бескубны. Таким образом, для завершения описания всех случаев, когда класс эквивалентности содержит нерегулярное почти сильно бескубное слово, нам необходимо исследовать классы $[112112211211]$ и $[221221122122]$.

Лемма 2.3.3. 1) $[112112211211]_{\mathsf{r}_1} = (112)^*(112)^2(2(112)^*112)^*(211)^2(211)^*$*;*
2) $[221221122122]_{\mathsf{r}_1} = (221)^*(221)^2(1(221)^*221)^*(122)^2(122)^*$*.*

Доказательство. Ввиду равенства $221221122122 = \overline{112112211211}$, достаточно доказать только первое утверждение леммы. Пусть $V = 112112211211$ и $\mathcal{R}$ — язык, задаваемый регулярным выражением в правой части равенства (утверждение 1 леммы).

Докажем сначала включение $\mathcal{R} \subseteq [V]_{\mathsf{r}_1}$. Поскольку все слова из языка $\mathcal{R}$ являются r_1-редуцированными, достаточно показать, что $\mathcal{R} \subseteq [V]$. Рассмотрим слово V. Преобразуем его при помощи следующей последовательности эквивалентных замен (то есть замен вида $YY \to YYY$ и $YYY \to YY$, где $Y \in \Sigma^+$):

$$\begin{gathered}\underline{112112}\,\underline{211211} \sim 11\underline{2112112}\,\underline{2112112}11 \sim \\ \underline{112112112}\,2112112\,\underline{211211211} = \\ 112112\,2112112\,211211\ \ .\end{gathered}$$

Заметим, что полученное слово начинается на V, поэтому мы можем применить ту же последовательность действий к его префиксу, совпадающему со словом V. Повторив те же действия l раз, мы получим слово $(112)^2\,(2112112)^l\,(211)^2$, эквивалентное V для любого $l \geqslant 0$. Следовательно, $(112)^2(2112112)^*(211)^2 \subseteq [V]$.

Далее, мы видим, что для любого слова W вида $(112)^2(2112112)^*(211)^2$, его подслово 22 входит в W всегда внутри подслова 2112 2112. Ввиду включения

$$2112(2112)^*\,2112 \subseteq [2112\,2112],$$

мы имеем $(112)^2(2112)^*(2112112(2112)^*)^*(211)^2 \subseteq [V]$. Несложно проверить, что

$$(112)^2(2112)^*(2112112(2112)^*)^*(211)^2 = (112)^2(2(112+112112))^*(211)^2\ .$$

Наконец, с учетом леммы 2.3.1 (2,3), мы получаем

$$\mathcal{R} = (112)^*(112)^2(2(112)^*112)^*(211)^2(211)^* \subseteq [V]\ .$$

Докажем теперь обратное включение: $[V]_{\mathsf{r}_1} \subseteq \mathcal{R}$. Поскольку слово V принадлежит языку $\mathcal{R}$ и отношение $\sim_{\mathsf{r}_1}$ есть транзитивное замыкание отношения π_{r_1}, достаточно рассмотреть пару соседних слов W_1 и W_2 и показать, что $W_1 \in \mathcal{R}$ влечет $W_2 \in \mathcal{R}$.

Пусть $W_1 = XY^sZ$ и $W_2 = XY^tZ$ для некоторых слов $X, Z \in \Sigma^*$, $Y \in \Sigma^+$ и чисел $\{s,t\} = \{2,3\}$, и $W_1 \in \mathcal{R}$. Припишем в начало и конец слов W_1 и W_2 символ 2. Договоримся слова $2(112)^l112$ называть *блоками* и обозначать через $B\{l\}$ для любого $l \geqslant 0$. Пусть $\widetilde{B}_2$ обозначает язык $\bigcup_{i=1}^{\infty} B\{i\}$ всех блоков $B\{i\}$ с $i > 0$, а $\widetilde{B}_{02}$ обозначает язык $\bigcup_{i=0}^{\infty} B\{i\}$ всех блоков $B\{i\}$ с $i \geqslant 0$. Тогда $2W_12 \in \widetilde{B}_2(\widetilde{B}_{02})^*\widetilde{B}_2$, и слово $2W_12$ можно представить в виде:

$$2W_12 = B\{i_0\}B\{i_1\}\dots B\{i_n\},$$

где $i_k \geqslant 0$ для $k = 1,\dots,n-1$ и $i_0, i_n > 0$. Рассмотрим различные случаи расположения подслова Y^s в слове $2W_12$.

1) $22 \leqslant Y$. Тогда $Y = SB\{i_p\}\dots B\{i_{p+r-1}\}P$ для некоторых чисел $p \geqslant 1$, $r \geqslant 0$ и слов S, P таких, что S — непустой суффикса блока $B\{i_{p-1}\}$, а P — собственный (возможно, пустой) префикс блока $B\{i_{p+r}\}$. (Отметим, что r может быть равно нулю: в этом случае $P \neq \lambda$ и слово $Y = SP$ образуется на стыке двух блоков $B\{i_{p-1}\}$ и $B\{p\}$.) Ясно, что $B\{i_{p+r}\} = PS$. Действительно, подслово 22 образуется в W_1 только на стыке блоков, поэтому первое вхождение подслова 22 в суффикс $Y^{s-1}Z$ слова W_1 накладывается на конец и начало, соответственно, блоков $B\{i_{p+r}\}$ и $B\{i_{p+r+1}\}$. Поскольку первое вхождение подслова 22 в Y образуется на стыке слов S и $B\{i_p\}$, мы заключаем, что $B\{i_{p+r}\} = PS$. Таким образом, мы имеем

$$2XYYZ2 = 2\underbrace{\dots\dots 2|..}_{X}\underbrace{S|2\dots\dots 2|P}_{Y}\underbrace{S|2\dots\dots 2|P}_{Y}\underbrace{..|2\dots\dots}_{Z}2$$

и

$$2XYYYZ2 = 2\underbrace{\ldots\ldots2|..}_{X}\underbrace{S|2\ldots\ldots2|P}_{Y}\underbrace{S|2\ldots\ldots2|P}_{Y}\underbrace{S|2\ldots\ldots2|P}_{Y}\underbrace{..|2\ldots\ldots}_{Z}2\ .$$

(Вертикальная черта в записи отделяет блоки друг от друга.)

Мы видим, что замена $YY \to YYY$ или $YYY \to YY$ приводит к вставке или, соответственно, удалению некоторой последовательности блоков, расположенной между двумя другими блоками. Следовательно, соседнее с $2W_12$ слово $2W_22$ состоит из целого числа блоков и содержит хотя бы два (крайних) блока $B\{i_0\}, B\{i_n\} \in \widetilde{B}_2$ (такие же, что и у слова $2W_12$), поэтому

$$2W_22 \in \widetilde{B}_2(\widetilde{B}_{02})^*\widetilde{B}_2,$$

откуда $W_2 \in \mathcal{R}$.

2) $22 \leqslant YY$, но при этом слово Y не содержит подслова 22. Тогда $Y[1] = Y[|Y|] = 2$, и единственное вхождение подслова 22 в YY образуется на стыке вхождений Y. С другой стороны, в слове $2W_12$ подслово 22 образуется только на стыке блоков. Следовательно, Y является одновременно суффиксом некоторого блока $B\{i_p\}$ и префиксом блока $B\{i_{p+1}\}$. Пусть $Y = 2Q2$. Легко проверить, что любое подслово блока, начинающееся и заканчивающееся на 2, имеет вид $2(112)^l112$ для некоторого $l \geqslant 0$, то есть само является блоком. Таким образом, мы получаем:

$$2XYYZ2 = 2\underbrace{\ldots\ldots2|..}_{X}\underbrace{2Q2}_{Y}|\underbrace{2Q2}_{Y}\underbrace{..|2\ldots\ldots}_{Z}2.$$

и

$$2XYYYZ2 = 2\underbrace{\ldots\ldots2|..}_{X}\underbrace{2Q2}_{Y}|\underbrace{2Q2}_{Y}|\underbrace{2Q2}_{Y}\underbrace{..|2\ldots\ldots}_{Z}2\ .$$

Как видно в этом случае, замена $YY \to YYY$ или $YYY \to YY$ приводит к вставке или, соответственно, удалению одного блока Y, расположенного между двумя другими блоками, поэтому, как и в случае 1, мы имеем $2W_22 \in \widetilde{B}_2(\widetilde{B}_{02})^*\widetilde{B}_2$, откуда $W_2 \in \mathcal{R}$.

3) Слово YY не содержит подслова 22. В этом случае замена $Y^s \to Y^t$ происходит внутри одного блока. Ясно, что внутри блока 2112 такая замена происходить не может. В силу леммы 2.3.1(4), любое слово, эквивалентное блоку $B \in \widetilde{B}_2$, само является блоком. Таким образом, слово $2W_22$ получается из $2W_12$ заменой одного блока на эквивалентный, поэтому $2W_22 \in \widetilde{B}_2(\widetilde{B}_{02})^*\widetilde{B}_2$ и $W_2 \in \mathcal{R}$. □

Лемма 2.3.4. *Класс* [112112211211] *(*[221221122122]*) содержит единственное почти сильно бескубное слово* 112112211211 *(соответственно,* 221221122122*).*

Доказательство. Пусть $V \in [112112211211]$ и слово V почти сильно бескубно. По лемме 2.3.3, мы имеем

$$V = (112)^{i_0}B\{i_1\}\ldots B\{i_{n-1}\}(211)^{i_n},$$

где $i_0, i_n \geqslant 2$ и $B\{i_k\} = 2(112)^{i_k}112$, $i_k \geqslant 0$, для $i = 1, \dots, n-1$. Из того, что слово V почти сильно бескубно, немедленно следует $i_0 = i_n = 2$. Заметим, что слова $B\{i_k\}$ при $i_k > 0$ не являются сильно бескубными. Поскольку $B\{i_k\}$ — собственное подслово слова V при любом k, мы заключаем, что $i_k = 0$ и $B\{i_k\} = 2112$ для всех $k = 1, \dots, n-1$. С другой стороны, слово V не может содержать более двух вхождений подслова 2112 подряд, а подслово $B\{i_1\} \dots B\{i_{n-1}\}$ входит в V внутри подслова $2112B\{i_1\} \dots B\{i_{n-1}\}2112$. Следовательно, $n = 1$ и $V = (112)^2(211)^2$, что и требовалось доказать.

Класс [221221122122] симметричен классу [112112211211] относительно операции инвертирования, поэтому для него доказываемое утверждение также верно. $\square$

Положим

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1' \cup \{112112211211, 221221122122\} \ .$$

Сформулируем, наконец, ключевое утверждение этого параграфа, которое позволяет заменять произвольное слово U, эквивалентное некоторому почти сильно бескубному слову, на $\widetilde{AB}$-целое слово $\mathsf{r_T}(U)$, с сохранением отношения эквивалентности.

Предложение 2.3.3. *Пусть $U \sim V$, где U и V — $\mathsf{r_1}$-редуцированные слова, слово V почти сильно бескубно и $V \notin \mathcal{S}_1$. Тогда $\mathsf{r_T}(U) \sim \mathsf{r_T}(V)$ и оба слова $\mathsf{r_T}(U)$ и $\mathsf{r_T}(V)$ являются $\widetilde{AB}$-целыми.*

Доказательство. В силу предложения 2.3.1 и определения операции $\mathsf{r_T}$, слово $\mathsf{r_T}(V)$ регулярно для любого почти сильно бескубного слова $V \notin \mathcal{S}_1$. В частности, слово $\mathsf{r_T}(V)$ является $\widetilde{AB}$-целым. В то же время, ввиду леммы 2.3.1, из неравенств $V \neq 112112211211$ и $V \neq 221221122122$ следует, что $V \notin [112112211211] \cup [221221122122]$. Таким образом, к паре слов U и V применимо предложение 2.3.2 (2), поэтому $\mathsf{r_T}(U) \sim \mathsf{r_T}(V)$. Наконец, по предложению 1.2.3, слово $\mathsf{r_T}(U)$ является $\widetilde{AB}$-целым. $\square$

§ 2.4 Функции ξ и η

Операции редукции $\mathsf{r_T}$ и r, введенные в §§ 2.2 и 2.3, позволяют преобразовывать произвольное слово в регулярное. Осталось научиться превращать любое регулярное слово в θ-образ. Для этого мы используем функции ξ и η, определенные ниже.

Согласно предложению 1.2.1, всякое регулярное слово является подсловом некоторого θ-образа. Следовательно, регулярное слово U можно представить в виде

$$U = cQ_1 \dots Q_k d, \text{ где } Q_1, \dots, Q_k \in \{ab, ba\}, c, d \in \{1, 2, \lambda\}. \tag{2.1}$$

Ввиду наблюдения 1.2.1, такое представление единственно, если слово U содержит хотя бы одно из подслов 11 или 22. Для буквочередующихся слов потребуем дополнительно $c = \lambda$ для сохранения единственности представления. Положим теперь

$$\eta(U) = Q_1 \dots Q_k \quad \text{ и } \quad \xi(U) = \bar{c}U\bar{d}$$

для любого регулярного слова U. Таким образом, слово $\eta(U)$ есть максимальный по длине θ-образ, содержащийся в слове U, а $\xi(U)$ — минимальный по длине θ-образ, содержащий U. Дополнительно определим функции $h_\eta(U) = c$, $t_\eta(U) = d$, $h_\xi(U) = \overline{c}$ и $t_\xi(U) = \overline{d}$. В связи с использованием функций ξ и η, под термином *символ* мы будем понимать, помимо элементов алфавита, еще и пустое слово.

Установим теперь несколько базовых свойств функций ξ и η.

Лемма 2.4.1. 1) *Если слово U не является буквочередующимся и $eUf \in \theta(\Sigma^*)$ для некоторых $e, f \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, то $\xi(U) = eUf$, $h_\xi(U) = e$ и $t_\xi(U) = f$.*

2) *Пусть $U = cU'd$, где $c, d \in \Sigma \cup \{\lambda\}$ и $U' \in \theta(\Sigma^*)$. Тогда слово U регулярно. Кроме того, если слово U не является буквочередующимся, то $\eta(U) = U'$, $h_\eta(U) = c$ и $t_\eta(U) = d$.*

3) *Пусть $U = cU'd$, где $c, d \in \Sigma \cup \{\lambda\}$, $U' \in \Sigma^*$, причем $c \neq U'[1]$ и $d \neq U'[|U'|]$. Тогда если слово U' регулярно, то и слово U регулярно.*

Доказательство. Для доказательства утверждения 2 заметим, что условия $U = cU'd$ и $U' \in \theta(\Sigma^*)$ влекут $U \leqslant \overline{c}cU'd\overline{d} \in \theta(\Sigma^*)$, поэтому слово U регулярно в силу предложения 1.2.1. Если к тому же слово U не является буквочередующимся, то $\eta(U) = U'$, $h_\eta(U) = e$ и $t_\eta(U) = f$ ввиду единственности представления (2.1) и определения функции η.

Утверждение 3 очевидно. В самом деле, так как $c \neq U'[1]$ и $d \neq U'[|U'|]$, подслова 11 и 22 могут входить в U только внутри подслова U'. Приписывание символа c в начало слова U' сохраняет (при $c = \lambda$) или изменяет (при $c \neq \lambda$) четность сразу всех позиций слова U', поэтому, если слово U' регулярно, то и слово U тоже регулярно.

Наконец, пусть $eUf = \theta(X)$ для некоторого слова $X \in \Sigma^*$. Тогда мы имеем $U = \overline{e}\theta(X')\overline{f}$ для некоторого подслова X' слова X. В силу единственности такого представления, по определению η, мы получаем $\eta(U) = \theta(X')$, $h_\eta(U) = \overline{e}$ и $t_\eta(U) = \overline{f}$. Утверждение 1 теперь непосредственно следует из определения функции ξ и символов h_ξ и t_ξ. □

Следующее наблюдение описывает классы эквивалентности всех буквочередующихся слов.

Наблюдение 2.4.1. *Любое слово, эквивалентное буквочередующемуся слову, само является буквочередующимся. Существует всего 10 классов эквивалентности, состоящих из буквочередующихся слов:* $[1] = 1$, $[12] = 12$, $[121] = 121$, $[1212] = 12(12)^+$, $[12121] = 12(12)^+1$ *и еще 5 классов, получающихся из уже приведенных путем инвертирования.*

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать одно из основных свойств функций η и ξ: для эквивалентных слов функция η стирает, а функция ξ приписывает одни и те же символы.

Предложение 2.4.1. *Пусть U, V — два регулярных слова и $U \sim V$. Тогда*
1) $h_\xi(U) = h_\xi(V)$, $\quad t_\xi(U) = t_\xi(V)$.
2) $h_\eta(U) = h_\eta(V)$, $\quad t_\eta(U) = t_\eta(V)$.

Доказательство. Если U — буквочередующееся слово, утверждения 1 и 2 непосредственно вытекают из наблюдения 2.4.1 и определения символов h_η, t_η, h_ξ и t_ξ.

Предположим, что слово U не является буквочередующимся, и докажем утверждение 1. Ясно, что $\xi(U) = h_\xi(U)Ut_\xi(U) \sim h_\xi(U)Vt_\xi(U)$, поскольку приписывание к эквивалентным словам одних и тех же букв сохраняет отношение $\sim$. Заметим, что $h_\xi(U) \neq V[1]$ и $t_\xi(U) \neq V[|V|]$. Действительно, по предложению 1.2.5, мы имеем $U[1] = V[1]$ и $U[|U|] = V[|V|]$, а по определению h_ξ и t_ξ мы получаем $h_\xi(U) \neq U[1]$ и $t_\xi(U) \neq U[|U|]$. Таким образом, мы находимся в условиях леммы 2.4.1 (3), согласно которой слово $h_\xi(U)Vt_\xi(U)$ регулярно. Применяя к словам $\xi(U)$ и $h_\xi(U)Vt_\xi(U)$ предложение 1.2.4, мы заключаем, что $h_\xi(U)Vt_\xi(U) \in \theta(\Sigma^*)$. Утверждение 1 теперь вытекает из леммы 2.4.1 (1).

Утверждение 2 следует из утверждения 1 ввиду равенств

$$h_\eta(U) = \overline{h_\xi(U)} = \overline{h_\xi(V)} = h_\eta(V),$$
$$t_\eta(U) = \overline{t_\xi(U)} = \overline{t_\xi(V)} = t_\eta(V)$$

(см. определение символов h_η, t_η, h_ξ и t_ξ). □

Таким образом, в силу предложения 2.4.1 и благодаря стабильности произвольной конгруэнции относительно приписывания букв к началу и концу слова, функция ξ сохраняет отношение эквивалентности между словами: $U \sim V$ влечет $\xi(U) \sim \xi(V)$ для любых регулярных слов U и V. Для функции η это свойство в общем случае не имеет места. Удивительно, однако, то, что случаи, когда функция η не сохраняет отношение соседства π, достаточно редки и являются скорее исключением, чем правилом. Следующая лемма описывает все такие случаи.

Лемма 2.4.2. *Пусть слова U и V регулярны, $|U| < |V|$, $(U, V) \in \pi$ и $(\eta(U), \eta(V)) \notin \pi$. Тогда $\{h_\eta(U), t_\eta(U)\} = \{1, 2\}$ и существует слово Y четной длины такое, что $|Y| > 2$, $U = YY$, $V = YYY$, $h_\eta(Y) = h_\eta(U) = h_\eta(V)$ и $t_\eta(Y) = t_\eta(U) = t_\eta(V)$.*

Доказательство. Так как слово U короче слова V, по определению отношения соседства мы имеем $U = XYYZ$ и $V = XYYYZ$ для некоторых слов $X, Z \in \Sigma^*$ и $Y \in \Sigma^+$. Покажем, что слово Y — искомое.

Первым делом заметим, что длины слов U и V имеют одну и ту же четность, поскольку слова U и V, ввиду предложения 2.4.1, получаются из слов $\eta(U)$ и $\eta(V)$ четной длины приписыванием одних и тех же букв. Поэтому Y — слово четной длины. Пусть

$$h_\eta(U) = h_\eta(V) = c \quad \text{и} \quad t_\eta(U) = t_\eta(V) = d,$$

где $c, d \in \Sigma \cup \{\lambda\}$. Ясно, что если $|c| \leqslant |X|$ и $|d| \leqslant |Z|$, слова $\eta(U)$ и $\eta(V)$ будут соседними по определению. Следовательно, по крайней мере одно из этих неравенств не выполняется.

Предположим, что $|d| \leqslant |Z|$ и $|c| > |X|$, то есть $c \neq \lambda$ и $X = \lambda$. Представим слово Y в виде $Y = cY'e$, где $Y' \in \Sigma^*$ и $e \in \Sigma$. Тогда мы получим

$$\eta(U) = Y'ecY'eZ' \quad \text{и} \quad \eta(V) = Y'ecY'ecY'eZ'$$

для некоторого префикса Z' слова Z. Ввиду наблюдения 1.2.1, длина слова Z' нечетна, в частности, $Z' \neq \lambda$. Заметим, что $Z'[1] = \overline{e} = c$, поскольку подслова ec и $eZ'[1]$ входят в слово $\eta(U)$ в нечетных позициях. Следовательно, $\eta(U) = (Y'ec)^2 Z''$ и $\eta(V) = (Y'ec)^3 Z''$, где $Z'' = Z'[2 \ldots |Z'|]$, то есть слова $\eta(U)$ и $\eta(V)$ оказываются соседними, противоречие.

Случай $|c| \leqslant |X|$ и $|d| > |Z|$ разбирается аналогично. Таким образом, мы доказали, что одновременно не выполняются оба неравенства $|c| \leqslant |X|$ и $|d| \leqslant |Z|$, поэтому $c, d \in \Sigma$ и $X = Z = \lambda$, то есть $U = YY$ и $V = YYY$ Представим слово Y в виде $Y = cY'd$, где $Y' \in \Sigma^*$. Тогда $\eta(U) = Y'dcY'$ и $\eta(V) = Y'dcY'dcY'$. В силу наблюдения 1.2.1, мы получаем $Y' \in \theta(\Sigma^*)$ и $c = \overline{d}$. Если слово Y буквочередующееся, то слова U и V оказываются θ-образами, в частности, мы имеем $\eta(U) = U$ и $\eta(V) = V$, что противоречит условию леммы. Следовательно, слово Y не может быть буквочередующимся, откуда, по лемме 2.4.1 (2), мы получаем $h_\eta(Y) = c$ и $t_\eta(Y) = d$. Наконец, легко убедиться в справедливости неравенства $|Y| > 2$. Лемма полностью доказана. □

Назовем пару эквивалентных регулярных слов U и V *хорошей*, если $\eta(U) \sim \eta(V)$, и назовем *плохой* в противном случае. Лемма 2.4.2 дает описание всех плохих пар соседних слов (заметим, впрочем, что лемма 2.4.2 формулируется для более общего случая, требуя от соседних регулярных слов U и V только, чтобы $(\eta(U), \eta(V)) \notin \pi$, при этом слова $\eta(U)$ и $\eta(V)$ вполне могут оказаться эквивалентными). Часть установленных в лемме свойств переносится на случай произвольной пары регулярных эквивалентных слов.

Предложение 2.4.2. *Если пара (U, V) плохая, то*

$$\{h_\eta(U), t_\eta(U)\} = \{h_\eta(V), t_\eta(V)\} = \{1, 2\}.$$

Доказательство. Пусть $\{W_k\}_{k=0}^n$ — r-связующая (U, V)-цепочка, которая существует по предложению 2.2.2. Ясно, что если все пары (W_{k-1}, W_k) хорошие ($k \geqslant 1$), то пара (U, V) также будет хорошей, что противоречит условию. Следовательно, для некоторого $k' \geqslant 1$ пара $(W_{k'-1}, W_{k'})$ является плохой. Доказываемое утверждение теперь непосредственно следует из леммы 2.4.2 и предложения 2.4.1. □

Итак, мы видим, что во многих случаях функция η сохраняет отношение $\sim$ для пары эквивалентных слов. Не случайно при построении алгоритма EqAOF мы используем функцию η, в то время как функция ξ применяется только для доказательства теоремы 2.1 (подробнее о выборе между функциями η и ξ мы поговорим в § 2.6).

В заключение параграфа заметим, что функции $\theta^{-1}(\xi(V))$ и $\theta^{-1}(\eta(V))$ сохраняют свойство слова V быть почти сильно бескубным: для функции ξ доказательство этого факта можно найти в [30], для функции η справедливо несколько более сильное утверждение.

Лемма 2.4.3. *Если V — регулярное почти сильно бескубное слово, то слово $\theta^{-1}(\eta(V))$ является сильно бескубным.*

Доказательство. Пусть V — регулярное почти сильно бескубное слово. Поскольку отображение θ^{-1} сохраняет свойство сильной бескубности слов, достаточно показать, что слово $\eta(V)$ является сильно бескубным. Это очевидно в случае, когда слово V уже сильно бескубно.

Предположим теперь, что $V = XXX'$ для некоторого слова $X \in \Sigma^+$ и его префикса $X' \in \Sigma^+$, причем любое собственное подслово слова V сильно бескубно. Так как подслово $XXX[1]$ слова V не является сильно бескубным, мы заключаем, что $V = XXX[1]$ и $X' = X[1]$. Мы видим, что длина слова V нечетна, поэтому $\eta(V) < V$ и слово $\eta(V)$ сильно бескубно. □

§ 2.5 Доказательство теоремы 2.1

Докажем теорему 2.1 методом минимального контрпримера. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и пусть (U,V) — пара различных почти сильно бескубных слов таких, что $U, V \notin [11] \cup [22]$, $U \sim V$ и значение $l = \min\{|U|, |V|\}$ является наименьшим среди всех таких пар. С целью получить противоречие, мы построим пару (U', V') различных почти сильно бескубных слов, удовлетворяющую тем же условиям, что и пара (U,V), но имеющую меньшее значение $l' = \min\{|U'|, |V'|\}$.

Если слова U и V регулярны, применим к ним отображение $\theta^{-1}(\xi)$:

$$U' = \theta^{-1}(\xi(U)), \quad V' = \theta^{-1}(\xi(V)) \ .$$

В силу предложения 2.4.1, если $\xi(U) = cUd$, то и $\xi(V) = cVd$, поэтому $\xi(U) \neq \xi(V)$ и $\xi(U) \sim \xi(V)$. Применяя предложение 1.2.4, мы получаем $U' \neq V'$ и $U' \sim V'$. Заметим, что слова U' и V' почти сильно бескубны. Ясно, что $U, V \notin \{1, 2, 12, 21\}$, поскольку классы [1], [2], [12] и [21] одноэлементны. С другой стороны, $U, V \notin \{11, 22\}$ по условию. Следовательно, длина каждого из слов U и V больше двух, в частности, $l = \min\{|U|, |V|\} > 2$ и $l' = \min\{|U'|, |V'|\} \leqslant (l+2)/2 < l$. Наконец, если $U', V' \in [11] \cup [22]$, то слова $\xi(U)$ и $\xi(V)$, а, значит, и слова U и V, являются буквочередующимися, что невозможно: ввиду наблюдения 2.4.1, классы эквивалентных буквочередующихся слов содержат в точности по одному почти сильно бескубному слову. Таким образом, $U', V' \notin [11] \cup [22]$, и пара (U', V') удовлетворяет тем же условиям, что и пара (U,V), и при этом $l' < l$, что противоречит выбору пары (U,V).

Теперь предположим, что одно из слов U или V (пусть, скажем, слово U) нерегулярно. В силу лемм 2.3.1 и 2.3.4, каждый класс $[W]$, где $W \in \mathcal{S}_1$, содержит в точности одно почти сильно бескубное слово, поэтому $U \notin \mathcal{S}_1$. Тогда, по предложению 2.3.1, слово U имеет нерегулярный хвост, а по предложениям 2.3.2 и 2.3.3, слово V имеет нерегулярный хвост того же типа, и $\mathsf{r_T}(U) \sim \mathsf{r_T}(V)$. Положим $U' = \mathsf{r_T}(U)$ и $V' = \mathsf{r_T}(V)$. Ясно, что

$U', V' \notin [11] \cup [22]$ и $l' = \min\{|U'|, |V'|\} < l$. Как отмечалось в § 2.3, нерегулярный хвост произвольного почти сильно бескубного слова состоит из восьми символов, и операция $\mathsf{r_T}$ отрезает от каждого такого хвоста по одной букве. Следовательно, почти сильно бескубные слова U и V имеют хвосты не просто одного типа — они имеют одинаковые хвосты, причем $U' \neq V'$. Таким образом, в этом случае мы также приходим к противоречию, так как пара (U', V') удовлетворяет тем же условиям, что и (U, V), но имеет меньшее значение l'.

Теорема 2.1 доказана.

§ 2.6 Главные и нормальные ряды

Приступим к построению алгоритма EqAOF, который по слову U находит почти сильно бескубное слово V, эквивалентное U, или сообщает, что таких почти сильно бескубных слов нет. Поскольку функция ξ далее не используется, договоримся писать $t(U)$ и $h(U)$ вместо $t_\eta(U)$ и $h_\eta(U)$ соответственно.

2.6.1 Процедура Ancestor. Главные ряды

В этом пункте мы реализуем первый этап работы алгоритма — процедуру Ancestor. За основу процедуры Ancestor взят алгоритм A′, разработанный в [30].

Процедура Ancestor.

Вход. Слово $U \in \Sigma^+$.

Выход. Слово $\mathrm{Anc}(U) \in \Sigma^+$, целое число k, символьные массивы L, R, h, t длины k.

Шаг 0. $k := 0$.

Шаг 1. $k := k + 1$; $U := \mathsf{r_1}(U)$; $L[k] := R[k] := h[k] := t[k] := \lambda$.

Шаг 2. Если $|U| \leqslant 2$ или $U \in [112112211211] \cup [221221122122]$, то $\mathrm{Anc} := U$; стоп.

Шаг 3. Если U имеет нерегулярный левый (соответственно, правый) хвост, положим $L[k] := U[1]$ (соответственно, $R[k] := U[|U|]$); Пусть $U' := \mathsf{r_T}(U)$.

Шаг 4. Если слово U' не является $\widetilde{AB}$-целым или U' имеет нередуцируемые хвосты, положим $\mathrm{Anc} := U$; стоп.

Шаг 5. $U' := \mathsf{r}(U')$.

Шаг 6. $h[k] := h(U')$; $t[k] := t(U')$; $U := \theta^{-1}(\eta(U'))$; переходим к шагу 1.

Конец.

Начиная со слова $U_1 = \mathsf{r_1}(U)$, процедура Ancestor строит последовательность слов $U_1, U_2, \ldots$ по правилу

$$U_{k+1} = \mathsf{r_1}(\theta^{-1}(\eta(\mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k))))),$$

пока не выполнится одно из условий завершения работы процедуры (шаги 2 и 4). Полученную таким образом последовательность $\{U_k\}$ назовем *главным рядом слова* U, или *главным* U*-рядом.* Так как для любого $k = 1, 2, \ldots$ выполняется $|U_{k+1}| \leqslant |U_k|/2$, главный ряд состоит из конечного числа членов: его *длина* (то есть количество слов-членов в нем) обозначается через $\ell(U)$. Слово $U_\ell(U)$ называется *предком слова* U и обозначается через $\mathrm{Anc}(U)$; массивы $L = L_U$, $R = R_U$, $h = h_U$ и $t = t_U$, возвращаемые процедурой Ancestor, мы называем *ассоциированными со словом* U. В дальнейшем мы будем опускать индекс U в обозначениях, если из контекста понятно, с каким именно словом рассматриваемые массивы L, R, h и t ассоциированы.

В следующих двух леммах устанавливаются основные свойства главных рядов. Сначала изучим, как процедура Ancestor обрабатывает произвольное почти сильно бескубное слово.

Лемма 2.6.1. *Пусть V — почти сильно бескубное слово и $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$ — главный V-ряд. Тогда*

1) $\mathrm{Anc}(V) \in \mathcal{S}_1 \cup \{1, 2, 12, 21, 11, 22\}$.
2) *Слова V_k сильно бескубны для всех $k = 2, \ldots, \ell(V)$.*
3) $V_k = L[k]\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k))R[k]$ *для любого* $k = 1, \ldots, \ell(V){-}1$.

Доказательство. Для доказательства утверждений 1–3 достаточно показать, что:

> *Если для некоторого $k \geqslant 1$ слово V_k почти сильно бескубно, $|V_k| > 2$ и $V_k \notin \mathcal{S}_1$, то $k < \ell(V)$, $V_k = L[k]\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k))R[k]$ и слово V_{k+1} сильно бескубно.*

Рассмотрим k-ую итерацию процедуры Ancestor, на которой обрабатывается слово V_k. По условию, $|V_k| > 2$ и $V_k \notin \mathcal{S}_1$, поэтому процедура Ancestor не может прекратить работу на шаге 2. Так как слово $\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)$ регулярно в силу предложения 2.3.1, процедура Ancestor не может завершить работу и на шаге 4, следовательно, $k < \ell(V)$. Поскольку операция r_T отрезает от каждого нерегулярного хвоста почти сильно бескубного слова в точности по одной букве, а слово $\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)$ регулярно, равенство $V_k = L[k]\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k))R[k]$ очевидно. Наконец, слово $V_{k+1} = \mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\eta(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k))))$ сильно бескубно ввиду леммы 2.4.3. □

Применим теперь процедуру Ancestor к паре эквивалентных слов.

Лемма 2.6.2. *Пусть $U \sim V$, и $\{U_k\}_{k=1}^{\ell(U)}$, $\{V_k\}_{k=0}^{\ell(V)}$ — главные ряды слов U и V соответственно. Предположим, что выполняется следующее условие:*

$$(**)\ \ \mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_k)) \sim \mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)) \Rightarrow \eta(\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_k))) \sim \eta(\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k))) \text{ для всех } k < \min\{\ell(U), \ell(V)\}.$$

Тогда

1) $\ell(U) = \ell(V)$.
2) $U_k \sim V_k$ *для любого* $k = 1, \ldots, \ell(U)$; *в частности,* $\mathrm{Anc}(U) \sim \mathrm{Anc}(V)$.
3) $L_U = L_V$, $R_U = R_V$, $h_U = h_V$ *и* $t_U = t_V$.

Доказательство. Мы докажем более общее утверждение, из которого будут следовать все заключения леммы:

Если для некоторого $k \leqslant \min\{\ell(U),\ell(V)\}$ *выполняется* $U_k \sim V_k$, *то* $L_U[k] = L_V[k]$, $R_U[k] = R_V[k]$, $h_U[k] = h_V[k]$, $t_U[k] = t_V[k]$. *Кроме того, либо* $k = \ell(U) = \ell(V)$, *либо* $k < \min\{\ell(U),\ell(V)\}$ *и* $U_{k+1} \sim V_{k+1}$.

Без ограничения общности, пусть $\ell(U) \leqslant \ell(V)$. Предположим сначала, что $k = \ell(V)$. Ввиду неравенства $k \leqslant \ell(U) \leqslant \ell(V)$, мы заключаем, что $k = \ell(U) = \ell(V)$. Ясно, что если с одним из слов U_k или V_k процедура Ancestor завершает работу на шаге 2, то и со вторым словом процедура Ancestor завершает работу на шаге 2, при этом

$$L_U[k] = R_U[k] = h_U[k] = t_U[k] = \lambda \text{ и } L_V[k] = R_V[k] = h_V[k] = t_V[k] = \lambda \ .$$

В противном случае процедура Ancestor завершит работу с каждым из слов U_k и V_k на шаге 4, и мы имеем $h_U[k] = t_U[k] = h_V[k] = t_V[k] = \lambda$ и, по предложению 2.3.2 (1), $L_U[k] = L_V[k]$ и $R_U[k] = R_V[k]$.

Предположим теперь, что $k < \ell(V)$. Тогда $V_k \notin [112112211211] \cup [221221122122]$, $|V_k| > 2$ и слово $\mathsf{r_T}(V_k)$ является $\widetilde{AB}$-целым и не имеет нередуцируемых хвостов. Из эквивалентности слов U_k и V_k следует, что $U_k \notin [112112211211] \cup [221221122122]$. Кроме того, поскольку слово V_k является $\mathsf{r_1}$-редуцированным и его длина больше двух, V_k не принадлежит ни одному из следующих классов: $[1]_{\mathsf{r_1}} = 1$, $[2]_{\mathsf{r_1}} = 2$, $[12]_{\mathsf{r_1}} = 12$, $[21]_{\mathsf{r_1}} = 21$, $[11]_{\mathsf{r_1}} = 11$ и $[22]_{\mathsf{r_1}} = 22$. Так как $U_k \sim V_k$, эти классы не содержат и $\mathsf{r_1}$-редуцированное слово U_k, поэтому $|U_k| > 2$.

Далее, по предложению 2.3.2, мы имеем $L_U[k] = L_V[k]$, $R_U[k] = R_V[k]$ и $\mathsf{r_T}(U_k) \sim \mathsf{r_T}(V_k)$. Согласно лемме 2.2.1 и предложению 1.2.3, слово $\mathsf{r_T}(U_k)$, как и слово $\mathsf{r_T}(V_k)$, является $\widetilde{AB}$-целым и не имеет нередуцируемых хвостов. Таким образом, процедура Ancestor не может завершить работу на слове U_k, следовательно, $k < \ell(U)$. В силу предложения 2.2.1, мы получаем

$$\mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k)) \sim \mathsf{r_T}(U_k) \sim \mathsf{r_T}(V_k) \sim \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(V_k)) \ .$$

Предложение 2.4.1 дает нам $h_U[k] = h_V[k]$ и $t_U[k] = t_V[k]$. Наконец, ввиду условия $(**)$, из предложения 1.2.4 следует, что $\theta^{-1}(\eta(\mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k)))) \sim \theta^{-1}(\eta(\mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k))))$, откуда мы окончательно получаем $U_{k+1} \sim V_{k+1}$, что и требовалось доказать. □

Как видно из доказательства леммы 2.6.2, условие $(**)$ фактически приводит к тому, что все пары $(\mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k)), \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(V_k)))$ при $k \leqslant \min\{\ell(U),\ell(V)\}$ оказываются хорошими, хотя в условии об эквивалентности слов $\mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k))$ и $\mathsf{r}(\mathsf{r_T}(V_k))$ ничего не говорится. В связи с этим, пары неэквивалентных регулярных слов мы также будем иногда называть хорошими, поскольку в наших построениях важен факт сохранения (или несохранения) функцией η отношения эквивалентности, то есть по сути, выполнение (или, соотв., невыполнение) импликации $U \sim V \Rightarrow \eta(U) \sim \eta(V)$.

2.6.2 Нормальные ряды

В этом пункте мы рассмотрим конструкцию, которая лежит в основе второго этапа работы алгоритма EqAOF.

Пусть нам дано слово U, выберем произвольное бескубное слово W из класса $[\mathrm{Anc}(U)]$. Следующая последовательность слов называется *нормальным U_W-рядом*, или *W-нормальным рядом слова U*:

$$\widetilde{U}_{\ell(U)} = W, \quad \widetilde{U}_k = L_U[k]h_U[k]\theta(\widetilde{U}_{k+1})t_U[k]R_U[k], \quad k = 1,\dots,\ell(U){-}1 \ .$$

Слово $\widetilde{U}_1$ называется *W-нормальной* (или просто *нормальной*) формой слова U и обозначается через $N_W(U)$. Ясно, что любое слово имеет по крайней мере одну нормальную форму, так как класс $[\mathrm{Anc}(U)]$ содержит хотя бы одно бескубное слово. Однако класс $[\mathrm{Anc}(U)]$ может содержать несколько бескубных слов, а потому слово U может иметь несколько нормальных форм. В связи с этим, выделим два специальных случая. Назовем нормальный U_W-ряд *главным нормальным U-рядом*, если слово W почти сильно бескубно, и назовем *прямым нормальным рядом*, если слово $\mathrm{Anc}(U)$ бескубно и $W = \mathrm{Anc}(U)$. В этих случаях W-нормальную форму мы называем *главной* или, соответственно, *прямой* и обозначаем через $N(U)$ или, соответственно, $N^D(U)$. Очевидно, произвольное слово U может иметь не более одной прямой нормальной формы. Ввиду теоремы 2.1, слово U также не может иметь и более одной главной нормальной формы.

Установим основное свойство нормальных рядов и форм.

Лемма 2.6.3. *Пусть $U \in \Sigma^+$, $W \sim \mathrm{Anc}(U)$, слово W является бескубным, и $\{U_k\}_{k=1}^{\ell(U)}$, $\{\widetilde{U}_k\}_{k=1}^{\ell(U)}$ — главный и W-нормальный ряды слова U соответственно. Тогда $\widetilde{U}_k \sim U_k$ для любого $k = 1,\dots,\ell(U)$.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по $k = \ell(U),\dots,1$ (в нисходящем порядке). При $k = \ell(U)$, мы имеем

$$\widetilde{U}_{\ell(U)} = W \sim \mathrm{Anc}(U) = U_{\ell(U)}$$

по определению. Предположим теперь, что $\widetilde{U}_{k+1} \sim U_{k+1}$ для некоторого $k < \ell(U)$, и покажем, что $\widetilde{U}_k \sim U_k$. Соотношение

$$\widetilde{U}_{k+1} \sim U_{k+1} = \mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\eta(\mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k)))))$$

немедленно влечет $\widetilde{U}_{k+1} \sim \theta^{-1}(\eta(\mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k))))$ и $h[k]\theta(\widetilde{U}_{k+1})t[k] \sim \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k))$. Поскольку процедура Ancestor не прекращает работу на k-ой итерации, слово $\mathsf{r_T}(U_k)$ является $\widetilde{AB}$-целым и не имеет нередуцируемых хвостов. Следовательно,

$$\mathsf{r_T}(U_k) \sim \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k)) \sim h[k]\theta(\widetilde{U}_{k+1})t[k]$$

по предложению 2.2.1. Легко заметить, что если слово U_k имеет нерегулярный хвост, то слово $L[k]\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_k)R[k]$ имеет нерегулярный хвост того же типа. Ввиду того, что все однотипные нерегулярные хвосты по определению эквивалентны, мы заключаем, что слова $L[k]\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_k)R[k]$ и U_k эквивалентны, откуда

$$\widetilde{U}_k = L[k]h[k]\theta(\widetilde{U}_{k+1})t[k]R[k] \sim L[k]\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_k)R[k] \sim U_k,$$

что и требовалось доказать. □

Таким образом, нормальные ряды в некотором смысле инвертируют главные ряды, а именно: согласно лемме 2.6.3, если бескубное слово W эквивалентно слову $\mathrm{Anc}(U)$, то W-нормальный ряд слова U позволяет восстановить главный U-ряд с точностью до эквивалентных слов. Более того, слова-члены U_W-нормального ряда, как правило, имеют более простую структуру, чем соответствующие им эквивалентные члены главного ряда. Следующая лемма описывает структуру слов произвольного нормального ряда.

Лемма 2.6.4. *Пусть $W \sim \mathrm{Anc}(U)$ для некоторых $U, W \in \Sigma^+$, слово W является бескубным и $\{\widetilde{U}_k\}_{k=0}^{\ell(U)}$ — W-нормальный ряд слова U. Тогда*

1) *Слова $\widetilde{U}_k$ являются r_1-редуцированными для всех $k = 1, \ldots, \ell(U)$.*
2) *Слово $\mathsf{r}_\mathsf{T}(\widetilde{U}_k)$ регулярно для любого $k = 1, \ldots, \ell(U){-}1$.*
3) $\mathsf{r}_\mathsf{T}(\widetilde{U}_k) = h[k]\theta(\widetilde{U}_{k+1})t[k], k = 1, \ldots, \ell(U){-}1$.
4) $h(\mathsf{r}_\mathsf{T}(\widetilde{U}_k)) = h[k]$, $t(\mathsf{r}_\mathsf{T}(\widetilde{U}_k)) = t[k]$ *и* $\eta(\mathsf{r}_\mathsf{T}(\widetilde{U}_k)) = \theta(\widetilde{U}_{k+1})$ *для любого* $k = 1, \ldots, \ell(U){-}1$.

Доказательство. Для $k = \ell(U)$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что $k < \ell(U)$. Положим $\widetilde{U}'_k = h[k]\theta(\widetilde{U}_{k+1})t[k]$, и пусть $\{U_i\}_{i=1}^{\ell(U)}$ — главный ряд слова U. В силу леммы 2.4.1 (2), слово $\widetilde{U}'_k$ регулярно. Так как

$$\widetilde{U}_{k+1} \sim U_{k+1} \sim \theta^{-1}(\eta(\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_k))))$$

по лемме 2.6.3, мы имеем $\widetilde{U}'_k \sim \mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_k))$, откуда, по предложению 2.4.1, получаем $h(\widetilde{U}'_k) = h[k]$, $t(\widetilde{U}'_k) = t[k]$ и $\eta(\widetilde{U}'_k) = \theta(\widetilde{U}_{k+1})$.

Осталось доказать, что слово $\widetilde{U}_k$ является r_1-редуцированным и $\mathsf{r}_\mathsf{T}(\widetilde{U}_k) = \widetilde{U}'_k$. Рассмотрим слово $\widetilde{U}_k = L[k]\widetilde{U}'_k R[k]$. Применим сначала к его префиксу $L[k]\widetilde{U}'_k$ функцию $\mathsf{r}^{\mathsf{l}}_\mathsf{T}$. Ясно, что если $L[k] = \lambda$, то слово $L[k]\widetilde{U}'_k$ является r_1-редуцированным и $\mathsf{r}^{\mathsf{l}}_\mathsf{T}(L[k]\widetilde{U}'_k) = \widetilde{U}'_k$. Предположим, что $L[k] \neq \lambda$. Без ограничения общности, пусть $L[k] = 1$. Это означает, что слово U_k имеет нерегулярный хвост $(112)^l(112)^2 21$ для некоторого $l \geqslant 0$. Следовательно, слово $\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_k))$ имеет префикс 1211221, поэтому и слово $\widetilde{U}'_k$, эквивалентное слову $\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_k))$, имеет префикс 1211221 ввиду наблюдения 1.2.5. Тогда слово $L[k]\widetilde{U}'_k$ не начинается с 111, и, значит, является r_1-редуцированным; более того, слово $L[k]\widetilde{U}'_k$ имеет левый 1-хвост, и $\mathsf{r}^{\mathsf{l}}_\mathsf{T}(L[k]\widetilde{U}'_k) = \widetilde{U}'_k$.

Аналогично показывается, что слово $\widetilde{U}'_k R[k]$ является r_1-редуцированным и имеет место равенство $\mathsf{r}^{\mathsf{r}}_{\mathsf{T}}(\widetilde{U}'_k R[k]) = \widetilde{U}'_k$. Объединяя полученные результаты, мы заключаем, что слово $\widetilde{U}_k = L[k]\widetilde{U}'_k R[k]$ также является r_1-редуцированным и

$$\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(\widetilde{U}_k) = \mathsf{r}^{\mathsf{r}}_{\mathsf{T}}(\mathsf{r}^{\mathsf{l}}_{\mathsf{T}}(L[k]\widetilde{U}'_k R[k])) = \mathsf{r}^{\mathsf{r}}_{\mathsf{T}}(\widetilde{U}'_k R[k]) = \widetilde{U}'_k,$$

что завершает доказательство леммы. □

Таким образом, применив процедуру Ancestor к слову U, а затем построив нормальный U_W-ряд для некоторого бескубного слова $W \in [\mathrm{Anc}(U)]$, мы получим нормальную форму $N_W(U)$, которая в общем случае имеет более простую структуру, чем слово U. Возникает вопрос: насколько упростится структура слова U при повторном применении описанной последовательности действий? Ответ на него содержится в следующей лемме.

Лемма 2.6.5. *Пусть $W \sim \mathrm{Anc}(U)$, где $U, W \in \Sigma^+$ и слово W бескубно. Тогда и главный, и W-нормальный ряды слова $N_W(U)$ совпадают с W-нормальным рядом слова U.*

Доказательство. Положим $P = N_W(U)$, $m = \ell(U)$, $l = \ell(P)$, и пусть $\{U_k\}_{k=1}^m$, $\{\widetilde{U}_k\}_{k=1}^m$ и $\{P_k\}_{k=1}^l$ — соответственно, главный U-ряд, U_W-нормальный ряд и главный P-ряд. Сначала индукцией по $k = 1, \dots, m$ докажем, что $P_k = \widetilde{U}_k$. База индукции очевидна: по лемме 2.6.4, слово P является r_1-редуцированным, поэтому $P_1 = P = N_W(U) = \widetilde{U}_1$.

Теперь предположим, что $P_k = \widetilde{U}_k$ для некоторого $k < m$, и покажем, что выполняется $k < l$ и $P_{k+1} = \widetilde{U}_{k+1}$. По построению процедуры Ancestor, мы имеем $U_k \notin [112112221221]$, $U \notin \cup[221221122122]$, $|U_k| > 2$, и слово $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(U_k)$ является $\widetilde{AB}$-целым и не имеет нередуцируемых хвостов. Поскольку слово P_k является r_1-редуцированным и $P_k = \widetilde{U}_k \sim U_k$, слово P_k также не лежит ни в одном из классов $[112112221221]$ и $[221221122122]$ и длина P_k больше двух. Кроме того, слово $\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(P_k) = \mathsf{r}_{\mathsf{T}}(\widetilde{U}_k)$ регулярно согласно лемме 2.6.4. Следовательно, процедура Ancestor не останавливается на слове P_k, то есть $k < l$, и мы имеем $\mathsf{r}(\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(P_k)) = \mathsf{r}_{\mathsf{T}}(\widetilde{U}_k)$. Наконец, по лемме 2.6.4, мы получаем

$$P_{k+1} = \mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\eta(\mathsf{r}(\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(P_k))))) = \mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\eta(\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(\widetilde{U}_k)))) = \mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\theta(\widetilde{U}_{k+1}))) = \mathsf{r}_1(\widetilde{U}_{k+1}) = \widetilde{U}_{k+1},$$

что и требовалось показать.

Итак, мы доказали, что $m \leqslant l$ и $\widetilde{U}_k = P_k$ для любого $k = 1, \dots, m$. Применяя леммы 2.6.2–2.6.4 к словам U и P, мы заключаем, что $l = m$, $L_U = L_P$, $R_U = R_P$, $h_U = h_P$ и $t_U = t_P$. Эти равенства приводят к тому, что и главный P-ряд, и нормальный P_W-ряд совпадают с нормальным U_W-рядом. (см. определение нормальных рядов). □

В частности, из леммы 2.6.5 следует, что $N_W(N_W(U)) = N_W(U)$ для любого слова U и любого бескубного слова $W \in [\mathrm{Anc}(U)]$. Таким образом, применение процедуры Ancestor к слову $N_W(U)$, построение главного и нормального $N_W(U)$-рядов не приводит к дальнейшему упрощению, оставляя слово $N_W(U)$ неизменным.

Наконец, изучим главные нормальные ряды для почти сильно бескубных слов.

Лемма 2.6.6. *Если слово U почти сильно бескубно и $U \notin \{111, 222\}$, то главный U-ряд является также главным (а также прямым) нормальным рядом слова U; в частности, $N(U) = U$.*

Доказательство. Пусть $\{U_k\}_{k=1}^{\ell(U)}$ и $\{\widetilde{U}_k\}_{k=1}^{\ell(U)}$ — соответственно, главный U-ряд и прямой нормальный U-ряд. Докажем лемму нисходящей индукцией по $k = \ell(U), \ldots, 1$. База индукции ($k = \ell(U)$) очевидна ввиду того, что $\widetilde{U}_{\ell(U)} = \mathrm{Anc}(U) = U_{\ell(U)}$ по определению прямого нормального ряда. Заметим, что слово $\mathrm{Anc}(U)$ почти сильно бескубно в силу леммы 2.6.1, поэтому прямой нормальный ряд слова U является также и главным нормальным U-рядом.

Теперь предположим, что $\widetilde{U}_k = U_k$ для некоторого $k > 1$. Покажем, что $\widetilde{U}_{k-1} = U_{k-1}$. Положим $U'_k = \eta(\mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_{k-1})))$. Заметим, что слово $\theta^{-1}(U'_k)$ является r_1-редуцированным. Действительно, если $111 \leqslant \theta^{-1}(U'_k)$ (или $222 \leqslant \theta^{-1}(U'_k)$), то $121212 \leqslant U'_k$ (или, соотв., $212121 \leqslant U'_k$), что невозможно, поскольку $U'_k \leqslant U_{k-1}$ и слово U_{k-1} является почти сильно бескубным по лемме 2.6.1. Следовательно, $U_k = \theta^{-1}(U'_k)$, и мы получаем

$$\begin{aligned} U_{k-1} &= L[k-1]\mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_{k-1}))R[k-1] \quad \text{(по лемме 2.6.1 (3))} \\ &= L[k-1]\, h[k-1]U'_k\, t[k-1]R[k-1] \\ &= L[k-1]\, h[k-1]\theta(U_k)\, t[k-1]R[k-1] \\ &= L[k-1]\, h[k-1]\theta(\widetilde{U}_k)\, t[k-1]R[k-1] = \widetilde{U}_{k-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Леммы 2.6.1, 2.6.2 и 2.6.6 служат основой для построения алгоритма EqAOF, позволяя находить почти сильно бескубное слово в произвольном классе $[U]$, а именно:

($*\!*\!*$) *Если слово U эквивалентно почти сильно бескубному слову $V \notin \{111, 222\}$ и для главных U- и V-рядов выполняется условие ($**$), то $V = N(U)$.*

Действительно, из леммы 2.6.2 следует, что $\mathrm{Anc}(U) \sim \mathrm{Anc}(V)$, $L_U = L_V$, $R_U = R_V$, $h_U = h_V$ и $t_U = t_V$. Согласно лемме 2.6.1, слово $\mathrm{Anc}(V)$ сильно бескубно (если $\ell(V) > 1$) или $\mathrm{Anc}(V) = V$ и $V \notin \{111, 222\}$ (если $\ell(V) = 1$). Мы видим, что в любом случае слово $\mathrm{Anc}(V)$ является бескубным, и $\mathrm{Anc}(V)$-нормальные ряды слов U и V совпадают. Ввиду леммы 2.6.6, этот ряд, в свою очередь, совпадает с главным рядом слова V и, в частности, $N(U) = N(V) = V$.

«Слабым местом» утверждения ($*\!*\!*$), существенно ограничивающим область его применения, является условие ($**$): прежде, чем использовать ($*\!*\!*$), необходимо проверить выполнимость условия ($**$) для пары слов U и V при том, что слово V нам заранее неизвестно — именно его мы и пытаемся найти. Поэтому хотелось бы исключить столь сильное предположение ($**$) и доказать утверждение ($*\!*\!*$) в более простой форме.

В связи с этим уместно обсудить следующий вопрос: почему для построения алгоритма EqAOF мы используем функцию η, а не функцию ξ? Казалось бы, замена η на ξ в процедуре Ancestor должна решить возникшую проблему, так как условие $(**)$ после такой замены переформулируется следующим образом:

$$\mathsf{r}(\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(U_k)) \sim \mathsf{r}(\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(V_k)) \Rightarrow \xi(\mathsf{r}(\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(U_k))) \sim \xi(\mathsf{r}(\mathsf{r}_{\mathsf{T}}(V_k))) \text{ для всех } k < \min\{\ell(U), \ell(V)\},$$

и, очевидно, всегда выполняется. Легко проверить, что, с незначительными изменениями, леммы 2.6.1 и 2.6.2 остаются в силе.

Трудности, однако, возникают при переходе от главных рядов к нормальным. Как уже отмечалось выше, процесс построения нормальных рядов в некотором смысле является обратным к процедуре Ancestor: при построении нормального U-ряда мы в обратном порядке восстанавливаем все преобразования, которые применялись процедурой Ancestor, за исключением тех преобразований, которые сохраняют класс эквивалентности (то есть переводят слово в ему эквивалентное). Таким образом, при замене функции η на ξ мы должны внести соответствующие изменения и в определение нормальных рядов: так как теперь процедура Ancestor будет на каждом шаге приписывать символы $h[k]$ и $t[k]$, при построении нормального ряда $\{\widetilde{U}_k\}_{k=1}^{\ell(U)}$ каждый член $\widetilde{U}_k$ $(k < \ell(U))$ будет получаться из $\widetilde{U}_{k+1}$ путем стирания символов $h[k]$ и $t[k]$.

Использование определенных таким образом нормальных рядов приводит нас к серьезным проблемам. Так, следующий пример показывает, что лемма 2.6.6 справедлива уже не для всех почти сильно бескубных слов.

Пример 2.6.1. *Пусть $U = 12121$. Легко проверить, что $\ell(U) = 2$ и главный ряд слова U есть*

$$U_1 = 12121, \quad U_2 = \mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\xi(12121))) = 11$$

(в предположении, что мы используем ξ вместо η). Мы также имеем $L[1] = R[1] = h[1] = \lambda$ и $t[1] = 2$. Теперь построим главный (он же прямой) нормальный ряд слова U:

$$\widetilde{U}_2 = 11, \quad \widetilde{U}_1 = L[1](h[1]^{-1}\theta(11)t[1]^{-1})R[1] = 121\ .$$

Мы видим, что главный ряд и главный нормальный ряд почти сильно бескубного слова U не совпадают.

Такая ситуация возникает в случае, когда слово $\mathrm{Anc}(U)$ попадает в один из классов [11] или [22], каждый из которых содержит по два почти сильно бескубных слова. Данную проблему еще можно решить, разрешив в этом случае строить главные нормальные ряды как от слова 11 (или 22), так и от слова 111 (или, соотв., 222), жертвуя единственностью главной нормальной формы.

Главная проблема, связанная с использованием функции ξ, заключается в том, что перестает выполняться основное свойство нормальных рядов (лемма 2.6.3). Это означает, что даже если мы построим нормальную форму $N(U)$ и слово $N(U)$ окажется почти сильно бескубным, мы не можем утверждать, что $N(U) \sim U$.

Пример 2.6.2. *Пусть* $U = 212122$. *Применим к слову* U *процедуру Ancestor (при условии, что мы используем функцию* ξ*):*

$$U_1 = 212122, \quad U_2 = \mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\xi(212122))) = 112, \quad U_3 = \mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\xi(112))) = 21 \ .$$

Таким образом, $\ell(U) = 3$, *и мы имеем* $L[1] = L[2] = L[3] = R[1] = R[2] = R[3] = h[3] = t[3] = \lambda$, $h[1] = 1$, $h[2] = 2$, $t[1] = 1$ *и* $t[2] = \lambda$. *Теперь построим главный (он же прямой) нормальный ряд слова* U*:*

$$\widetilde{U}_3 = 21, \quad \widetilde{U}_2 = L[2](h[2]^{-1}\theta(21)t[2]^{-1})R[2] = 112, \quad \widetilde{U}_1 = L[1](h[1]^{-1}\theta(112)t[1]^{-1})R[1] = 2122 \ .$$

Мы видим, что слово $N(U)$ *почти сильно бескубно (и даже сильно бескубно), но при этом* $2122 \not\sim U$; *более того, класс* $[212122] = (21)^2(21)^*22$ *не содержит почти сильно бескубных слов.*

Итак, мы имеем две функции: ξ и η. При использовании первой из них, леммы 2.6.1, 2.6.2 и 2.6.6 обеспечивают необходимое условие существования в произвольном классе $[U]$ почти сильно бескубного слова: *такое слово существует только тогда, когда слово* $N(U)$ *почти сильно бескубно*; при этом мы жертвуем леммой 2.6.3. Использование η, наоборот, ограничивает необходимое, но зато дает нам достаточное условие (лемма 2.6.3): *если слово* $N(U)$ *почти сильно бескубно, класс* $[U]$ *содержит почти сильно бескубное слово* $N(U)$. В данной ситуации выбор функции η более предпочтителен, поскольку любое необходимое условие доказывается в предположении, что почти сильно бескубное слово, эквивалентное слову U, существует. Это достаточно сильное предположение, благодаря которому, в частности, мы сможем обойти условие $(**)$ при использовании функции η и доказать лемму 2.6.9, являющуюся аналогом леммы 2.6.2 для случая, когда $(**)$ не выполняется. При получении достаточных условий мы не располагаем никакими дополнительными предположениями, а потому для нас важнее сохранить лемму 2.6.3.

2.6.3 Обработка плохих пар

Изучение плохих пар мы начнем с рассмотрения плохой пары соседних слов. Согласно лемме 2.4.2, любая такая пара имеет вид (YY, YYY), где $Y \in \Sigma^+$. Выполнив для слов YY и YYY первую итерацию процедуры Ancestor, мы получим слова:

$$\theta^{-1}(\eta(YY)) = \theta^{-1}(\eta(Y)t(Y)h(Y)\eta(Y)) = \theta^{-1}(\eta(Y))t(Y)\theta^{-1}(\eta(Y))$$

и

$$\begin{aligned}\theta^{-1}(\eta(YYY)) = \theta^{-1}(\eta(Y)t(Y)h(Y)\eta(Y)t(Y)h(Y)\eta(Y))& \\ = \theta^{-1}(\eta(Y))t(Y)\theta^{-1}(\eta(Y))t(Y)\theta^{-1}(\eta(Y))& \ .\end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к паре слов вида $(XcX, XcXcX)$ (для некоторых $X \in \Sigma^+$ и $c \in \Sigma$) такой, что $XcX \not\sim XcXcX$. Для того, чтобы проследить за выполнением последующих итераций процедуры Ancestor, нам необходимо установить ряд полезных свойств таких пар.

Лемма 2.6.7. *Пусть $XcX \not\sim XcXcX$ для некоторого слова $X \in \Sigma^+$ и буквы $c \in \Sigma$. Тогда*

1) $\mathsf{r}_1(XcX) = \mathsf{r}_1(X)c\mathsf{r}_1(X)$, $\quad \mathsf{r}_1(XcXcX) = \mathsf{r}_1(X)c\mathsf{r}_1(X)c\mathsf{r}_1(X)$.

Дополнительно предположим, что слова XcX и $XcXcX$ являются r_1-редуцированными. Тогда

2) *Если $X \neq \overline{cc}$, то $XcX, XcXcX \notin [W]_{\mathsf{r}_1}$ ни для какого слова $W \in \mathcal{S}_1$.*

3) *Если хотя бы одно из слов XcX и $XcXcX$ буквочередующееся, то $X = \overline{c}$.*

4) *Если одно из слов XcX и $XcXcX$ имеет нерегулярный хвост, то и второе слово имеет такой же нерегулярный хвост.*

5) *Если одно из слов XcX и $XcXcX$ имеет нередуцируемый хвост, то и второе слово имеет такой же нередуцируемый хвост.*

6) *Если слово $XcXcX$ является $\widetilde{A}$-целым ($\widetilde{B}$-целым), то и оба слова X и XcX являются $\widetilde{A}$-целыми (соотв., $\widetilde{B}$-целыми); если $X \notin \{12, 21\}$ и слово XcX является $\widetilde{A}$-целым ($\widetilde{B}$-целым), то оба слова X и $XcXcX$ также являются $\widetilde{A}$-целыми (соотв., $\widetilde{B}$-целыми).*

7) *Если слова XcX и $XcXcX$ являются $\widetilde{AB}$-целыми и не имеют нередуцируемых хвостов, то $\mathsf{r}(XcX) = \mathsf{r}(X)c\mathsf{r}(X)$ и $\mathsf{r}(XcXcX) = \mathsf{r}(X)c\mathsf{r}(X)c\mathsf{r}(X)$.*

8) *Если слова XcX и $XcXcX$ регулярны, то длина слова X нечетна, $h(XcX) = h(XcXcX) = h(X)$ и $t(XcX) = t(XcXcX) = t(X)$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно: ни одно из подслов

$$X[|X|-1\dots|X|]c, \quad X[|X|]cX[1], \quad cX[1\dots2]$$

слова XcX не может совпадать с 111 или 222, так как иначе мы бы имели

$$XcXcX \sim XXX \sim XX \sim XcX,$$

поэтому подслова 111 и 222 могут входить в XcX и $XcXcX$ только внутри X. В дальнейшем мы будем считать, что слова XcX и $XcXcX$ уже r_1-редуцированы.

Предположим, что одно из слов XcX и $XcXcX$ (обозначим его через V) эквивалентно почти сильно бескубному слову $W \in \mathcal{S}_1$. Заметим, что слово Vc является или квадратом, или кубом некоторого слова. Используя леммы 2.3.1 и 2.3.3, нетрудно проверить, что такое возможно только, когда $V \in [22122]_{\mathsf{r}_1} \cup [221221122122]_{\mathsf{r}_1}$ (если $c = 1$) или $V \in [11211]_{\mathsf{r}_1} \cup [112112211211]_{\mathsf{r}_1}$ (если $c = 2$). Условие $X \neq \overline{cc}$ исключает варианты $V \in [22122]_{\mathsf{r}_1} \cup [11211]_{\mathsf{r}_1}$, таким образом, с точностью до инвертирования букв, остается рассмотреть только случай $c = 1$ и $V \in [221221122122]_{\mathsf{r}_1}$.

Ввиду леммы 2.3.3, слово V имеет вид $(221)^*(221)^2(1(221)^*221)^*(122)^2(122)^*$. В частности, слово X начинается и заканчивается подсловом 22, поэтому подслово 11 входит в V только внутри подслова X. Несложно убедиться, что слово X имеет вид

$$(221)^*(221)^2(1(221)^*221)^*122(122)^*$$

как префикс слова V и одновременно имеет вид

$$(221)^*221(1(221)^*221)^*(122)^2(122)^*$$

как суффикс слова V. Объединяя эти два представления для слова X, мы заключаем, что X имеет вид

$$(221)^*(221)^2(1(221)^*221)^*(122)^2(122)^* \ .$$

Но тогда все три слова X, XcX и $XcXcX$ лежат в классе $[221221122122]_{\mathsf{r}_1}$, что противоречит условию $XcX \not\sim XcXcX$. Полученное противоречие доказывает утверждение 2.

Легко видеть, что слово $XcXcX$ (или XcX) является буквочередующимся тогда и только тогда, когда X — буквочередующееся слово нечетной длины. Отсюда, принимая во внимание, что $XcX \not\sim XcXcX$, мы немедленно получаем утверждение 3 леммы.

Ясно, что любой хвост слова XcX (первого или второго рода) является также хвостом слова $XcXcX$. Пусть T — хвост слова $XcXcX$. Без ограничения общности будем считать, что T — левый 1-хвост (остальные случаи симметричны относительно инвертирования и прочтения слов справа налево). Покажем, что T является префиксом слова XcX. Предположим, что это не так, и слово XcX является собственным префиксом хвоста T. Рассмотрим все возможные случаи в зависимости от типа хвоста T.

Если $T = (112)^{2+l}21$ для некоторого $l \geqslant 0$, то слово X начинается с 11 и, следовательно, слово $Xc11$ является префиксом хвоста T. Легко видеть, что в этом случае $X = (112)^{l_1}11$ для некоторого $l_1 \geqslant 0$, и оба слова XcX и $XcXcX$ не имеют хвостов. Таким образом, этот случай невозможен.

Теперь предположим, что T — хвост второго рода, то есть $T = (121)^{l_1}(12)^{l_2}11$ для некоторых $l_1 \geqslant 1$ и $l_2 \geqslant 2$. Тогда X начинается с подслова 1211, в частности, слово X не является буквочередующимся. Следовательно, слово Xc является собственным префиксом слова $(121)^{l_1}$, так как в противном случае суффикс X слова XcX целиком содержался бы в буквочередующемся подслове $(12)^{l_2}1$ хвоста T. Нетрудно проверить, что $X = (121)^k12$, где $k \geqslant 1$, и оба слова XcX и $XcXcX$ не имеют хвостов. Полученное противоречие завершает доказательство утверждений 4–5.

Доказательство утверждения 6 мы разобьем на два этапа. Сначала сделаем одно полезное наблюдение:

Если слово P одновременно является и префиксом, и суффиксом $\widetilde{A}$-целого ($\widetilde{B}$-целого) слова Q, то слово P также является $\widetilde{A}$-целым (соотв., $\widetilde{B}$-целым).

В самом деле, пусть Q — $\widetilde{A}$-целое слово, и $P = S1(12)^l 11T$ для некоторых слов $S, T \in \Sigma^*$ и целого числа $l \geqslant 1$. Так как слово P является и префиксом, и суффиксом $\widetilde{A}$-целого слова Q, мы имеем $S = S'12$ и $T = 21T'$ для некоторых слов $S', T' \in \Sigma^*$. Следовательно, любое слово из языка $1\widetilde{A}1$ встречается в P только внутри подслова $121\widetilde{A}121$, что и требовалось доказать. Двойственным образом рассматривается случай, когда слово Q — $\widetilde{B}$-целое.

Осталось показать, что любое слово из языка $1\widetilde{A}1 \cup 2\widetilde{B}2$ может входить в слово $XcXcX$ только внутри префикса или суффикса XcX. Предположим, что это не так. Тогда существует подслово $S \in 1\widetilde{A}1 \cup 2\widetilde{B}2$ слова $XcXcX$, накрывающее подслово cXc, то есть $cXc \leqslant S$. Мы видим, что X — буквочередующееся слово. Ясно, что если длина X нечетна, то слово $XcXcX$ также оказывается буквочередующимся, что невозможно так как $S \leqslant XcXcX$. Следовательно, $X = (12)^l$ или $X = (21)^l$ для некоторого $l \geqslant 1$. Условие $X \notin \{12, 21\}$ влечет $l > 1$. Заметим, что слово $XcXcX$ в этом случае удовлетворяет условиям предложения 2.2.1, в результате мы получаем $XcXcX \sim \mathsf{r}(XcXcX) = XcX$, что противоречит условию леммы. Тем самым, утверждение 6 полностью доказано.

Приступим к доказательству утверждения 7. Поскольку слова $12c12c12$ и $21c21c21$ не являются $\widetilde{AB}$-целыми ни при каком $c \in \Sigma$, мы заключаем, что $X \notin \{12, 21\}$. Как мы только что показали, в этом случае любое слово S из языка $1\widetilde{A}1 \cup 2\widetilde{B}2$ может входить в $XcXcX$ только внутри префикса или суффикса XcX. Докажем, что любое такое слово входит в XcX только внутри префикса или суффикса X. Предположим, что это не выполняется, и пусть $XcX = PQcRS$, где $QcR \in 1\widetilde{A}1 \cup 2\widetilde{B}2$ и $PQ = RS = X$.

Если $Q = \lambda$, то слово QcR начинается с буквы c, поэтому либо $c = 1$ и $QcR \in 1\widetilde{A}1$, либо $c = 2$ и $QcR \in 2\widetilde{B}2$. В любом из этих двух случаев мы видим, что слово R заканчивается на cc. Таким образом, мы имеем $XcX = R'ccScRS$ и $XcXcX = R'ccScRScRS$, где $R' = R[1 \dots |R|{-}2]$. После сокращения $cR \to cc$ мы получаем пару соседних слов $R'ccSccS$ и $R'ccSccSccS$. Следовательно, по предложению 2.2.1,

$$XcX \sim \mathsf{r}(XcX) = \mathsf{r}(R'ccSccS) \sim \mathsf{r}(R'ccSccSccS) = \mathsf{r}(XcXcX) \sim XcXcX,$$

что противоречит условию.

Случай $R = \lambda$ разбирается аналогично. Наконец, предположим, что $Q \neq \lambda$ и $R \neq \lambda$. Пусть $Q = dQ'$ и $R = R'd$, где $Q', R' \in \Sigma^*$. Ясно, что префикс R' и суффикс Q' слова X внутри X не перекрываются, поскольку буквочередующееся слово R' не может иметь подслова $dQ'[1] = dd$. Следовательно, $X = R'TQ'$ для некоторого слова $T \in \Sigma^*$, причем либо $T = \lambda$, либо $T[1] = T[|T|] = d$. Сокращение $dQ'cR'd \to dd$ в словах XcX и $XcXcX$ приводит нас к паре соседних слов U и V:

$$XcX = R'T\underbrace{Q'cR'}TQ' \to R'TTQ' = U,$$

$$XcXcX = R'T\underbrace{Q'cR'}T\underbrace{Q'cR'}TQ' \to R'TTTQ' = V\ \ .$$

Таким образом, по предложению 2.2.1 мы получаем

$$XcX \sim \mathsf{r}(XcX) = \mathsf{r}(U) \sim \mathsf{r}(V) = \mathsf{r}(XcXcX) \sim XcXcX\ \ .$$

Полученное противоречие доказывает, что любое слово из языков $1\widetilde{A}1$ и $2\widetilde{B}2$ может входить в слово XcX только внутри префикса или суффикса X, откуда незамедлительно следует утверждение 7.

Для доказательства утверждения 8 рассмотрим регулярные слова XcX и $XcXcX$ такие, что $XcX \not\sim XcXcX$. Заметим, что слово X также является регулярным. Если X — буквочередующееся слово, то длина X нечетна ввиду того, что слова $(12)^l c(12)^l c(12)^l$ и $(21)^l c(21)^l c(21)^l$ не являются регулярными ни при каком $l \geqslant 1$. В этом случае утверждение 8 непосредственно следует из утверждения 3.

Предположим теперь, что $X[i \dots i{+}1] = dd$ для некоторых $d \in \Sigma$ и $i > 0$. Тогда подслово dd входит в слово XcX в i-ой и $(|Xc| + i)$-ой позициях. Так как слово XcX регулярно, длина X нечетна. Следовательно, все три слова XcX, $XcXcX$ и X имеют нечетную длину. Кроме того, по определению функции η, если i нечетно, то

$$h(XcX) = h(XcXcX) = h(X) = X[1] \text{ и } t(XcX) = t(XcXcX) = t(X) = \lambda,$$

в противном случае

$$h(XcX) = h(XcXcX) = h(X) = \lambda \text{ и } t(XcX) = t(XcXcX) = t(X) = X[|X|]\ .$$

Это завершает доказательство леммы. □

Как видно из леммы 2.6.7, особое внимание следует уделить парам неэквивалентных слов $(XcX, XcXcX)$ с условием $|X| = 2$. Ясно, что для любой такой пары слово XcX является сильно бескубным, причем $[XcX]_{\mathsf{r}_1} = XcX$. Для слова $XcXcX$ возможны следующие варианты:

$$XcXcX \in \{12112112, 12212212, 21121121, 21221221, 22122122, 11211211\} = \mathcal{S}_2.$$

Следующая лемма описывает классы эквивалентности всех слов из множества $\mathcal{S}_2$.

Лемма 2.6.8.

$$\begin{aligned}
&[12112112]_{\mathsf{r}_1} = (121)^*(121)^2 12, && [21221221]_{\mathsf{r}_1} = (212)^*(212)^2 21,\\
&[21121121]_{\mathsf{r}_1} = (211)^*(211)^2 21, && [12212212]_{\mathsf{r}_1} = (122)^*(122)^2 12,\\
&[11211211]_{\mathsf{r}_1} = (112)^*(112)^2 11, && [22122122]_{\mathsf{r}_1} = (221)^*(221)^2 22\ .
\end{aligned}$$

Доказательство. Любое слово вида $(121)^*(121)^2 12$ эквивалентно слову 12112112. Обратно, пусть $W \in [12112112]_{\mathsf{r}_1}$. Тогда $1W \in [(112)^3]_{\mathsf{r}_1} = [112112]_{\mathsf{r}_1}$. По лемме 2.3.1, мы получаем $1W = (112)^l$ для некоторого $l \geqslant 2$, поэтому $W = (121)^{l-1}12$. Поскольку слово 12112 не принадлежит классу $[12112112]_{\mathsf{r}_1}$, мы заключаем, что $l > 2$. Таким образом, слово W имеет вид $(121)^*(121)^2 12$, что и требовалось показать.

Теперь рассмотрим класс $[11211211]_{\mathsf{r}_1}$. Ясно, что все слова вида $(112)^*(112)^2 11$ в нем содержатся. С другой стороны, из условия $W \sim 11211211$ следует $W2 \sim 112112$, откуда $W2 = (112)^l$ для некоторого $l \geqslant 2$ по лемме 2.3.1. Ввиду того, что $11211 \notin [11211211]$, мы имеем $l > 2$ и $W = (112)^{l-3}(112)^2 11$.

Остальные классы симметричны двум рассмотренным с точностью до инвертирования и прочтения слов справа налево. $\square$

Теперь все готово к тому, чтобы применить процедуру Ancestor к произвольной плохой паре слов. Напомним, что мы рассматриваем только те классы эквивалентности, в которых имеется почти сильно бескубное слово, поэтому мы применяем процедуру Ancestor к плохим парам, в которых одно из слов почти сильно бескубно.

Лемма 2.6.9. *Пусть (U,V) — плохая пара, причем слово V — почти сильно бескубно. Тогда существует слово $Y \in \Sigma^+$ такое, что $V = Y^2$, и если $W = Y^3$, то для слов Y, V, W, U и их главных рядов $\{Y_k\}_{k=1}^{\ell(Y)}$, $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$, $\{W_k\}_{k=1}^{\ell(W)}$ и, соответственно, $\{U_k\}_{k=1}^{\ell(U)}$ справедливы следующие утверждения:*

1) $\eta(U) \sim \eta(W)$.

2) $\ell(W) - 1 \leqslant \ell(Y) \leqslant \ell(U) = \ell(W) \leqslant \ell(V) \leqslant \ell(W) + 1$.

3) $U_k \sim W_k \not\sim V_k$ *для любого* $k = 2, \ldots, \ell(W)$.

4) $L_U[k] = L_V[k] = L_W[k] = \lambda$, $R_U[k] = R_V[k] = R_W[k] = \lambda$, $h_U[k] = h_V[k] = h_W[k]$ *и* $t_U[k] = t_V[k] = t_W[k]$ *для всех* $k < \ell(W)$;

$L_Y[k] = R_Y[k] = \lambda$, $h_Y[k] = h_W[k]$ *и* $t_Y[k] = t_W[k]$ *для всех* $k < \ell(Y)$.

5) *Слова* Y_k, V_k *и* W_k *регулярны для любого* $k = 1, \ldots, \ell(W) - 1$.

6) *существует последовательность букв* c_k, $k = 2, \ldots, \ell(W)$, *такая, что* $V_k = Y_k c_k Y_k$ *и* $W_k = Y_k c_k Y_k c_k Y_k$ *для любого* $k = 2, \ldots, \ell(W)$ *(если* $\ell(Y) < \ell(W)$, *положим* $Y_{\ell(W)} = \lambda$*).*

7) $\mathrm{Anc}(Y) \in \{12, 21, 11, 22, 1, 2\}$.

Доказательство. Напомним, что, по определению плохих пар, слова U и V регулярны. По предложению 2.2.2, множество всех r-связующих (V,U)-цепочек не пусто. Для каждой цепочки $\{R_i\}_{i=0}^n$ из этого множества положим

$$\beta(\{R_i\}_{i=0}^n) = \mathrm{Card}(\{i \mid \text{ пара } (R_{i-1}, R_i) \text{ плохая}, \ 1 \leqslant i \leqslant n\})$$

и

$$\gamma(\{R_i\}_{i=0}^n) = \min\{i \mid \text{ пара } (R_{i-1}, R_i) \text{ плохая}\} \ .$$

Заметим, что число $\gamma(\{R_i\}_{i=0}^n)$ всегда определено, поскольку пара (U,V) плохая и, следовательно, $\beta(\{R_i\}_{i=0}^n) \geqslant 1$.

Среди всех r-связующих (V,U)-цепочек выберем такую последовательность $\{R_i\}_{i=0}^n$, для которой пара $(\beta(\{R_i\}_{i=0}^n), \gamma(\{R_i\}_{i=0}^n))$ лексикографически минимальна. Доказательство леммы разобьем на четыре этапа. Этапы 1–3 посвящены доказательству того, что $\beta(\{R_i\}_{i=0}^n) = 1$ и $\gamma(\{R_i\}_{i=0}^n) = 1$: таким образом, последовательность $\{R_i\}_{i=0}^n$ содержит единственную плохую пару соседних слов (V, R_1). Попутно мы установим почти все утверждения леммы касательно слов Y, V и W и их главных рядов. На этапе 4 исследуется пара (R_1, U) и выводятся оставшиеся заключения леммы.

Этап 1. Пусть $\bar{i} = \gamma(\{R_i\}_{i=0}^{n})$. Мы хотим показать, что $\bar{i} = 1$, то есть $R_{\bar{i}-1} = V$. Чтобы не перегружать доказательство двойными индексами, обозначим слова $R_{\bar{i}-1}$ и $R_{\bar{i}}$ через P и Q соответственно. Согласно лемме 2.4.2, существует слово Y такое, что одно из слов P и Q имеет вид YY, а другое слово — вид YYY. Рассмотрим главные ряды слов Y, P, Q и V: $\{Y_k\}_{k=1}^{\ell(Y)}$, $\{P_k\}_{k=1}^{\ell(P)}$, $\{Q_k\}_{k=1}^{\ell(Q)}$ и $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$ соответственно. Ясно, что $Y_1 = Y$, $P_1 = P$, $Q_1 = Q$ и $V_1 = V$. Заметим, что пара (V, P) является хорошей по определению $\bar{i}$. Таким образом, мы получаем $\eta(V_1) \sim \eta(P_1) \not\sim \eta(Q_1)$ и, следовательно, $V_2 \sim P_2 \not\sim Q_2$. Кроме того, мы имеем

$$L_V[1] = L_P[1] = L_Q[1] = L_Y[1] = R_V[1] = R_P[1] = R_Q[1] = R_Y[1] = \lambda$$

и, по предложению 2.4.1 и лемме 2.4.2,

$$h(V)t(V) = h(P)t(P) = h(Q)t(Q) = h(Y)t(Y) \in \{12, 21\}.$$

С другой стороны, $\{P, Q\} = \{YY, YYY\}$. Применяя к паре $(\eta(YY), \eta(YYY))$ отображение θ^{-1} и вводя обозначение $Y' = \theta^{-1}(\eta(Y))$, мы получаем пару слов

$$\theta^{-1}(\eta(YY)) = Y'\theta^{-1}(t(Y)h(Y))Y' = Y't(Y)Y'$$

и

$$\theta^{-1}(\eta(YYY)) = Y'\theta^{-1}(t(Y)h(Y))Y'\theta^{-1}(t(Y)h(Y))Y' = Y't(Y)Y't(Y)Y' \ .$$

Согласно лемме 2.6.7 (1), операция r_1 преобразует пару $(\theta^{-1}(\eta(YY)), \theta^{-1}(\eta(YYY)))$ следующим образом:

$$\mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\eta(YY))) = \mathsf{r}_1(Y')t(Y)\mathsf{r}_1(Y') = Y_2t(Y)Y_2$$

и

$$\mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\eta(YYY))) = \mathsf{r}_1(Y')t(Y)\mathsf{r}_1(Y')t(Y)\mathsf{r}_1(Y') = Y_2t(Y)Y_2t(Y)Y_2 \ .$$

Осталось заметить, что $\{\mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\eta(YY))), \mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\eta(YYY)))\} = \{P_2, Q_2\}$, следовательно,

$$\{P_2, Q_2\} = \{Y_2t(Y)Y_2, Y_2t(Y)Y_2t(Y)Y_2\} \ .$$

Индукцией по $k = 2, \dots, \ell(Y)$ покажем, что

$$\{P_k, Q_k\} = \{Y_kc_kY_k, Y_kc_kY_kc_kY_k\} \text{ и } V_k \sim P_k \not\sim Q_k \tag{2.2}$$

для некоторой последовательности букв $\{c_k\}_{k=2}^{\ell(Y)}$. Дополнительно мы установим, что для слова $\mathrm{Anc}(Y)$ справедливо неравенство $|\mathrm{Anc}(Y)| \leqslant 2$.

Для $k=2$ положим $c_2 = t(Y)$: соотношения (2.2) выполняются, как было показано выше. Предположим теперь, что (2.2) справедливо для некоторого k с условием $|Y_k| > 2$. Докажем, что $k < \ell(Y)$ и (2.2) справедливо для $k{+}1$.

Очевидно, неравенство $|Y_k| > 2$ влечет $|P_k| > 2$, $|Q_k| > 2$ и $|V_k| > 2$. В силу леммы 2.6.7 (2), мы также имеем $V_k \notin \mathcal{S}_1$. Из леммы 2.6.1 и предложения 2.3.3 следует, что $k < \ell(V)$, $\mathsf{r_T}(P_k) \sim \mathsf{r_T}(V_k)$ и оба слова $\mathsf{r_T}(V_k)$ и $\mathsf{r_T}(P_k)$ являются $\widetilde{AB}$-целыми.

Мы утверждаем, что $\mathsf{r_T}(P_k) = P_k$ и $\mathsf{r_T}(V_k) = V_k$, то есть оба слова P_k и V_k не имеют нерегулярных хвостов. Предположим, что это не так, и пусть T — нерегулярный хвост слова P_k. Без ограничения общности будем считать, что $T = (112)^l(112)^2 21$ для некоторого $l \geqslant 0$, то есть T — левый 1-хвост. Слово P_k имеет префиксы T и Y_k. Если $|T| \leqslant |Y_k|$, то оба слова $\mathsf{r_T}(Y_k c_k Y_k)$ и $\mathsf{r_T}(Y_k c_k Y_k c_k Y_k)$ содержат подслово T внутри второго вхождения Y_k; в частности, слово P_k не является $\widetilde{AB}$-целым, противоречие.

Пусть теперь $|Y_k| < |T|$. Нетрудно заметить, что $c_k = 2$, потому что Y_k начинается с 11, а слова P_k и Q_k являются $\mathsf{r_1}$-редуцированными. Поэтому Y_k является префиксом слова $(112)^{l+2}$. Следовательно, слово Y_k не содержит подслова 22, в то время как слово P_k содержит 22 внутри хвоста T. Такое возможно только, если $Y_k[|Y_k|]c_k = 22$, откуда $Y_k = (112)^{l+2}$. Таким образом, слово $\mathsf{r_T}(P_k)$ имеет суффикс $Y_k = (112)^{l+2}$, не являющийся $\widetilde{AB}$-целым. Полученное противоречие доказывает, что $\mathsf{r_T}(P_k) = P_k$. Ввиду предложения 2.3.2 (1) и соотношения $P_k \sim V_k$, мы получаем $\mathsf{r_T}(V_k) = V_k$.

Из леммы 2.6.7 (4, 6) следует, что слова Q_k и Y_k являются $\widetilde{AB}$-целыми и не имеют нерегулярных хвостов. Более того, поскольку почти сильно бескубное слово V_k не имеет нередуцируемых хвостов, слова P_k, Q_k и Y_k также не имеют нередуцируемых хвостов в силу лемм 2.2.1 и 2.6.7 (5). Таким образом, процедура Ancestor не останавливается на словах V_k, P_k, Q_k и Y_k, то есть $k < \min\{\ell(V), \ell(P), \ell(Q), \ell(Y)\}$.

Ввиду предложения 2.2.1 и наблюдения 2.3.1, мы получаем

$$\mathsf{r}(V_k) = V_k \sim \mathsf{r}(P_k) \not\sim \mathsf{r}(Q_k),$$

а по лемме 2.6.7 (7)

$$\{\mathsf{r}(P_k), \mathsf{r}(Q_k)\} = \{\mathsf{r}(Y_k) c_k \mathsf{r}(Y_k), \mathsf{r}(Y_k) c_k \mathsf{r}(Y_k) c_k \mathsf{r}(Y_k)\}\ .$$

Более того, в силу предложения 2.4.1 и леммы 2.6.7 (8), мы имеем $h_V[k] = h_P[k] = h_Q[k] = h_Y[k]$ и $t_V[k] = t_P[k] = t_Q[k] = t_Y[k]$. Далее, согласно лемме 2.6.7 (8), слова $\mathsf{r}(Y_k)$, $\mathsf{r}(P_k)$ и $\mathsf{r}(Q_k)$ имеют нечетную длину, поэтому функция η отрезает от каждого из них $\mathsf{r}(Y_k)$, $\mathsf{r}(P_k)$ и $\mathsf{r}(Q_k)$ в точности по одной букве. По предложению 2.4.2, функция η в этом случае сохраняет отношение $\sim$, и, следовательно,

$$\eta(V_k) \sim \eta(\mathsf{r}(P_k)) \not\sim \eta(\mathsf{r}(Q_k)),$$

откуда $V_{k+1} \sim P_{k+1} \not\sim Q_{k+1}$.

С другой стороны, так как функция η стирает только одну букву у слова $\mathsf{r}(Y_k)$, либо $h(\mathsf{r}(Y_k)) = \lambda$, либо $t(\mathsf{r}(Y_k)) = \lambda$. Пусть $Y'_k = \mathsf{r}(Y_k)$, положим $c_{k+1} = \overline{h(Y'_k)}t(Y'_k)$. Несложно проверить, что в обоих случаях мы имеем

$$\{\theta^{-1}(\eta(\mathsf{r}(P_k))), \theta^{-1}(\eta(\mathsf{r}(Q_k)))\} =$$
$$\{\theta^{-1}(\eta(Y'_k))\, c_{k+1}\theta^{-1}(\eta(Y'_k)), \theta^{-1}(\eta(Y'_k))\, c_{k+1}\theta^{-1}(\eta(Y'_k))\, c_{k+1}\theta^{-1}(\eta(Y'_k))\} \ .$$

Заметим, что $c_k = \overline{h(Y'_k)}$ ($c_k = \overline{t(Y'_k)}$), если $t(Y'_k) = \lambda$ (соответственно, $h(Y'_k) = \lambda$). Таким образом, $c_{k+1} = c_k$, если $t(Y'_k) = \lambda$, и $c_{k+1} = \overline{c}_k$ в противном случае. Наконец, применяя лемму 2.6.7 (1), мы получаем

$$\{P_{k+1}, Q_{k+1}\} = \{Y_{k+1}c_{k+1}Y_{k+1}, Y_{k+1}c_{k+1}Y_{k+1}c_{k+1}Y_{k+1}\},$$

что и требовалось показать.

Итак, мы доказали, что $|\mathrm{Anc}(Y)| \leqslant 2$ и (2.2) справедливо для любого $k = 2, \ldots, \ell(Y)$. Кроме того, мы установили, что почти сильно бескубные слова V_k регулярны, слова P_k, Q_k и Y_k не имеют хвостов (ни первого, ни второго рода), $h_V[k] = h_P[k] = h_Q[k] = h_Y[k]$ и $t_V[k] = t_P[k] = t_Q[k] = t_Y[k]$ для всех $k < \ell(Y)$.

Рассмотрим слова V_m, P_m, Q_m и Y_m, где $m = \ell(Y)$. Если $Y_m \in \{1, 2\}$, то слова P_m и Q_m являются буквочередующимися и имеют нечетную длину. Ввиду соотношения $V_m \sim P_m$, леммы 2.6.1 (2) и наблюдения 2.4.1, мы заключаем, что

$$V_m = P_m = Y_m c_m Y_m \in \{121, 212\} \text{ и } Q_m = Y_m c_m Y_m c_m Y_m \in \{12121, 21212\} \ .$$

Очевидно, $\ell(V) = \ell(P) = \ell(Q) = m+1$. Заметим, что в этом случае $h(Y_m) = \lambda$ и $t(Y_m) = Y_m$. Положим $Y_{m+1} = \lambda$. Тогда

$$V_{m+1} = P_{m+1} = Y_{m+1}c_{m+1}Y_{m+1} \text{ и } Q_{m+1} = Y_{m+1}c_{m+1}Y_{m+1}c_{m+1}Y_{m+1},$$

где $c_{m+1} = \overline{h(Y_m)}t(Y_m) = Y_m$. В дальнейшем мы всегда будем дополнительно полагать $Y_{m+1} = \lambda$, когда $Y_m \in \{1, 2\}$.

Если $|Y_m| = 2$, то класс $[Y_m c_m Y_m c_m Y_m]_{\mathsf{r}_1}$ не содержит почти сильно бескубных слов в силу леммы 2.6.8. С другой стороны, слово $Y_m c_m Y_m$ сильно бескубно. Следовательно,

$$V_m = P_m = Y_m c_m Y_m \text{ и } Q_m = Y_m c_m Y_m c_m Y_m \ .$$

В случае $Y_m \in \{11, 22\}$ все три слова V_m, P_m и Q_m не являются $\widetilde{AB}$-целыми, поэтому $\ell(V) = \ell(P) = \ell(Q) = m$. Наконец, если $Y_m \in \{12, 21\}$, то слово Q не является $\widetilde{AB}$-целым, и мы имеем $\ell(Q) = m$ и $\ell(V) = \ell(P) = m + 1$.

Итак, во всех случаях мы получаем

$$V_m = P_m = Y_m c_m Y_m, \quad Q_m = Y_m c_m Y_m c_m Y_m$$

и

$$\ell(Q){-}1 \leqslant \ell(Y) \leqslant \ell(Q) \leqslant \ell(P) = \ell(V) \leqslant \ell(Q){+}1 \ .$$

Следовательно, $P_k = Y_k c_k Y_k$ и $Q_k = Y_k c_k Y_k c_k Y_k$ для любого $k = 2, \ldots, m$, $P = YY$ и $Q = YYY$.

Этап 2. Рассмотрим прямые нормальные ряды слов V, P, Q и Y. Так как слово $\mathrm{Anc}(V)$ сильно бескубно (лемма 2.6.1), прямой нормальный ряд, общий для слов V и P, является также их главным нормальным рядом. Более того, согласно лемме 2.6.6, он совпадает с главным V-рядом. Пусть $\{\widetilde{Y}_k\}_{k=1}^{\ell(Y)}$ и $\{\widetilde{Q}_k\}_{k=1}^{\ell(Q)}$ — прямые нормальные ряды, соответственно, слов Y и Q. Положим также $m = \ell(Q)$ и $Y_m = \widetilde{Y}_m = \lambda$, если $m = \ell(Y) + 1$.

Покажем индукцией по k, что

$$V_k = \widetilde{Y}_k c_k \widetilde{Y}_k \quad \text{и} \quad \widetilde{Q}_k = \widetilde{Y}_k c_k \widetilde{Y}_k c_k \widetilde{Y}_k \tag{2.3}$$

для любого $k = m, \ldots, 2$. При $k = m$, равенства (2.3) выполняются по определению прямых нормальных рядов и свойству (2.2). Предположим теперь, что равенства (2.3) справедливы для значения $k{+}1$, где $k < m$, и докажем (2.3) для значения k. Действительно, на этапе 1 мы установили, что либо $h_Y[k] = \lambda$, либо $t_Y[k] = \lambda$. Если $t_Y[k] = \lambda$, то $c_{k+1} = c_k = \overline{h_Y[k]}$, и мы имеем

$$V_k = h_V[k]\theta(V_{k+1}) = h_Y[k]\theta(\widetilde{Y}_{k+1}c_{k+1}\widetilde{Y}_{k+1}) = h_Y[k]\theta(\widetilde{Y}_{k+1})c_k\bar{c}_k\theta(\widetilde{Y}_{k+1}) = \widetilde{Y}_k c_k \widetilde{Y}_k$$

и

$$\widetilde{Q}_k = h_Q[k]\theta(\widetilde{Q}_{k+1}) = h_Y[k]\theta(\widetilde{Y}_{k+1}c_{k+1}\widetilde{Y}_{k+1}c_{k+1}\widetilde{Y}_{k+1}) = \\ h_Y[k]\theta(\widetilde{Y}_{k+1})c_k\bar{c}_k\theta(\widetilde{Y}_{k+1})c_k\bar{c}_k\theta(\widetilde{Y}_{k+1}) = \widetilde{Y}_k c_k \widetilde{Y}_k c_k \widetilde{Y}_k \ .$$

Если $h_Y[k] = \lambda$, то $c_{k+1} = t_Y[k] = \overline{c_k}$, поэтому

$$V_k = \theta(V_{k+1})t_V[k] = \theta(\widetilde{Y}_{k+1}c_{k+1}\widetilde{Y}_{k+1})t_Y[k] = \theta(\widetilde{Y}_{k+1})\bar{c}_k c_k\theta(\widetilde{Y}_{k+1})t_Y[k] = \widetilde{Y}_k c_k \widetilde{Y}_k$$

и

$$\widetilde{Q}_k = \theta(\widetilde{Q}_{k+1})t_Q[k] = \theta(\widetilde{Y}_{k+1}c_{k+1}\widetilde{Y}_{k+1}c_{k+1}\widetilde{Y}_{k+1})t_Y[k] = \\ \theta(\widetilde{Y}_{k+1})\bar{c}_k c_k\theta(\widetilde{Y}_{k+1})\bar{c}_k c_k\theta(\widetilde{Y}_{k+1})t_Y[k] = \widetilde{Y}_k c_k \widetilde{Y}_k c_k \widetilde{Y}_k \ .$$

Итак, мы показали, что слова V_k, $\widetilde{Q}_k$ и $\widetilde{Y}_k$ удовлетворяют (2.3) для любого $k = 2, \ldots, m$. Рассмотрим, наконец, слова V и $\widetilde{Q}_1 = N^D(Q)$. На этапе 1 мы определили, что $c_2 = t_Y[1] = \overline{h_Y[1]}$. Таким образом, мы получаем

$$V = h_V[1]\theta(V_2)t_V[1] = h_Y[1]\theta(\widetilde{Y}_2 c_2 \widetilde{Y}_2)t_Y[1] = \\ h_Y[1]\theta(\widetilde{Y}_2)t_Y[1]h_Y[1]\theta(\widetilde{Y}_2)t_Y[1] = \widetilde{Y}_1\widetilde{Y}_1 = N^D(Y)N^D(Y)$$

и

$$\widetilde{Q}_1 = h_Q[1]\theta(\widetilde{Q}_2)t_Q[1] = h_Y[1]\theta(\widetilde{Y}_2 c_2 \widetilde{Y}_2 c_2 \widetilde{Y}_2)t_Y[1] = \\ h_Y[1]\theta(\widetilde{Y}_2)t_Y[1]h_Y[1]\theta(\widetilde{Y}_2)t_Y[1]h_Y[1]\theta(\widetilde{Y}_2)t_Y[1] = \\ \widetilde{Y}_1\widetilde{Y}_1\widetilde{Y}_1 = N^D(Y)N^D(Y)N^D(Y) \ .$$

Обозначим прямую нормальную форму $N^D(Q)$ слова Q через W. Согласно лемме 2.6.3, мы имеем $\widetilde{Q}_2 \sim Q_2 = \mathsf{r}_1(\theta^{-1}(\eta(Q)))$. Рассмотрим произвольную $(\widetilde{Q}_2, \theta^{-1}(\eta(Q)))$-цепочку $\{S_j\}_{j=0}^l$. Последовательность $\{S'_j = h(Q)\theta(S_j)t(Q)\}_{j=0}^l$, очевидно, будет r-связующей (W,Q)-цепочкой по лемме 2.4.1 (2). Из предложения 2.4.1 вытекает, что $h(S'_j) = h(Q)$ и $t(S'_j) = t(Q)$ для всех $j \leqslant l$. Следовательно, $\eta(S'_j) = \theta(S_j)$ для любого $j = 0,1,\dots,l$, и все пары (S'_{j-1}, S'_j), где $j = 1,\dots,l$, являются хорошими.

Напомним, что $(P,Q) = (R_{\bar{i}-1}, R_{\bar{i}})$, где $\bar{i} = \gamma(\{R_i\}_{i=0}^n)$. Предположим, что $\bar{i} > 1$. Построим новую r-связующую (V,U)-цепочку $\{R'_j\}_{j=0}^{n'}$, где $n' = n + l + 1 - \bar{i}$, следующим образом:

$$R'_0 = V, \quad R'_{1+j} = S'_j, \text{ где } j = 0,\dots,l, \quad R'_{l+1+i-\bar{i}} = R_i, \text{ где } i = \bar{i}+1,\dots,n \ .$$

Легко видеть, что $\beta(\{R'_j\}_{j=0}^{n'}) = \beta(\{R_i\}_{i=0}^n)$ и $\gamma(\{R'_j\}_{j=0}^{n'}) = 1 < \gamma(\{R_i\}_{i=0}^n)$, что противоречит выбору r-связующей цепочки $\{R_i\}_{i=0}^n$. Следовательно, $\gamma(\{R_i\}_{i=0}^n) = 1$, $P = V$ и $Q = R_1$. В свою очередь, равенство $P = V$ влечет $Y = N^D(Y)$ и $Q = W$. Таким образом, главный Q-ряд $\{Q_k\}_{k=0}^m$ оказывается главным W-рядом $\{W_k\}_{k=0}^m$, и мы получаем $V_k = Y_k c_k Y_k$, $W_k = Y_k c_k Y_k c_k Y_k$ и $\widetilde{Y}_k = Y_k$ для всех $k \leqslant m$.

Более того, так как слова V_k регулярны для любого $k = 1,\dots,\ell(Y)-1$ (см. этап 1), то и слова Y_k регулярны для любого $k = 1,\dots,\ell(Y)-1$. Применяя предложение 1.2.1 и лемму 2.6.7 (7), мы заключаем, что слова W_k также регулярны для тех же значений k. Напомним, что либо $\ell(W) = \ell(Y)$, либо $\ell(W) = \ell(Y)+1$, причем второй вариант возможен только, когда $|\mathrm{Anc}(Y)| = 1$ (см. этап 1). Поскольку при $|\mathrm{Anc}(Y)| = 1$ слова $Y_{\ell(Y)} = \mathrm{Anc}(Y)$ и $W_{\ell(Y)}$, очевидно, регулярны, мы можем утверждать, что слова V_k, W_k и Y_k регулярны для любого $k = 1,\dots,\ell(W)-1$.

Итак, мы доказали утверждения 5–7 леммы. Дополнительно мы установили справедливость утверждений 2–4 касательно слов V, W и Y. Осталось «навести мосты» между словами W и U.

Этап 3. Докажем, что $\beta(\{R_i\}_{i=0}^n) = 1$, то есть (V,W) — единственная плохая пара из множества $\{(R_{i-1}, R_i) \mid i = 1,\dots,n\}$. Предположим, что это не так, и существует еще одна плохая пара $(P,Q) = (R_{\bar{i}-1}, R_{\bar{i}})$, причем мы выбираем ближайшую плохую пару к слову $W = R_1$: такую, что все пары (R_{i-1}, R_i) при $1 < i < \bar{i}$ являются хорошими.

Согласно лемме 2.4.2, существует слово X такое, что $\{P,Q\} = \{XXX, XX\}$. Рассмотрим главные ряды слов P, Q и X: $\{P_k\}_{k=1}^{\ell(P)}$, $\{Q_k\}_{k=1}^{\ell(Q)}$ и $\{X_k\}_{k=1}^{\ell(X)}$ соответственно. Ясно, что $P_1 = P$, $Q_1 = Q$ и $X_1 = X$. Легко показать (повторяя рассуждения этапа 1), что $\{P_2, Q_2\} = \{X_2d_2X_2, X_2d_2X_2d_2X_2\}$, где $d_2 = t(X)$, и $W_2 \sim P_2 \not\sim Q_2$. Кроме того, мы имеем $h(X) = h(P) = h(Q) = h(W)$ и $t(X) = t(P) = t(Q) = t(W)$; в частности, мы видим, что $d_2 = c_2$. Предположим теперь, что

$$\{P_k, Q_k\} = \{X_kc_kX_k, X_kc_kX_kc_kX_k\} \text{ и } W_k \sim P_k \not\sim Q_k \tag{2.4}$$

для некоторого $k \in [2; \ell(Y)-1]$ и докажем (2.4) для значения $k+1$.

Сначала покажем, что $|X_k| > 2$. Действительно, если $|X_k| = 2$, то слово $X_kc_kX_k$ сильно бескубно, $[X_kc_kX_k]_{\mathsf{r}_1} = X_kc_kX_k$, а слово $X_kc_kX_kc_kX_k$ принадлежит множеству $\mathcal{S}_2$. Заметим, что ни одно слово из множества $\mathcal{S}_2$ не является $\widetilde{AB}$-целым. Поскольку слово W_k является $\widetilde{AB}$-целым, но не является сильно бескубным, мы получаем $W_k \not\sim X_kc_kX_k$ и $W_k \not\sim X_kc_kX_kc_kX_k$, что противоречит условиям (2.4). Если же $|X_k| = 1$, слова P_k и Q_k являются буквочередующимися. Имея $W_k \sim P_k$ и $V_k \leqslant W_k$, мы заключаем, что слова W_k и V_k также буквочередующиеся, что противоречит предположению $k < \ell(Y)$ и лемме 2.6.7 (3).

Итак, мы имеем $|X_k| > 2$, а значит, $|P_k| > 2$ и $|Q_k| > 2$. Так как слово W_k регулярно и $P_k \sim W_k$, лемма 2.6.7 позволяет заключить, что оба слова P_k и Q_k являются $\widetilde{AB}$-целыми и не имеют хвостов ни первого, ни второго рода. По предложению 2.2.1 и лемме 2.6.7 (7), мы имеем

$$\{\mathsf{r}(P_k), \mathsf{r}(Q_k)\} = \{\mathsf{r}(X_k)c_k\mathsf{r}(X_k), \mathsf{r}(X_k)c_k\mathsf{r}(X_k)c_k\mathsf{r}(X_k)\}$$

и $W_k \sim \mathsf{r}(P_k) \not\sim \mathsf{r}(Q_k)$. Наконец, применяя θ^{-1}, операцию r_1-редукции и используя лемму 2.6.7 (1, 7, 8), точно так же, как и на этапе 1, мы получаем

$$\{P_{k+1}, Q_{k+1}\} = \{X_{k+1}c_{k+1}X_{k+1}, X_{k+1}c_{k+1}X_{k+1}c_{k+1}X_{k+1}\}$$

и $W_{k+1} \sim P_{k+1} \not\sim Q_{k+1}$. Кроме того,

$$h_X[k] = h_Q[k] = h_P[k] = h_W[k] \quad \text{и} \quad t_X[k] = t_Q[k] = t_P[k] = t_W[k] \ .$$

Итак, индукцией по k мы доказали (2.4) для всех $k \leqslant \ell(Y)$. Пусть $m = \ell(Y)$. Рассмотрим слова P_m, Q_m и X_m. Если $Y_m = 11$ или $Y_m = 22$, то слово P_m, эквивалентное слову $W_m = Y_mc_mY_mc_mY_m$, имеет вид $(112)^*(112)^2 11$ или, соответственно, $(221)^*(221)^2 22$ в силу леммы 2.6.8, откуда $X_m = (112)^l 11$ (соотв., $X_m = (221)^l 22$) для некоторого $l \geqslant 0$. Ввиду того, что $P_m \not\sim Q_m$, мы получаем $l = 0$, $X_m = Y_m$ и $\{P_m, Q_m\} = \{W_m, V_m\}$.

В случае, когда $Y_m = 12$ или $Y_m = 21$, слово P_m имеет вид $(12c_m)^*(12c_m)^2 12$ или, соответственно, $(21c_m)^*(21c_m)^2 21$. Нетрудно убедиться, что $X_m = (12c_m)^l 12$ (или, соотв., $X_m = (21c_m)^l 21$) для некоторого $l \geqslant 0$. Опять, условие $P_m \not\sim Q_m$ немедленно влечет $l = 0$, $X_m = Y_m$ и $\{P_m, Q_m\} = \{W_m, V_m\}$.

Наконец, если $Y_m \in \{1,2\}$, то слово W_m буквочередующееся. Ввиду условия $W_m \sim P_m$ и наблюдения 2.4.1, слово P_m также является буквочередующимся, поэтому $|X_m| = 1$ по лемме 2.6.7 (3), и мы вновь получаем $X_m = Y_m$ и $\{P_m, Q_m\} = \{W_m, V_m\}$.

Поскольку $P_m \sim W_m \not\sim V_m$, во всех разобранных выше случаях мы имеем $P_m = W_m$ и $Q_m = V_m$, при этом

$$\ell(P) = \ell(W), \quad \ell(Q) = \ell(V), \quad \ell(X) = \ell(Y)$$

и

$$\mathrm{Anc}(P) = \mathrm{Anc}(W), \quad \mathrm{Anc}(Q) = \mathrm{Anc}(V), \quad \mathrm{Anc}(X) = \mathrm{Anc}(Y)\ .$$

Ясно, что главные ряды слов W, V и Y являются прямыми нормальными рядами слов P, Q и X соответственно. В частности, $Q_2 \sim V_2$ и $Q \sim V$ по лемме 2.6.3. Пусть $\{S_j\}_{j=0}^{l}$ — произвольная связующая $(V_2, \theta^{-1}(\eta(Q)))$-цепочка. Тогда последовательность

$$\{S'_j = h(V)\theta(S_j)t(V)\}_{j=0}^{l}$$

оказывается r-связующей (V,Q)-цепочкой, причем равенство $\eta(S'_j) = \theta(S_j)$ справедливо для любого $j \geqslant 0$, поэтому все пары (S'_{j-1}, S'_j) при $j \geqslant 1$ хорошие. Теперь, заменив подпоследовательность $R_0, \ldots, R_{\bar{i}}$ в r-связующей (V,U)-цепочке $\{R_i\}_{i=0}^{n}$ последовательностью $\{S'_j\}_{j=0}^{l}$, мы получим новую r-связующую (V,U)-цепочку со значением β, меньшим, чем $\beta(\{R_i\}_{i=0}^{n})$, что противоречит выбору связующей цепочки $\{R_i\}_{i=0}^{n}$. Следовательно, пара (V,W) — единственная плохая пара из множества $\{(R_{i-1}, R_i) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, что и требовалось доказать.

Этап 4. Так как все пары (R_{i-1}, R_i) при $i > 1$ являются хорошими, то и пара (W,U), очевидно, хорошая. Кроме того, поскольку функция η стирает в точности по одной букве от каждого слова W_k, где $k = 1, \ldots, \ell(W)-1$, в силу предложения 2.4.2, для главных W- и U-рядов выполняется условие $(**)$. Для завершения доказательства осталось применить лемму 2.6.2. $\square$

§ 2.7 Алгоритм EqAOF. Доказательство теоремы 2.2

В предыдущем параграфе мы говорили, что работу алгоритма EqAOF составляют две основные процедуры. Там же была рассмотрена первая из них — процедура Ancestor. Этот параграф мы начнем с описания второй основной процедуры алгоритма.

Процедура Normalize.
Вход. Слово $W \sim \mathrm{Anc}(U)$, массивы L, R, h, t из процедуры $\mathrm{Ancestor}(U)$, число $k = \ell(U)$.
Выход. Слово $\mathrm{Norm}(U,W)$.
Шаг 1. Если $k = 1$, то $\mathrm{Norm}(U,W) := W$; стоп.

Шаг 2. $k := k-1$; $W := h[k]\theta(W)t[k]$.
Шаг 3. Если $W = Y^3$ для некоторого слова $Y \in \Sigma^+$, положим $W := Y^2$.
Шаг 4. $W := L[k]WR[k]$; возвращаемся к шагу 1.
Конец.

Работа процедуры Normalize напоминает процесс построения W-нормального ряда слова U за тем единственным исключением, что если на какой-то итерации мы получаем куб некоторого слова, мы редуцируем его до квадрата этого же слова. Ясно, что для полученной таким образом последовательности слов, как и для нормального ряда, справедливы леммы 2.6.3 и 2.6.4 (1, 2). В частности, $\mathrm{Norm}(U,W) \sim U$.

Пусть $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \{1, 2, 11, 22, 12, 21\}$. Теперь все готово для построения алгоритма EqAOF.

Алгоритм EqAOF.
Вход. Произвольное непустое слово U.
Выход. Почти сильно бескубное слово V, эквивалентное U, или “FALSE”, если такого почти сильно бескубного слова не существует.
Шаг 1. Запускаем процедуру Ancestor(U), получаем массивы L, R, h, t и целое число $m = \ell(U)$.
Шаг 2. Находим слово $W \in \mathcal{S}$ такое, что $\mathrm{Anc}(U) \sim W$; если такого слова W не существует, возвращаем $\mathrm{EqAOF}(U) = \mathrm{FALSE}$; стоп.
Шаг 3. Запускаем процедуру Normalize(W, L, R, h, t, m); $V := \mathrm{Norm}(U,W)$.
Шаг 4. Если слово V почти сильно бескубно, возвращаем $\mathrm{EqAOF}(U) = V$, в противном случае возвращаем $\mathrm{EqAOF}(U) = \mathrm{FALSE}$.
Конец.

Следующая лемма обеспечивает корректность работы алгоритма EqAOF.

Лемма 2.7.1. *Для произвольного слова $U \neq \lambda$, алгоритм* EqAOF *возвращает почти сильно бескубное слово $V \notin \{111, 222\}$, эквивалентное U, и возвращает* FALSE*, если такого почти сильно бескубного слова не существует.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, процедура Normalize возвращает слово $\mathrm{Norm}(U,W)$, эквивалентное U. По построению алгоритма, или $\mathrm{EqAOF}(U) = \mathrm{FALSE}$, или $\mathrm{EqAOF}(U) = \mathrm{Norm}(W,U)$ для некоторого $W \in \mathcal{S}$. Таким образом, если алгоритм возвращает некоторое слово V, то обязательно $V = \mathrm{Norm}(U,W)$, поэтому слово V является r_1-редуцированным и $V \sim U$. Кроме того, в силу шага 4 алгоритма EqAOF, слово V еще и почти сильно бескубно. Итак, если $\mathrm{EqAOF}(U) = V$, то V — r_1-редуцированное почти сильно бескубное слово и $V \sim U$.

Обратно, предположим, что $V \sim U$, слово V почти сильно бескубно и $V \notin \{111, 222\}$. Покажем, что $\mathrm{EqAOF}(U) = V$. Пусть $\{U_k\}_{k=1}^{\ell(U)}$ и $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$ — главные ряды слов U и V соответственно, и $m = \min\{\ell(U), \ell(V)\}$. Из леммы 2.6.2 следует, что если главные ряды слов

U и V удовлетворяют условию $(**)$, то $\mathrm{Anc}(U) \sim \mathrm{Anc}(V)$. В этом случае, согласно лемме 2.6.1 (1), алгоритм EqAOF присвоит $W = \mathrm{Anc}(V) \in \mathcal{S}_1 \cup \{1, 2, 12, 21, 11, 22\}$ на шаге 2. Ясно, что главный нормальный ряд слова U совпадает с главным (и прямым) нормальным рядом слова V, который в свою очередь, по лемме 2.6.6, совпадает с главным V-рядом. Так как слова V_k сильно бескубны для всех $k \in [2; \ell(V)]$ по лемме 2.6.1 (2), а V является r_1-редуцированным почти сильно бескубным словом, условие на шаге 3 процедуры Normalize никогда не выполняется. Таким образом, процедура Normalize строит главный ряд слова V и возвращает слово $\mathrm{Norm}(U, V) = V$, откуда $\mathrm{EqAOF}(U) = V$.

Теперь предположим, что существует число $k' < m$ такое, что пары $(\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_k)), \mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)))$ при всех $k < k'$ хорошие, а пара $(\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_{k'})), \mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{k'})))$ — плохая. Из доказательства леммы 2.6.2 следует, что $U_k \sim V_k$ для любого $k = 1, \ldots, k'$. Кроме того, мы имеем $L_U[k] = L_V[k]$, $R_U[k] = R_V[k]$, $h_U[k] = h_V[k]$ и $t_U[k] = t_V[k]$ для всех $k \leqslant k'$. Обозначим слова $\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_{k'}))$ и $\mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{k'}))$ через U' и V' соответственно. Согласно лемме 2.6.9, существует слово Y такое, что $V' = YY$, $\ell(U') = \ell(YYY)$ и $\mathrm{Anc}(U') \sim \mathrm{Anc}(YYY) \in \mathcal{S}_2 \cup \{11, 22\}$. Положим $W' = YYY$. Заметим, что $\ell(U) = \ell(W') + k' - 1$. Так как $\mathrm{Anc}(U') = \mathrm{Anc}(U)$, алгоритм EqAOF, имея на входе слово U, выберет на втором шаге слово $\mathrm{Anc}(W')$.

Пусть $\{W'_j\}_{j=1}^{\ell(W')}$ и $\{Y_j\}_{j=1}^{\ell(Y)}$ – главные ряды слов W' и Y соответственно. Ясно, что $\mathrm{Anc}(W')$-нормальные ряды слов U' и W' совпадают (для слова W' такой нормальный ряд будет прямым). В то же время, из доказательства леммы 2.6.9 следует, что прямой нормальный ряд слова W' совпадает с главным W'-рядом, и $W'_j = Y_j c_j Y_j c_j Y_j$ для некоторой последовательности букв $\{c_j\}_{j=2}^{\ell(W')}$ и любого $j = 2, \ldots, \ell(W')$. Таким образом, что для длины слова W'_j справедливо равенство $|W'_j| = 3|Y_j| + 2$, то есть слово W'_j не является кубом ни при каком $j = 2, \ldots, \ell(W')$. Поэтому условие шага 3 процедуры Normalize не выполняется, и процедура $\mathrm{Normalize}(U, W)$ строит главный W'-ряд, пока $k = \ell(U), \ell(U) - 1, \ldots, k' + 1$.

Рассмотрим итерацию процедуры Normalize, на которой $k = k'$. Очевидно, на шаге 2 мы получаем слово $W' = YYY$. На шаге 3 срабатывает условие, в результате которого редукция $YYY \to YY$ приводит нас к слову $V' = \mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{k'}))$. Поскольку слово $V_{k'}$ почти сильно бескубно, мы имеем $V' = \mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{k'})$. Наконец, на четвертом шаге процедуры Normalize мы получаем слово $L_U[k']V'R_U[k'] = L_V[k']\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{k'})R_V[k'] = V_{k'}$. Далее, все оставшееся время процедура Normalize последовательно восстанавливает слова V_k для $k = k' - 1, \ldots, 1$ и возвращает слово $\mathrm{Norm}(U, W) = V$. Таким образом, $\mathrm{EqAOF}(U) = V$, что и требовалось доказать. $\square$

Теперь оценим время работы алгоритма EqAOF.

Лемма 2.7.2. *Алгоритм* EqAOF *работает за время* $O(|U|)$ *для любого входного слова* U.

Доказательство. На шаге 1 алгоритма EqAOF вызывается процедура Ancestor. Одна итерация процедуры Ancestor состоит из константных и линейных по времени операций (проверок и редукций). Нетривиальная проверка на шаге 2 процедуры Ancestor линейна по времени ввиду леммы 2.3.3, так как оба рассматриваемых на шаге 2 класса являются рациональными языками. Таким образом, один проход по циклу процедуры Ancestor ограничен по времени сверху величиной $C|U|+D$ для произвольного слова U и некоторых фиксированных констант $C, D > 0$, поэтому время работы процедуры Ancestor ограничено сверху суммой $\sum_{k=1}^{\ell(U)}(C|U_k|+D)$. Так как $|U_k| \leqslant 2^{-k+1}|U|$ и $\ell(U) \leqslant \lceil \log_2 |U| \rceil$, мы получаем, что временная сложность процедуры Ancestor ограничена величиной

$$C|U|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} + D\lceil \log_2 |U|\rceil = 2C|U| + D\lceil \log_2 |U|\rceil \ .$$

Следовательно, процедура Ancestor работает за время $O(|U|)$.

Согласно леммам 2.3.1, 2.3.3 и 2.6.8, каждый класс $[W]$, где $W \in \mathcal{S}$, является рациональным языком. Таким образом, шаг 2 алгоритма EqAOF сводится к конечному числу проверок при помощи конечных автоматов, поэтому этот шаг линеен по времени относительно $|\mathrm{Anc}(U)|$. Процедура Normalize, применяемая на шаге 3, работает за время $O(|U|)$ по тем же причинам, что и процедура Ancestor. Наконец, проверка, является ли слово V почти сильно бескубным, также может быть осуществлена за линейное время. Соответствующий алгоритм можно построить, например, модифицируя алгоритм A$'$ из [30]. Мы видим, что алгоритм EqAOF работает за время $O(|U|)$. □

Леммы 2.7.1 и 2.7.2 вместе дают доказательство теоремы 2.2.

Глава 3

Приложения алгоритма EqAOF и обобщение результатов

Данная глава посвящена применению алгоритма EqAOF, построенного в главе 2, для исследования полугруппы $B(2,2,3)$. Всюду в этой главе $\sim$, π обозначают, соответственно, конгруэнцию $\sim_{2,1}$ и отношение соседства $\pi_{2,1}$. Вместо Σ_2 будем писать просто Σ.

Процедура Ancestor позволяет получить рекурсивное описание классов эквивалентности, содержащих почти сильно бескубные слова, благодаря чему в § 3.1 мы докажем, что каждый такой класс является рациональным языком, подтвердив тем самым гипотезу Бжозовского для таких классов. Кроме того, мы покажем, что почти сильно бескубные слова, за исключением слов 111 и 222, являются единственными словами минимальной длины в своих классах эквивалентности.

Во втором параграфе мы приводим количественные характеристики классов эквивалентности, содержащих почти сильно бескубные слова, в терминах комбинаторной сложности языков и их индекса роста. Наконец, третий параграф посвящен обобщению полученных в главах 2–3 результатов на более широкое множество слов.

§ 3.1 Гипотеза Бжозовского и другие приложения

3.1.1 Описание класса эквивалентности произвольного почти сильно бескубного слова

Идея, использованная при построении алгоритма EqAOF, подсказывает нам, как получить описание класса $[V]$ по произвольному почти сильно бескубному слову V: сначала, при помощи процедуры Ancestor, мы построим главный ряд слова V, а затем последовательно найдем описание классов эквивалентности для всех его членов, начиная со слова $\mathrm{Anc}(V)$ и заканчивая словом V.

При построении классов $[V_k]$ для членов главного V-ряда ($k = \ell(V), \ldots, 1$) нам придется обращать все действия процедуры Ancestor, в том числе редукции r_1, r и r_T. Для этой цели мы используем следующие три операции:

$$\begin{aligned}
\mathsf{r}_1{}^{-1}(U) &= \{W \in \Sigma^* \mid \mathsf{r}_1(W) = U\},\\
\mathsf{r}^{-1}(U) &= \{W \in \Sigma^* \mid \text{слово } W - \widetilde{AB}\text{-целое, } W \text{ не имеет хвостов второго рода и } \mathsf{r}(W) = U\},\\
\mathsf{r}_\mathsf{T}{}^{-1}(U) &= \{W \in \Sigma^* \mid \text{слово } W - \mathsf{r}_1\text{-редуцированое, } W \sim U \text{ и } \mathsf{r}_\mathsf{T}(W) = \mathsf{r}_\mathsf{T}(U)\}\ .
\end{aligned}$$

(Заметим, что первая из введенных операций есть просто взятие прообраза при действии r_1.)

Естественным образом действие $\mathsf{r}_1{}^{-1}$, r^{-1} и $\mathsf{r}_\mathsf{T}{}^{-1}$ распространяется на языки:

$$\mathsf{r}_1{}^{-1}(\mathcal{L}) = \bigcup_{U \in \mathcal{L}} \mathsf{r}_1{}^{-1}(U), \quad \mathsf{r}^{-1}(\mathcal{L}) = \bigcup_{U \in \mathcal{L}} \mathsf{r}^{-1}(U), \quad \mathsf{r}_\mathsf{T}{}^{-1}(\mathcal{L}) = \bigcup_{U \in \mathcal{L}} \mathsf{r}_\mathsf{T}{}^{-1}(U)$$

для любого языка $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$.

Сделаем одно простое наблюдение, непосредственно вытекающее из определения r_1 и предложения 2.2.1.

Наблюдение 3.1.1. *Пусть $U \in \Sigma^*$. Тогда*

1) $[U]_{\mathsf{r}_1} = \mathsf{r}_1([U])$ *и* $[U] = \mathsf{r}_1{}^{-1}([U]_{\mathsf{r}_1})$.

2) *Если слово U — $\widetilde{AB}$-целое и не имеет нередуцируемых хвостов, то* $[U]_\mathsf{r} = \mathsf{r}([U]_{\mathsf{r}_1})$ *и* $[U]_{\mathsf{r}_1} = \mathsf{r}^{-1}([U]_\mathsf{r})$.

Для любого слова $V \in \Sigma^*$, символом $V^{3/2}$ обозначим слово YYY, если $V = YY$ для некоторого $Y \in \Sigma^*$; если V не является квадратом никакого слова, положим $V^{3/2} = V$.

Пусть V — почти сильно бескубное слово, и $U \in [V]$. Рассмотрим главные ряды слов V и U — $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$ и $\{U_k\}_{k=1}^{\ell(U)}$ соответственно. Возможны две ситуации: либо все пары $(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k), \mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_k))$, где $k = 1, \ldots, \min\{\ell(V), \ell(U)\}$, являются хорошими, либо среди них есть хотя бы одна плохая пара. В последнем случае выберем минимальное значение k', при котором пара $(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{k'}), \mathsf{r}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(U_{k'})))$ является плохой, пусть $V' = \mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{k'})^{3/2}$ и $\{V'_i\}_{i=1}^{\ell(V')}$ — главный ряд слова V'. Мы видим, что если в первом случае мы имеем $U_k \sim V_k$ для всех $k \leqslant \ell(U) = \ell(V)$ (по лемме 2.6.2), то во втором случае выполняется $V_k \not\sim U_k \sim V'_{k-k'+1}$ при $k = k'+1, \ldots, \ell(U)$ (по лемме 2.6.9). Таким образом, для рекурсивного описания класса $[V]$ недостаточно описать классы эквивалентности для членов главного V-ряда, необходимо также построить классы эквивалентности для членов главного ряда слова $\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{k'})^{3/2}$. В связи с этим возникает два вопроса: каким образом определить значение k', исходя только из слова V, и могут ли значения k' быть различными для разных слов из класса $[V]$?

Для произвольного слова V с главным V-рядом $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$ положим

$$\overline{k} = \max\{k < \ell(V) \mid \mathrm{Anc}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)^{3/2}) \not\sim \mathrm{Anc}(V)\},$$

если множество в правой части непустое, в противном случае будем считать $\overline{k} = \ell(V)$. Значение $\overline{k} = \overline{k}(V)$ мы называем *критическим значением для слова V*.

Следующая лемма дает ответы на поставленные выше вопросы.

Лемма 3.1.1. *Пусть $U \sim V$, слово V почти сильно бескубно и $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$, $\{U_k\}_{k=1}^{\ell(U)}$ — главные ряды слов V и U соответственно. Тогда если пара $(\mathsf{r_T}(V_k), \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k)))$ при некотором $k < \ell(V)$ является плохой, то значение k является критическим для слова V.*

Доказательство. Если все пары $(\mathsf{r_T}(V_k), \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k)))$ для $k = 1, \ldots, \min\{\ell(V), \ell(U)\}$ являются хорошими, то, по лемме 2.6.2, $\ell(U) = \ell(V)$, поэтому условие $k < \min\{\ell(V), \ell(U)\}$ эквивалентно условию $k < \ell(V)$, и утверждение леммы выполняется тривиальным образом.

Предположим теперь, что среди пар $(\mathsf{r_T}(V_k), \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k)))$, где $1 \leqslant k \leqslant \min\{\ell(V), \ell(U)\}$, встречаются плохие, и выберем плохую пару $(\mathsf{r_T}(V_{k'}), \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_{k'})))$ с наименьшим значением k'. В силу леммы 2.6.9, мы имеем $V_k \not\sim U_k$ для всех $k = k'{+}1, \ldots, \ell(U)$, причем величина $\ell(U)$ удовлетворяет неравенству $\ell(V) - 1 \leqslant \ell(U) \leqslant \ell(V)$. Согласно замечанию § 2.6 к лемме 2.6.2, пары неэквивалентных слов мы считаем хорошими. Так как, в силу выбора значения k', пары $(\mathsf{r_T}(V_k), \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k)))$ при $k < k'$ также не могут плохими, мы заключаем, что $(\mathsf{r_T}(V_{k'}), \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_{k'})))$ — единственная плохая пара среди всех пар $(\mathsf{r_T}(V_k), \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(U_k)))$, где $k = 1, \ldots, \ell(V){-}1$.

Осталось показать, что $k' = \overline{k}(V)$. В самом деле, из леммы 2.6.9, помимо прочего, следует, что $\mathrm{Anc}(\mathsf{r_T}(V_{k'})^{3/2}) \not\sim \mathrm{Anc}(V)$, поэтому, по определению критического значения, $k' \leqslant \overline{k}(V) < \ell(V)$. С другой стороны, согласно той же лемме 2.6.9, любое слово V_k с условием $k > k'$ является регулярным и представимо в виде $V_k = Y_k c_k Y_k$ для некоторого слова $Y_k \in \Sigma^*$ и буквы $c_k \in \Sigma$. В частности, слово V_k не является квадратом, а потому $\mathsf{r_T}(V_k)^{3/2} = \mathsf{r_T}(V_k)$ и $\mathrm{Anc}(\mathsf{r_T}(V_k)^{3/2}) = \mathrm{Anc}(V)$ для любого $k > k'$. Таким образом, критическое значение не может быть больше, чем k', следовательно, $k' = \overline{k}(V)$, что и требовалось доказать. □

Наконец, приведем рекурсивное описание класса эквивалентности $[V]$ для любого почти сильно бескубного слова V.

Лемма 3.1.2. *Пусть слово V почти сильно бескубно и $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$ — главный V-ряд. Для каждого $k = 1, \ldots, \ell(V)$ положим $m_k = \ell(\mathsf{r_T}(V_k)^{3/2})$, и пусть $\{V_{k,j}^{3/2}\}_{j=1}^{m_k}$ — главный ряд слова $\mathsf{r_T}(V_k)^{3/2}$. Тогда*

1) $\mathrm{Anc}(V) \in \mathcal{S}_1 \cup \{1, 2, 12, 21, 11, 22\}$.
2) $[\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}} = h[k]\theta([V_{k+1}])t[k]$ *для любого некритического* $k < \ell(V)$.
3) $[\mathsf{r_T}(V_{\overline{k}})]_{\mathsf{r}} = h[\overline{k}]\theta([V_{\overline{k}+1}])t[\overline{k}] \cup h[\overline{k}]\theta([V_{\overline{k},2}^{3/2}])t[\overline{k}]$ *для критического значения* $\overline{k} < \ell(V)$.
4) $\mathrm{Anc}(\mathsf{r_T}(V_{\overline{k}})^{3/2}) \in \mathcal{S}_2 \cup \{11, 22\}$, *если* $\overline{k} = \overline{k}(V) < \ell(V)$.
5) $[V_{\overline{k},j}^{3/2}]_{\mathsf{r}} = h[\overline{k}{-}1{+}j]\,\theta([V_{\overline{k},j+1}^{3/2}])\,t[\overline{k}{-}1{+}j]$, *где* $\overline{k} = \overline{k}(V)$, *для любого* $j = 2, \ldots, m_{\overline{k}} - 1$.
6) $[V_{\overline{k},j}^{3/2}]_{\mathsf{r_1}} = \mathsf{r}^{-1}([V_{\overline{k},j}^{3/2}]_{\mathsf{r}})$, *где* $\overline{k} = \overline{k}(V)$, *для любого* $j = 2, \ldots, m_{\overline{k}} - 1$.
7) $[\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r_1}} = \mathsf{r}^{-1}([\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}})$ *для любого* $k = 1, \ldots, \ell(V){-}1$.
8) $[V_k]_{\mathsf{r_1}} = \mathsf{r_T}^{-1}(L[k][\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r_1}}R[k])$ *для любого* $k = 1, \ldots, \ell(V){-}1$.
9) $[V_k] = \mathsf{r_1}^{-1}([V_k]_{\mathsf{r_1}})$, $[V_{k,j}^{3/2}] = \mathsf{r_1}^{-1}([V_{k,j}^{3/2}]_{\mathsf{r_1}})$, *где* $k = 1, \ldots, \ell(V){-}1$ *и* $j = 2, \ldots, m_k{-}1$.

Доказательство. Первое утверждение повторяет лемму 2.6.1 (1). Пусть $\overline{k} = \overline{k}(V)$ и $\overline{k} < \ell(V)$. Тогда для слова $\mathsf{r_T}(V_{\overline{k}})$, очевидно, критическое значение равно единице. В силу леммы 3.1.1, все пары $(\mathsf{r_T}(V_{\overline{k}+j-1}), \mathsf{r}(\mathsf{r_T}(V^{3/2}_{\overline{k},j})))$ при $1 < j < m_{\overline{k}}$ являются хорошими, поэтому, ввиду леммы 2.6.2 и условия $\mathrm{Anc}(V) \not\sim \mathrm{Anc}(\mathsf{r_T}(V_{\overline{k}})^{3/2})$, пара $(\mathsf{r_T}(V_{\overline{k}}), \mathsf{r_T}(V_{\overline{k}})^{3/2})$ является плохой и, как легко видеть, удовлетворяет условию леммы 2.6.9. В частности, из леммы 2.6.9 (6, 7) немедленно следует утверждение 4. Кроме того, слова $V^{3/2}_{\overline{k},j}$ регулярны для всех $j < m_{\overline{k}}$, и мы имеем $h'[j] = h[\overline{k}{-}1{+}j]$ и $t'[j] = t[\overline{k}{-}1{+}j]$, где h' и t' — массивы, ассоциированные со словом $\mathsf{r_T}(V_{\overline{k}})^{3/2}$.

Докажем теперь утверждения 2, 3 и 5. Ясно, что если $U \in [V_{k+1}]$ для некоторого $k < \ell(V)$ или $U \in [V^{3/2}_{\overline{k},j+1}]$ для критического значения $\overline{k} = \overline{k}(V)$ и некоторого $j \in [2, m_{\overline{k}}-1]$, то

$$h_V[k]\theta(U)t_V[k] \sim h_V[k]\theta(V_{k+1})t_V[k] = \mathsf{r_T}(V_k)$$

или, соответственно,

$$h_V[\overline{k}{-}1{+}j]\theta(U)t_V[\overline{k}{-}1{+}j] \sim h_V[\overline{k}{-}1{+}j]\theta(V^{3/2}_{\overline{k},j+1})t_V[\overline{k}{-}1{+}j] = V^{3/2}_{\overline{k},j}\ .$$

Поскольку слова $h_V[k]\theta(U)t_V[k]$ и $h_V[\overline{k}{-}1{+}j]\theta(U)t_V[\overline{k}{-}1{+}j]$ по лемме 2.4.1 (2) регулярны, и $V^{3/2}_{k,1} = \mathsf{r_T}(V_k)^{3/2} \sim \mathsf{r_T}(V_k)$, мы получаем

$$h[k]\theta([V_{k+1}])t[k] \cup h[k]\theta([V^{3/2}_{k,2}])t[k] \subseteq [\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}}$$

и

$$h[\overline{k}{-}1{+}j]\,\theta([V^{3/2}_{\overline{k},j+1}])\,t[\overline{k}{-}1{+}j] \subseteq [V^{3/2}_{\overline{k},j}]_{\mathsf{r}}$$

для любых $k = 1, \ldots, \ell(V){-}1$ и $j = 2, \ldots, m_{\overline{k}}{-}1$.

Обратно, пусть $U \in [\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}}$ для некоторого $k < \ell(V)$ или $U \in [V^{3/2}_{\overline{k},j}]_{\mathsf{r}}$ для некоторого $j \in [2, m_{\overline{k}}-1]$. Рассмотрим главные U- и V-ряды $\{U_i\}_{i=1}^{\ell(U)}$ и $\{V_i\}_{i=k}^{\ell(V)}$ соответственно. В силу лемм 2.6.2 и 2.6.9, если пара $(U, \mathsf{r_T}(V_k))$ является хорошей, то $U_2 \sim V_{k+1}$, в противном случае $U_2 \sim V^{3/2}_{k,2}$, откуда мы получаем

$$U \in h[k]\theta([V_{k+1}])t[k] \cup h[k]\theta([V^{3/2}_{k,2}])t[k]$$

в том случае, когда $U \in [\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}}$. Согласно леммам 2.6.9 (5) и 2.6.7 (8), длина слова $V^{3/2}_{\overline{k},j}$ при $1 < j < m_{\overline{k}}$ нечетна, следовательно, функция η отрезает от слова $V^{3/2}_{\overline{k},j}$ только одну букву. По лемме 2.4.2, пара $(U, V^{3/2}_{\overline{k},j})$ является хорошей, поэтому

$$U \in h[\overline{k}{-}1{+}j]\,\theta([V^{3/2}_{\overline{k},j+1}])\,t[\overline{k}{-}1{+}j],$$

когда $U \in [V^{3/2}_{\overline{k},j}]_{\mathsf{r}}$. Таким образом, мы имеем

$$[\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}} = h[k]\theta([V_{k+1}])t[k] \cup h[k]\theta([V^{3/2}_{k,2}])t[k] \quad \text{и} \quad [V^{3/2}_{\overline{k},j}]_{\mathsf{r}} = h[\overline{k}{-}1{+}j]\,\theta([V^{3/2}_{\overline{k},j+1}])\,t[\overline{k}{-}1{+}j]$$

для любых $k = 1, \dots, \ell(V){-}1$ и $j = 2, \dots, m_{\overline{k}} - 1$.

Заметим, что при $k < \overline{k}$ слово $\mathsf{r_T}(V_k)$ имеет критическое значение $\overline{k}{-}k{+}1$, а при $k > \overline{k}$ слово $\mathsf{r_T}(V_k)$ имеет критическое значение $\ell(V){-}k{+}1$. Мы видим, что для любого некритического значения $k < \ell(V)$ справедливо $\overline{k}(V_k) > 1$, поэтому пара $(U, \mathsf{r_T}(V_k))$ — хорошая для любого слова $U \in [\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}}$. В частности, хорошей является пара $(\mathsf{r_T}(V_k), \mathsf{r_T}(V_k)^{3/2})$, откуда мы получаем $V_{k+1} \sim V_{k,2}^{3/2}$ и, окончательно, $[V_{k+1}] = [V_{k,2}^{3/2}]$, завершая, тем самым, доказательство утверждений 2, 3 и 5. Попутно мы установили, что класс эквивалентности $[V_{k,2}^{3/2}]$ совпадает с классом $[V_{k+1}]$ тогда и только тогда, когда значение k не является критическим.

Утверждения 6, 7, и 9 справедливы в силу наблюдения 3.1.1. Осталось доказать утверждение 8. Предположим, что слово U является $\mathsf{r_1}$-редуцированным и $U \sim V_k$. Так как $k < \ell(V)$, мы имеем $V_k \notin \mathcal{S}_1$, поэтому $\mathsf{r_T}(U) \sim \mathsf{r_T}(V_k)$ по предложению 2.3.3. Следовательно, мы имеем $L_V[k]\mathsf{r_T}(U)R_V[k] \in L_V[k][\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r_1}}R_V[k]$. Рассмотрим массивы L_U и R_U, ассоциированные со словом U. Из лемм 2.6.2 и 2.6.9 вытекает, что $L_V[k] = L_U[1]$ и $R_V[k] = R_U[1]$. Таким образом, мы имеем $L_V[k]\mathsf{r_T}(U)R_V[k] = L_U[1]\mathsf{r_T}(U)R_U[1] \sim U$ по определению операции $\mathsf{r_T}$ и нерегулярных хвостов, и $\mathsf{r_T}(L_U[1]\mathsf{r_T}(U)R_U[1]) = \mathsf{r_T}(U)$. Согласно определению ${\mathsf{r_T}}^{-1}$, это означает, что $U \in {\mathsf{r_T}}^{-1}(L_V[k]\,[\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r_1}}\,R_V[k])$.

Обратно, пусть $U \in {\mathsf{r_T}}^{-1}(L[k]\,[\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r_1}}\,R[k])$. Тогда слово U является $\mathsf{r_1}$-редуцированным и существует слово $U' \in [\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r_1}}$ такое, что $U \sim L[k]U'R[k]$ и $\mathsf{r_T}(U) = \mathsf{r_T}(L[k]U'R[k])$. Следовательно, $U \sim L[k]U'R[k] \sim L[k]\mathsf{r_T}(V_k)R[k] = V_k$, что завершает доказательство леммы. $\square$

3.1.2 Гипотеза Бжозовского

Сформулируем основной результат § 3.1.

Теорема 3.1. *Для любого почти сильно бескубного слова V класс $[V]$ является рациональным языком.*

Предварительно докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 3.1.3. *Пусть U — $\widetilde{AB}$-целое слово, не содержащее нередуцируемых хвостов. Тогда если язык $[U]_{\mathsf{r}}$ рациональный, то язык $[U]_{\mathsf{r_1}}$ также является рациональным.*

Доказательство. Для любого слова $U \in \Sigma^*$ и целого положительного числа k, определим $\mathrm{suff}(U,k)$ как k-буквенный суффикс слова U, если $k \leqslant |U|$, и $\mathrm{suff}(U,k) = U$ в противном случае.

Предположим, что язык $[U]_{\mathsf{r}}$ является рациональным, и ДКА $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, T)$ распознает $[U]_{\mathsf{r}}$. Построим новый ДКА $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', \delta', q_0', T')$, полагая

$$Q' = \{(q,W) \mid q \in Q, W{\in}\Sigma^*, |W|{\leqslant}7\},\ q_0' = (q_0, \lambda),\ T' = \{(t,W){\in}Q' \mid t \in T\},$$
$$\text{и}\ \ \delta'((q,W),c) = (\delta'(q,c), \mathrm{suff}(Wc,7))\ \text{для любых}\ (q,W) \in Q',\ c \in \Sigma\ .$$

Таким образом, ДКА $\mathcal{A}'$ получается из $\mathcal{A}$ заменой каждого состояния множеством копий для хранения информации о последних семи обработанных символах входного слова. Легко видеть, что $\delta'(q_0', W) = (\delta(q_0, W), \mathrm{suff}(W, 7))$ для любого слова $W \in \Sigma^*$, поэтому автоматы $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}$ распознают один и тот же язык.

Теперь по детерминированному автомату $\mathcal{A}'$ построим недетерминированный конечный автомат $\mathcal{A}'' = (\Sigma, Q'', \delta'', q_0', T'')$, добавив по 18 копий для каждого состояния $q \in Q$:

$$Q'' = Q' \cup \{(q, la), (q, lb) \mid q \in Q, l \in [1, 9]\} \ .$$

Состояния $(q, 5a)$ и $(q, 5b)$ объявим терминальными, если $q \in T$, остальные добавляемые состояния терминальными не являются. Для каждого $q \in Q$, введем шесть множеств переходов, содержащих добавденные копии состояния q. Три из них (A-*множества*) показаны на рис. 3.1, B-*множества* определяются симметрично с точностью до инвертирования букв.

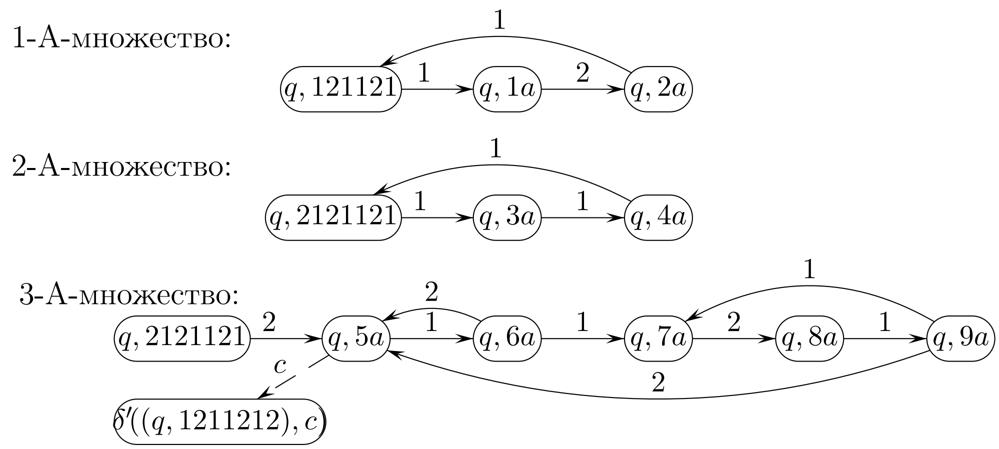

Рис. 3.1: *A-множества переходов. Пунктирный переход определен для любого* $c \in \Sigma$.

Заметим, что для любого $q \in Q$ состояния $(q, 5a)$ и $(q, 5b)$ «дублируют», соответственно, состояния $(q, 1211212)$ и $(q, 2122121)$ (именно поэтому мы разрешаем им быть терминальными в зависимости от того, является ли терминальным состояние q). Как мы скоро увидим, 1-, 2- и 3-множества позволяют распознавать подслова из языков $121\widetilde{A}^*121$ и $212\widetilde{B}^*212$, причем 3-множества обрабатывают внутренние подслова входного слова, а 1- и 2-множества корректно обрабатывают префиксы и, соответственно, суффиксы указанного вида, не позволяя автомату принимать слова, имеющие нередуцируемый префикс и/или суффикс.

Мы утверждаем, что автомат $\mathcal{A}''$ распознает язык $[U]_{\mathsf{r}_1}$. Действительно, пусть $W \in [U]_{\mathsf{r}}$, рассмотрим множество $\mathsf{r}^{-1}(W)$. Любое слово из этого множества получается из W путем последовательных вставок слов из языка $\widetilde{A}$ внутри вхождений подслова 11 и слов из языка $\widetilde{B}$ внутри вхождений подслова 22. Так как никакое слово из языка $1\widetilde{A}1$ (соответственно, $2\widetilde{B}2$) не содержит подслова 22 (соотв., 11), эти два вида вставок могут быть изучены независимо друг от друга. В силу симметрии, мы рассмотрим только вставки слов из языка

$\widetilde{A}$. Поскольку все слова из $\mathsf{r}^{-1}(W)$ являются $\widetilde{AB}$-целыми, любая такая вставка приходится на середину некоторого вхождения подслова 121121, при этом, если слово W начинается с 121121 и/или заканчивается на 121121, то вставлять в середину такого префикса и/или суффикса мы можем только слово 121 (сколько угодно раз), потому что слова из множества $\mathsf{r}^{-1}(W)$ не могут иметь нередуцируемые хвосты. Более того, слово W не содержит подслова 11211, поэтому любое внутреннее подслово 121121 слова W входит в него внутри подслова 21211212. Таким образом, произвольное слово из множества $\mathsf{r}^{-1}(W)$ может быть получено из слова W путем замены, с точностью до инвертирования букв, префикса 121121 и/или суффикса 121121 на слово вида $121(121)^*121$ (если такой префикс и/или суффикс существует) и замены всех подслов 21211212 на некоторые слова из языка $2121\widetilde{A}^*1212$.

Используя 1- и 2-A-множества, НКА $\mathcal{A}''$ распознает любое слово из языка $121(121)^*121X$ (соотв., $X121(121)^*121$) всегда, когда ДКА $\mathcal{A}'$ распознает слово $121121X$ (соотв., $X121121$) для некоторого $X \in \Sigma^*$. Кроме того, если слово $X'21211212X''$, где $X', X'' \in \Sigma^*$, принимается ДКА $\mathcal{A}'$, то НКА $\mathcal{A}''$ принимает все слова языка $X'2121(121)^*1212X''$, используя 2-A-множества, и все слова языка $X'2121(121)^*(1212(12)^*1)\widetilde{A}^*1212X''$, используя 2- и 3-$A$-множества. Симметрично показывается, что B-множества позволяют НКА $\mathcal{A}''$ принимать слова, распознаваемые ДКА $\mathcal{A}'$, после аналогичных вставок в них слов из множества $\widetilde{B}$. Следовательно, автомат $\mathcal{A}''$ распознает все слова из языка $\mathsf{r}^{-1}([U]_{\mathsf{r}})$, который, ввиду наблюдения 3.1.1 (2), совпадает с языком $[U]_{\mathsf{r}_1}$.

Обратно, пусть слово W принимается автоматом $\mathcal{A}''$. Покажем, что $W \in [U]_{\mathsf{r}_1}$. Пусть $\alpha = (q''_0, q''_1, \ldots, q''_{|W|})$ — путь в автомате $\mathcal{A}''$ из начальной вершины q''_0 в терминальную вершину $q''_{|W|}$, вдоль которого читается слово W. Заменим вершину q''_i вида $(q, 5a)$, где $q \in Q$, состоянием $(q, 1211212)$ для всех i таких, что $q''_{i-1} = (q, 2121121)$ и $W[i] = 2$; симметричные замены произведем и с вершинами вида $(q, 5b)$, где $q \in Q$. После этого удалим все вершины в α, принадлежащие множеству $Q'' \setminus Q'$. В результате мы получим путь α' в автомате $\mathcal{A}'$, помеченный некоторым словом W'. Таким образом, $W' \in [U]_{\mathsf{r}}$.

Нетрудно проверить, что удаление вершин в α, участвующих в переходах 1- и 2-множеств, индуцирует редукции вида $121(121)^*121 \to 121121$ и $212(212)^*212 \to 212212$ внутри слова W. Удаление вершин пути α, входящих в переходы 3-множеств, приводит к следующим редукциям в слове W:

$$2121A1212 \to 21211212, \quad 1212B2121 \to 12122121,$$

где $A \in \widetilde{A}^*$ и $B \in \widetilde{B}^*$, и некоторым редукциям вида

$$1212(12)^l \to 1212 \quad \text{и} \quad 2121(21)^l \to 2121,$$

где $l \geqslant 1$. Так как в результате всех этих преобразований мы получаем вполне регулярное слово W', мы заключаем, что $W' \sim \mathsf{r}(W)$, слово W является r_1-редуцированным, любое слово из языка $1\widetilde{A}1$ или $2\widetilde{B}2$ входит в W только внутри подслова $121\widetilde{A}121$ или, соответственно, $212\widetilde{B}212$, то есть слово W является к тому же и $\widetilde{AB}$-целым, и при этом W не содержит хвостов второго рода, так как любой такой хвост сохраняется при всех описанных выше преобразованиях. Тогда, по предложению 2.2.1, мы имеем $W \sim \mathsf{r}(W) \sim W' \sim U$, откуда $W \in [U]_{\mathsf{r}_1}$, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 3.1.4. *Если язык $[U]_{\mathsf{r}_1}$ — рациональный для некоторого слова $U \in \Sigma^*$, то класс $[U]$ также является рациональным языком.*

Доказательство. Предположим, что ДКА $\mathcal{A}{=}(\Sigma, Q, \delta, q_0, T)$ распознает язык $[U]_{\mathsf{r}_1}$. Построим новый ДКА $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', \delta', q_0', T')$ следующим образом:

$$Q' = \{(q, W) \mid q \in Q, W{\in}\Sigma^*, |W|{\leqslant}2\},\ q_0' = (q_0, \lambda),\ T' = \{(t, W){\in}Q' \mid t \in T\},$$
$$\text{и}\ \ \delta'((q, W), c) = (\delta'(q, c), \mathrm{suff}(Wc, 2))\ \text{для любых}\ (q, W) \in Q',\ c \in \Sigma\ .$$

Ясно, что автоматы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ распознают один и тот же язык $[U]_{\mathsf{r}_1}$. Вторая компонента каждого состояния из Q' хранит два последних обработанных символа входного слова. Добавим петли, помеченные буквами 1 и 2 на все состояния вида $(q, 11)$ и, соответственно, $(q, 22)$. Легко видеть, что получившийся автомат распознает язык ${\mathsf{r}_1}^{-1}([U]_{\mathsf{r}_1}) = [U]$, поэтому класс $[U]$ является рациональным языком. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Пусть V — почти сильно бескубное слово и $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$ — главный V-ряд. Для критического значения $\overline{k}$ слова V положим $m_{\overline{k}} = \ell(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{\overline{k}})^{3/2})$, и пусть $\{V_{\overline{k},\,j}^{3/2}\}_{j=1}^{m_{\overline{k}}}$ обозначает главный ряд слова $\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)^{3/2}$.

Индукцией по $j = m_{\overline{k}}, \ldots, 2$ нетрудно показать, что каждый класс $[V_{\overline{k},\,j}^{3/2}]$ является рациональным языком. Действительно, база индукции $(j = m_{\overline{k}})$ справедлива в силу леммы 3.1.2 (1, 4) (утверждение 1 применяется в случае $\overline{k} = \ell(V)$), согласно которой $V_{\overline{k},\,m_{\overline{k}}}^{3/2} = \mathrm{Anc}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{\overline{k}}^{3/2})) \in \mathcal{S}$, и лемм 2.3.1, 2.3.3 и 2.6.8, где описываются классы эквивалентности для всех слов из множества $\mathcal{S}$. Для доказательства шага индукции заметим, что класс рациональных языков замкнут относительно взятия образов морфизмов, поэтому, если класс $[V_{\overline{k},\,j+1}^{3/2}]$ является рациональным языком для некоторого $j \in [2, m_{\overline{k}} - 1]$, то язык $[V_{\overline{k},\,j}^{3/2}]_\mathsf{r}$ по лемме 3.1.2 (5) также является рациональным. Так как все слова $V_{\overline{k},\,j}^{3/2}$ при $j < m_{\overline{k}}$ регулярны (см. доказательство леммы 3.1.2), мы можем применить к языку $[V_{\overline{k},\,j}^{3/2}]_\mathsf{r}$ сперва лемму 3.1.3, а затем лемму 3.1.4, обеспечивая выполнение шага индукции.

Итак, классы $[V_{\overline{k},\,j}^{3/2}]$ для всех $j = 2, \ldots, m_{\overline{k}}$ являются рациональными языками. В дальнейшем нас будет интересовать лишь класс $[V_{\overline{k},\,2}^{3/2}]$. Теперь докажем индукцией по $k = \ell(V), \ldots, 1$, что каждый класс $[V_k]$ является рациональным языком. База индукции $(k = \ell(V))$ следует из лемм 3.1.2 (1), 2.3.1 и 2.3.3. Предположим теперь, что класс $[V_{k+1}]$ является рациональным языком для некоторого $k > 1$ и докажем, что класс $[V_k]$ тоже является рациональным языком. Согласно лемме 3.1.2 (2, 3), язык $[\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)]_\mathsf{r}$ или совпадает с языком $h[k]\theta([V_{k+1}])t[k]$, рациональным по предположению индукции, или, при $k = \overline{k}$, совпадает с объединением рациональных языков $h[\overline{k}]\theta([V_{\overline{k}+1}])t[\overline{k}]$ и $h[\overline{k}]\theta([V_{\overline{k},\,2}^{3/2}])t[\overline{k}]$. Мы видим, что в любом случае, $[\mathsf{r_T}(V_k)]_\mathsf{r}$ — рациональный язык. Очевидно, почти сильно бескубное слово $\mathsf{r_T}(V_k)$ удовлетворяет условиям леммы 3.1.3, поэтому язык $[\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}_1}$, следовательно, язык $L[k][\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}_1}R[k]$ также являются рациональными.

Из определения нерегулярных хвостов, функции $\mathsf{r_T}$ и отображения $\mathsf{r_T}^{-1}$ легко получить, что

$$\mathsf{r_T}^{-1}(L[k][\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}_1}R[k]) = (L[k]L[k]\overline{L[k]})^*L[k][\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}_1}R[k](\overline{R[k]}R[k]R[k])^* \ .$$

Ввиду леммы 3.1.2 (8), язык $[V_k]_{\mathsf{r}_1}$ оказывается рациональным, откуда, по лемме 3.1.4, класс $[V_k]$ является рациональным языком.

Итак, индукцией по $k = \mathrm{Anc}(V), \ldots, 1$ мы доказали, что каждый класс $[V_k]$ является рациональным языком. В частности, это верно и для класса $[V_1] = [V]$. □

3.1.3 Слова минимальной длины

Докажем следующую теорему.

Теорема 3.2. *Если слово V почти сильно бескубно и $V \notin \{111, 222\}$, то V — единственное слово минимальной длины в классе $[V]$.*

Доказательство. Пусть V — почти сильно бескубное слово и $\overline{k}$ — критическое значение для слова V. Положим $m_{\overline{k}} = \ell(\mathsf{r_T}(V_{\overline{k}})^{3/2})$. Рассмотрим главные ряды $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$ и $\{V_{\overline{k},j}^{3/2}\}_{j=1}^{m_{\overline{k}}}$ для слов V и $\mathsf{r_T}(V_{\overline{k}})^{3/2}$ соответственно.

Ясно, что все слова минимальной длины класса $[V_k]$ для произвольного $k < \ell(V)$ лежат в языке $[V_k]_{\mathsf{r}_1}$. В ходе доказательства теоремы 3.1 мы установили, что

$$[V_k]_{\mathsf{r}_1} = \mathsf{r_T}^{-1}(L[k][\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}_1}R[k]) = (L[k]L[k]\overline{L[k]})^*L[k][\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}_1}R[k](\overline{R[k]}R[k]R[k])^*,$$

поэтому все слова минимальной длины класса $[V]$ содержатся в языке $L[k][\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}_1}R[k]$. Наконец, ввиду того, что почти сильно бескубное слово $\mathsf{r_T}(V_k)$ является $\widehat{AB}$-целым и не содержит нередуцируемых хвостов, мы имеем $[\mathsf{r_T}(V_k)]_\mathsf{r} \subseteq [\mathsf{r_T}(V_k)]_{\mathsf{r}_1}$. Так как $|\mathsf{r}(U)| < |U|$ для любого нерегулярного слова U, мы заключаем, что совокупности слов минимальной длины языков $[V_k]$ и $L[k][\mathsf{r_T}(V_k)]_\mathsf{r}R[k]$ совпадают для любого $k = 1, \ldots, \ell(V) - 1$. Аналогично, все слова минимальной длины класса $[V_{\overline{k},j}^{3/2}]$, где $j = 2, \ldots, m_{\overline{k}} - 1$, лежат в его подмножестве $[V_{\overline{k},j}^{3/2}]_\mathsf{r}$.

Докажем индукцией по $j = m_{\overline{k}}, \ldots, 2$ (и индукцией по $k = \ell(V), \ldots, \overline{k} + 1$), что каждое слово $V_{\overline{k},j}^{3/2}$ (соотв., V_k) является единственным словом минимальной длины в своем классе эквивалентности. Действительно, в силу лемм 2.3.1, 2.3.3 и 2.6.8, это верно для всех слов множества $\mathcal{S}$, в частности, для слов $\mathrm{Anc}(\mathsf{r_T}(V_{\overline{k}})^{3/2})$ и $\mathrm{Anc}(V)$, которые лежат в $\mathcal{S}$ по лемме 3.1.2 (1, 4). Очевидно, для любого языка $\mathcal{L} \subset \Sigma^*$ и слов $X, Y \in \Sigma^*$, слово W тогда и только тогда является словом минимальной длины в языке $\mathcal{L}$, когда $X\theta(W)Y$— слово минимальной длины в языке $X\theta(\mathcal{L})Y$. Шаг индукции теперь следует из леммы 3.1.2 $(2, 5)$, ввиду равенств

$$V^{3/2}_{\overline{k},j} = h[\overline{k}{-}1{+}j]\,\theta(V^{3/2}_{\overline{k},j+1})\,t[\overline{k}{-}1{+}j] \quad \text{и} \quad V_k = L[k]h[k]\theta(V_{k+1})t[k]R[k]$$

для любых $j = 2, \ldots, m_{\overline{k}} - 1$ и $k = 1, \ldots, \ell(V) - 1$ (согласно леммам 2.6.9 и 2.6.6).

Рассмотрим теперь критическое значение $\overline{k}$ (в случае, если $\overline{k} < \ell(V)$). По лемме 3.1.2 (3), словами минимальной длины класса $[V_{\overline{k}}]$ могут быть только слова $L[\overline{k}]h[\overline{k}]\theta(V_{\overline{k}+1})t[\overline{k}]R[\overline{k}]$ и $L[\overline{k}]h[\overline{k}]\,\theta(V^{3/2}_{\overline{k},2})\,t[\overline{k}]R[\overline{k}]$, первое из которых совпадает с $V_{\overline{k}}$. С учетом того, что

$$|V_{\overline{k}}| = |L[\overline{k}]\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{\overline{k}})R[\overline{k}]| < |L[\overline{k}]\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{\overline{k}})^{3/2}R[\overline{k}]| = |L[\overline{k}]h[\overline{k}]\,\theta(V^{3/2}_{\overline{k},2})\,t[\overline{k}]R[\overline{k}]|,$$

мы приходим к выводу, что $V_{\overline{k}}$ — единственное слово минимальной длины в классе $[V_{\overline{k}}]$.

Далее, индукцией по $k = \overline{k}, \ldots, 1$ показывается, что V_k — единственное слово минимальной длины в классе $[V_k]$ (значение $k = \overline{k}$ служит базой индукции), в частности, класс $[V]$ содержит единственное слово минимальной длины — слово V_1. По условию, слово V почти сильно бескубно и $V \notin \{111, 222\}$, поэтому $V_1 = \mathsf{r}_1(V) = V$, что и требовалось доказать. $\square$

§ 3.2 Индекс роста классов эквивалентности

В этом параграфе приводятся количественные характеристики классов эквивалентности, содержащих почти сильно бескубные слова, путем оценки индекса роста таких классов. Мы покажем, что если почти сильно бескубное слово V является достаточно длинным, комбинаторная сложность языка $[V]$ растет экспоненциально быстро. Тем самым мы подтвердим, что рассматриваемые нами классы эквивалентности весьма содержательны, и полученный нами в главе 2 алгоритм позволяет решать проблему равенства слов на довольно широком подмножестве свободного моноида Σ^*.

Теорема 3.3. *Пусть V — почти сильно бескубное слово и $|V| > 50$. Тогда $\mathsf{gr}([V]) \geqslant \varphi$, где $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ — золотое сечение.*

Доказательство. Рассмотрим языки

$$\mathcal{L}_A = (1 + \widetilde{A})^+, \quad \mathcal{L}^0_A = (1 + \widetilde{A})^*, \quad \mathcal{L}_B = (2 + \widetilde{B})^+ \quad \text{и} \quad \mathcal{L}^0_B = (2 + \widetilde{B})^* \ .$$

Покажем, что $\mathsf{gr}(\mathcal{L}_A) = \varphi$. Действительно, нетрудно убедиться, что

$$\mathcal{L}_A = 1(21)^*\mathcal{L}^0_A = 1\mathcal{L}^0_A \cup 121(21)^*\mathcal{L}^0_A = 1\mathcal{L}^0_A \cup 12\mathcal{L}_A \ .$$

Поскольку ни одно слово из языка $1\mathcal{L}^0_A$ не начинается с подслова 12, языки $1\mathcal{L}^0_A$ и $12\mathcal{L}_A$ не пересекаются, поэтому

$$\mathsf{p}_{\mathcal{L}_A}(n) = \mathsf{p}_{\mathcal{L}^0_A}(n-1) + \mathsf{p}_{\mathcal{L}_A}(n-2) \ .$$

Так как $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_A^0 \setminus \{\lambda\}$, мы имеем $\mathsf{p}_{\mathcal{L}_A^0}(n) = \mathsf{p}_{\mathcal{L}_A}(n)$ для любого $n > 0$. Таким образом, комбинаторная сложность языка $\mathcal{L}_A$ удовлетворяет хорошо известному рекуррентному соотношению

$$\mathsf{p}_{\mathcal{L}_A}(n) = \mathsf{p}_{\mathcal{L}_A}(n-1) + \mathsf{p}_{\mathcal{L}_A}(n-2)$$

при $n \geqslant 2$, решая которое, мы найдем функцию $\mathsf{p}_{\mathcal{L}_A}(n)$ в виде $\mathsf{p}_{\mathcal{L}_A}(n) = C_1\varphi^n + C_2(1-\varphi)^n$ для некоторых констант $C_1, C_2 \neq 0$. Ввиду неравенства $|1-\varphi| < 1$, отсюда следует,что $\mathsf{gr}(\mathcal{L}_A) = \varphi$. Симметрично доказывается, что $\mathsf{gr}(\mathcal{L}_B) = \varphi$.

Пусть теперь V — произвольное слово, и $V = X21211212Z$ для некоторых $X, Z \in \Sigma^*$. Так как $\mathsf{r}(2121A1212) = 21211212$ и слово $\mathsf{r_1}(2121A1212)$ является $\widetilde{AB}$-целым для любого слова $A \in \mathcal{L}_A$, по предложению 2.2.1 мы получаем $2121A1212 \sim 21211212$. Следовательно, $X2121\mathcal{L}_A1212Z \subseteq [V]$. В результате, для некоторой константы $C > 0$ и любого $n > |V|$, справедлива оценка:

$$\mathsf{p}_{[V]}(n) \geqslant \mathsf{p}_{\mathcal{L}_A}(n - |V|) \geqslant C\varphi^{-|V|} \cdot \varphi^n,$$

откуда $\mathsf{gr}([V]) \geqslant \varphi$. Аналогично рассматривается случай $12122121 \leqslant V$.

Таким образом, достаточно показать, что любое почти сильно бескубное слово длиной более 50 символов содержит подслово 12122121 или 21211212. Рассмотрим слово

$$\mathbf{t}_5 = 1221\,2112\,21\mathbf{12}\,\mathbf{1221}\,\mathbf{2112}\,\mathbf{12}21\,1221\,2112\;\;.$$

Заметим, что его префикс и суффикс длины 18 содержат, соответственно, подслова 12122121 или 21211212. Очевидно, то же справедливо и для слова $\overline{\mathbf{t}}_5$. Поскольку слово $\mathbf{t}_n$ при $n > 5$ можно представить в виде

$$\mathbf{t}_n = \theta^5(\mathbf{t}_{n-5}[1]) \dots \theta^5(\mathbf{t}_{n-5}[|\mathbf{t}_{n-5}|]),$$

любое подслово X слова $\mathbf{t}_n$ такое, что $|X| \geqslant 35$, обязательно накрывает 18-буквенный префикс или 18-буквенный суффикс слова $\theta^5(\mathbf{t}_{n-5}[i])$ для некоторого $i \leqslant |\mathbf{t}_{n-5}|$, поэтому X содержит подслово 12122121 или 21211212.

Согласно [30], произвольное сильно бескубное слово U содержит подслово X подходящего слова Туэ-Морса такое, что $|X| \geqslant 7|U|/10$. Если $|U| \geqslant 50$, то длина такого подслова X не меньше 35 символов, и, следовательно, слово U содержит подслово 12122121 или 21211212. Так как, по определению, почти сильно бескубное слово V имеет сильно бескубное подслово длины $|V| - 1$, мы получаем требуемое. $\square$

Теорема 3.3 дает количественную оценку класса $[V]$, но при этом ничего не говорит о словах, составляющих класс $[V]$. Легко заметить, однако, что всякое слово из языка $(1+\widetilde{A})^*$ (и языка $(2+\widetilde{B})^*$), за исключением конечного числа слов, содержит куб: подслово 111, $(121)^3$, $(12)^3$ или $(12121)^3$ (соответственно, 222, (212), $(21)^3$ или $(21212)^3$). Мы видим, что основной вклад в оценку $\mathsf{gr}([V]) \geqslant \varphi$ вносят слова с локальной экспонентой 3 и более. В то же время, очевидно, что любое слово при помощи замен вида $YYY \to YY$, где $Y \in \Sigma^+$, можно преобразовать в эквивалентное ему бескубное слово. Поэтому при решении проблемы равенства слов интерес представляют, главным образом, пары бескубных слов. В связи с этим возникает вопрос: как много таких слов может содержать класс $[V]$, если V — почти сильно бескубное слово? В § 2.1 уже говорилось, что, согласно результату К. В. Костоусова, для любого наперед заданного числа N найдется класс эквивалентности, содержащий не менее N бескубных слов. В этом параграфе мы усилим этот результат, показав, в частности, что некоторые классы содержат бесконечно много таких слов.

Договоримся язык всех бескубных слов произвольного класса $[U]$ обозначать через $[U]_{<3}$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4. $\mathsf{gr}([\mathbf{t}_n]_{<3}) \geqslant \varphi^{1/74}$ *для любого* $n \geqslant 11$.

Заметим, что, поскольку слово $\mathbf{t}_n$ является префиксом слова $\mathbf{t}_{n+1}$ для любого $n \geqslant 0$, n-ые буквы всех слов Туэ-Морса, длина которых больше или равна n, совпадают. Это позволяет рассмотреть посимвольный «предел» последовательности слов Туэ-Морса $\{\mathbf{t}_n\}_{n=1}^{\infty}$, положив $\mathbf{t}_\infty[n] = \mathbf{t}_n[n]$ для любого $n \geqslant 1$. Последовательности

$$\mathbf{t}_\infty = \mathbf{t}_\infty[1]\mathbf{t}_\infty[2]\dots\mathbf{t}_\infty[n]\dots \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{t}}_\infty = \overline{\mathbf{t}}_\infty[1]\overline{\mathbf{t}}_\infty[2]\dots\overline{\mathbf{t}}_\infty[n]\dots$$

называются *бесконечными словами Туэ-Морса*. Оба бесконечных слова Туэ-Морса являются сильно бескубными ([31]), что означает, что локальная экспонента любого конечного подслова слова $\mathbf{t}_\infty$ или $\overline{\mathbf{t}}_\infty$ не превосходит двух, или, что то же самое, слова $\mathbf{t}_\infty$ или $\overline{\mathbf{t}}_\infty$ не содержат подслов вида $XXX[1]$, где $X \in \Sigma^+$.

На основе морфизма θ построим морфизмы $\theta_1, \theta_2\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$, действующие на элементах алфавита Σ следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_1(1) &= 1221211221\ \ 1212 \phantom{\ \mathbf{21212}}\ 2121 \phantom{\ \mathbf{12121}}\ 1212\ \ 2112212112 = \theta^5(1),\\ \theta_2(1) &= 1221211221\ \ 1212\ \mathbf{21212}\ 2121\ \mathbf{12121}\ 1212\ \ 2112212112, \end{aligned}$$

$\theta_1(2) = \overline{\theta_1(1)}$ и $\theta_2(2) = \overline{\theta_2(1)}$. Таким образом, $\theta_1(W) = \theta^5(W)$ для любого $W \in \Sigma^*$, а слово $\theta_2(W)$ получается из слова $\theta^5(W)$ путем вставки слов 12121 и 21212 внутри единственного вхождения подслова 21211212 и, соответственно, 12122121 в каждом из θ^5-образов букв $W[i]$, где $i = 1, \dots, |W|$.

Наконец, положим

$$\widetilde{\theta}(W) = \theta_{\mathbf{t}_\infty[1]}(W[1])\theta_{\mathbf{t}_\infty[2]}(W[2])\dots\theta_{\mathbf{t}_\infty[n]}(W[n]),$$

где $n = |W|$, для любого слова $W \in \Sigma^*$.

Лемма 3.2.1. *Для любого* r_1*-редуцированного слова* W *слово* $\widetilde{\theta}(W)$ *является бескубным.*

Доказательство. Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что существуют r_1-редуцированное слово $W \in \Sigma^*$ и слово $Y \in \Sigma^*$ такие, что $YYY \leqslant \widetilde{\theta}(W)$, и попробуем прийти к противоречию. В дальнейшем слова $\widetilde{\theta}(W[i])$, где $i = 1, \ldots, |W|$, мы будем называть *блоками*; упрощая нотацию, мы будем пользоваться обозначением $B_i = \widetilde{\theta}(W[i])$ для каждого $i = 1, \ldots, |W|$. Таким образом, $\widetilde{\theta}(W) = B_1 \ldots B_{|W|}$.

Сначала исследуем случай $12121 \leqslant Y$. Выделим первое вхождение подслова 12121 в Y: пусть $Y = Y_1 12121 Y_2$, где $Y_1, Y_2 \in \Sigma^*$ и префикс Y_1 не содержит подслова 12121. Тогда в слово YYY подслово 12121 входит как минимум в трех позициях: $|Y_1| + 1$, $|Y_1| + |Y| + 1$ и $|Y_1| + 2|Y| + 1$, причем все эти вхождения содержатся в разных блоках B_p, B_{p+r} и B_{p+r+s}, где $p, r, s > 0$, соответственно. Рассмотрим слово $Y' = Y_2 Y_1$, два вхождения которого в слово $\widetilde{\theta}(W)$ начинаются в блоках B_p и B_{p+r}. Ясно, что если $Y'[5 \ldots 9] = 21212$, то $B_p = B_{p+r} = \theta_2(2)$, иначе $B_p = B_{p+r} = \theta_2(1)$. В любом случае, мы имеем $B_p = B_{p+r}$. Аналогично, рассматривая подслово $Y'[|Y'| - 8 \ldots |Y'| - 4]$, мы однозначно определяем вид блоков B_{p+r} и B_{p+r+s}, причем эти два блока также оказываются равными. Таким образом, $B_p = B_{p+r} = B_{p+r+s}$. Положим $n_1 = 23, n_2 = 14$, если $Y'[5 \ldots 9] = 21212$, и $n_1 = 14, n_2 = 23$ в противном случае. Тогда слово $Y'[1 \ldots n_1]$ является суффиксом блоков B_p, B_{p+r} и B_{p+r+s}, а слово $Y'[|Y'| - n_2 + 1 \ldots |Y'|]$ — префиксом этих блоков. В результате, мы получаем

$$Y'[n_1+1 \ldots |Y'|-n_2] = B_{p+1} \ldots B_{p+r-1} = B_{p+r+1} \ldots B_{p+r+s-1}\ .$$

Следовательно, $r = s$ и $B_{p+i} = B_{p+r+i}$ для любого $i = 1, \ldots, r$. Отсюда, по определению блоков, следует, что $\mathbf{t}_\infty[p + i] = \mathbf{t}_\infty[p + r + i]$ для любого $i = 1, \ldots, r$. Так как к тому же мы имеем $B_p = B_{p+r} = B_{p+2r}$, слово $\mathbf{t}_\infty$ содержит подслово

$$\mathbf{t}_\infty[p \ldots p + 2r] = (\mathbf{t}_\infty[p \ldots p+r-1])^2 \mathbf{t}_\infty[p],$$

что противоречит сильной бескубности слова $\mathbf{t}_\infty$.

Случай $21212 \leqslant Y$ рассматривается симметрично с точностью до инвертирования букв. Предположим теперь, что слово Y не содержит подслов 12121 и 21212. Докажем, что и слово YYY также их не содержит. Действительно, слова 12121 и 21212 могут входить в YYY только на стыке вхождений Y, откуда следует, что слово YYY может иметь только одно из подслов 12121 и 21212. Без ограничения общности, пусть $12121 \leqslant YYY$. Представим Y в виде $Y = Y_1 Y_2 = Y_3 Y_4$, где $Y_1, Y_4 \in \Sigma^*$, $Y_2, Y_3 \in \Sigma^+$ и $Y_2 Y_3 = 12121$. Рассмотрим блок B_p, содержащий первое вхождение подслова 12121 в слово YYY. Ясно, что если $B_p = \widetilde{\theta}(2)$, то подслово 21212, содержащееся в этом блоке, располагается правее подслова 12121, а потому $21212 \leqslant Y_4 Y_1 \leqslant YYY$, и мы приходим к противоречию. С другой стороны, если $B_p = \widetilde{\theta}(1)$, то слово Y_1 лежит в блоке B_p между вхождениями подслов 21212 и 12121, поэтому $|Y_1| \leqslant 8$ и $|YY_3| \leqslant 13$. Мы видим, что в этом случае $YYY_3 \leqslant B_p$, при этом слово YYY_3 содержит два различных вхождения подслова 12121: $YYY_3 = Y_1 12121 Y_4 Y_3$ и $YYY_3 = YY_1 12121$, что невозможно.

Осталось рассмотреть случай, когда слово YYY не содержит подслов 12121 и 21212. Несложно проверить, что все слова B_i бескубны ($1 \leqslant i \leqslant |W|$), поэтому слово YYY начинается и заканчивается в разных блоках. Пусть

$$YYY = Y_1 B_{p+1} \ldots B_{p+r-1} Y_2,$$

где $p, r > 0$, слово Y_1 является суффиксом блока B_p, а слово Y_2 — префиксом блока B_{p+r}. Тогда $B_{p+i} = \theta_1(W[i])$, то есть $\mathbf{t}_\infty[p+i] = 1$, для любого $i = 1, \ldots, r-1$. Ввиду того, что слово $\mathbf{t}_\infty$ сильно бескубно, мы получаем $r \leqslant 3$. Более того, если $\mathbf{t}_\infty[p] = 2$ (или $\mathbf{t}_\infty[p+r] = 2$), то длина суффикса Y_1 блока B_p (соотв., префикса Y_2 блока B_{p+r}) не превосходит 18. Заметим, что для любого $c \in \Sigma$ слова $\theta_1(c)$ и $\theta_2(c)$ имеют общие 18-буквенный префикс и 18-буквенный суффикс, поэтому мы можем считать, что

$$YYY \leqslant \theta_1(W[p \ldots p+r]) = \theta^5(W[p \ldots p+r]),$$

где $r \leqslant 3$. Так как, по условию, слово W является r_1-редуцированным, его подслово $W[p \ldots p+r]$, длина которого не превосходит четырех, сильно бескубно. Как известно, морфизм Туэ-Морса сохраняет свойство слова быть сильно бескубным, следовательно, слово $\theta_1(W[p \ldots p+r])$ также оказывается сильно бескубным. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Доказательство теоремы 3.4. Рассмотрим класс $[\mathbf{t}_{n-6}]$. По условию, $n - 6 \geqslant 5$, поэтому слово $\mathbf{t}_{n-6}$ содержит подслово 12122121. Из доказательства теоремы 3.3 непосредственно следует, что $\mathsf{p}_{[\mathbf{t}_{n-6}]}(i) \geqslant C \cdot \varphi^i$ для некоторой константы $C > 0$ и любого $i \geqslant 1$.

Очевидно, все слова из языка $\theta([\mathbf{t}_{n-6}])$ являются r_1-редуцированными, следовательно. по лемме 3.2.1, все слова из языка $\widetilde{\theta}(\theta([\mathbf{t}_{n-6}]))$ оказываются бескубными. Так как любой морфизм сохраняет отношение $\sim$, в силу определения отображения $\widetilde{\theta}$ и очевидного соотношения $\theta_1(c) \sim \theta_2(c)$ для любого $c \in \Sigma$, мы заключаем, что

$$\widetilde{\theta}(\theta([\mathbf{t}_{n-6}])) \subseteq [\theta^6(\mathbf{t}_{n-6})]_{<3} = [\mathbf{t}_n]_{<3} \ .$$

Заметим, что для любого $W \in [\mathbf{t}_{n-6}]$ слово $\widetilde{\theta}(\theta(W))$ имеет длину $74|W|$. Действительно, мы имеем $|\theta(W)| = 2|W|$ и

$$|\widetilde{\theta}(\theta(W))| = 32|\theta(W)| + 10m = 64|W| + 10m,$$

где m — количество вхождений символа 2 в слово $\mathbf{t}_\infty[1 \ldots 2|W|]$. Так как слово $\mathbf{t}_\infty[1 \ldots 2|W|]$ является префиксом слова $\mathbf{t}_{2|W|}$ и имеет четную длину, $\mathbf{t}_\infty[1 \ldots 2|W|]$ является θ-образом и может быть представлено в виде

$$\mathbf{t}_\infty[1 \ldots 2|W|] = Q_1 \ldots Q_{|W|}, \text{ где } Q_j \in \{12, 21\} \text{ для любого } j = 1, \ldots, |W| \ .$$

Следовательно, число вхождений символов 1 и 2 в слово $\mathbf{t}_\infty[1 \ldots 2|W|]$ одинаково, $m = |W|$ и $|\widetilde{\theta}(\theta(W))| = 74|W|$.

Таким образом, для любого $i > 0$ мы имеем $\mathsf{p}_{[\mathbf{t}_n]_{<3}}(74i) \geqslant C \cdot \varphi^i$, откуда

$$\mathsf{p}_{[\mathbf{t}_n]_{<3}}(i) \geqslant C \cdot \varphi^{i/74}$$

для любого кратного 74 значения i. Теорема теперь следует из определения индекса роста. $\square$

Для произвольного почти сильно бескубного слова V можно построить главный V-ряд $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$ и рассмотреть язык $\widetilde{\theta}(\theta([V_7]))$ при условии, что $\ell(V) \geqslant 7$. Если $L[k] = R[k] = h[k] = t[k] = \lambda$ для всех $k \leqslant 6$ и слово V выбрано такой длины, что $\mathsf{gr}([V_7]) \geqslant \varphi$, доказательство теоремы 3.4 проходит и в этом случае. В общем случае ситуация осложняется тем, что процедура Ancestor может отрезать буквы от слов V_k при $k = 1, \ldots, 6$: поскольку процедуре Normalize приходится восстанавливать отрезанные буквы, мы получаем $V_1 = X\theta^6(V_7)Y$ для некоторых слов $X, Y \in \Sigma^*$ и, следовательно, $X\widetilde{\theta}(\theta([V_7]))Y \subseteq [V]$. Префикс X и суффикс Y могут нарушать бескубность слов из множества $X\widetilde{\theta}(\theta([V_7]))Y$, затрудняя исследование языка $[V]_{<3}$. Автору не удалось получить нижнюю оценку для индекса роста такого языка в общем случае, однако представляется весьма вероятным, что функция $\mathsf{p}_{[V]_{<3}}(n)$ растет экспоненциально при увеличении n для любого достаточно длинного почти бескубного слова V. Косвенно это подтверждается тем, что длина слов X и Y ограничена для любого почти сильно бескубного слова V, в то время как само слово V можно выбрать сколь угодно длинным. Поскольку слово $X\theta^6(V_7)Y$ является почти сильно бескубным, а для получения нижней оценки для индекса роста нам необязательно рассматривать весь класс $[V_7]$, а достаточно рассмотреть слова, получающиеся из V_7 путем вставок определенного вида (см. доказательство теоремы 3.3), то можно предположить, что слова X и Y не будут существенно влиять на рост функции $\mathsf{p}_{[V]_{<3}}(n)$ и индекс роста $\mathsf{gr}([V]_{<3})$.

§ 3.3 Обобщение результатов на почти 7/3-свободные слова

Из теоремы 3.4 следует, что в произвольном классе эквивалентности может быть сколь угодно много (и даже бесконечно много) 3-свободных слов. С другой стороны, теорема 2.1 говорит, что в каждом классе не может быть больше одного 2^+-свободного слова и, исключая классы [11] и [22], больше одного почти 2^+-свободного слова. В связи с этим, интересным представляется вопрос, как распределяются по классам эквивалентности (почти) β-(или β^+)-свободные слова при изменении β в промежутке $[2, 3]$. В частности, интересно было бы найти «границу единственности» — число

$$\sup\{\beta \mid \text{ класс } [V] \text{ содержит не более одного } \beta\text{-свободного слова для любого } V \in \Sigma^*\} \ .$$

В данном параграфе мы покажем, что эта граница по крайней мере не меньше 7/3, обобщив теоремы 2.1, 2.2 на случай почти 7/3-свободных слов.

Теорема 3.5. *В каждом классе эквивалентности, за исключением классов* [11] *и* [22], *содержится не более одного почти* 7/3*-свободного слова. Каждый из классов* [11] *и* [22] *содержит в точности по два почти* 7/3*-свободных слова.*

Теорема 3.6. *Проблема равенства слов для полугруппы* $B(2, 2, 3)$ *разрешима за время* $O(\max\{|U|, |V|\})$ *для всех пар* (U, V)*, в которых по крайней мере одно из слов эквивалентно почти* 7/3*-свободному слову.*

Для доказательства теорем 3.5 и 3.6 пройдемся по доказательству теорем 2.1 и 2.2, уделяя внимание тем утверждениям, где встречаются почти сильно бескубные слова.

В §1.2, в котором вводится основная техника, используемая в диссертации, и в §2.2 почти сильно бескубные слова не рассматриваются. В §2.3 исследование нерегулярных почти сильно бескубных слов отражено в предложениях 2.3.1, 2.3.3, лемме 2.3.4 и наблюдении 2.3.1. Предложение 2.3.1 и наблюдение 2.3.1 легко обобщаются на случай произвольного почти 7/3-свободного слова.

Предложение 3.3.1. *Пусть* V *—* r_1*-редуцированное почти* 7/3*-свободное нерегулярное слово. Тогда имеет место один из двух вариантов:*

1) $V \in \mathcal{S}'_1$*;*

2) *С точностью до инвертирования букв,* V *имеет префикс* 11211221 *или суффикс* 12211211.

Доказательство. По предложению 1.2.1, любое r_1-редуцированное нерегулярное слово V содержит подслово $1(12)^l11$ или $2(21)^l22$ для некоторого $l \geqslant 1$. Ясно, что $l = 1$, иначе слово V содержало бы собственное подслово 12121 или 21212 экспоненты 5/2. Без ограничения общности, пусть $11211 \leqslant V$. Если слово 11211 — внутреннее подслово слова V, то 11211 входит в V внутри подслова 2112112, имеющего экспоненту 7/3. Следовательно, $V = 2112112 \in \mathcal{S}'_1$. Легко проверить, что если подслово 11211 является префиксом (или суффиксом) слова V, и длина V не превосходит восьми символов, то $V \in \mathcal{S}'_1$. Наконец, если $|V| > 8$, то единственно возможным 8-буквенным префиксом, (соотв., суффиксом) слова V, начинающимся (соотв., заканчивающимся) на 11211, является слово 11211221 (соотв., 12211211), что и требовалось доказать. □

Ввиду того, что все слова множества $\mathcal{S}'$ не являются $\widetilde{AB}$-целыми, наблюдение 2.3.1 для почти 7/3-свободных слов непосредственно следует из предложения 3.3.1.

Доказательство леммы 2.3.4 остается в силе при замене терминов «сильно бескубное» и «почти сильно бескубное» на «7/3-свободное» и «почти 7/3-свободное». Таким образом, с учетом леммы 2.3.1, все слова из множества $\mathcal{S}$ являются единственными почти 7/3-свободными словами в своих классах эквивалентности. Наконец, предложение 2.3.3 вытекает из предложений 3.3.1, 2.3.2, 1.2.3 и леммы 2.3.4.

Трудности возникают в §2.4, а именно: для регулярного почти 7/3-свободного слова V слово $\theta^{-1}(\xi(V))$ может не быть почти 7/3-свободным.

Пример 3.3.1. *Рассмотрим слово* $V = 11212211212211$. *Легко проверить, что* V *— почти* 7/3*-свободное слово. В то же время, мы имеем*

$$\theta^{-1}(\xi(V)) = \theta^{-1}(2112122112122112) = 21121121,$$

при этом слово 21121121 *почти* 7/3*-свободным не является.*

К счастью, отображение $\theta^{-1}(\eta(V))$ сохраняет свойство регулярного слова V быть почти 7/3-свободным, однако более сильное утверждение, сформулированное в лемме 2.4.3, уже не имеет места.

Пример 3.3.2. *Рассмотрим регулярное почти* $7/3$*-свободное слово* $V = 1221122112$*. Тогда слово* $\theta^{-1}(\eta(V)) = 12121$ *является почти* $7/3$*-свободным, но не является* $7/3$*-свободным, так как* $\mathsf{exp}(12121) = 5/2$*.*

Таким образом, мы должны исключить из всех наших дальнейших рассуждений отображение ξ, в частности, нам придется изменить порядок рассуждений, доказав теорему 3.5 после того, как мы обоснуем работу алгоритма EqAOF.

Кроме уже рассмотренных предложений, наблюдений и лемм, мы пользуемся следующими двумя свойствами: если слово V почти сильно бескубно, то V не имеет нередуцируемых хвостов и операция $\mathsf{r_T}$ отрезает от каждого нерегулярного хвоста слова V (если такие имеются) в точности по одной букве. Очевидно, почти 7/3-свободные слова также обладают этими свойствами.

Единственное изменение леммы 2.6.1 касается п. 2, в котором теперь утверждается, что все члены главного V-ряда почти 7/3-свободного слова также являются почти 7/3-свободными. Леммы 2.6.2–2.6.5 остаются без изменений. Стоит отметить, что, переходе к почти 7/3-свободным словам соответствующим образом необходимо изменить и определение главных нормальных рядов: теперь W-нормальный ряд называется главным нормальным рядом слова U, если $W \in [\mathrm{Anc}(U)]$ и слово W является почти 7/3-свободным. Пока не доказана теорема 3.5, мы не можем пользоваться тем, что любое слово U может иметь не более одного главного нормального ряда, поэтому центральное место в наших рассуждениях отводится прямым нормальным рядам, которые по-прежнему единственны для любого слова U. В частности, лемма 2.6.6 теперь переформулируется следующим образом.

Лемма 3.3.1. *Если слово* U *почти* $7/3$*-свободно и* $U \notin \{111, 222\}$*, то главный* U*-ряд является также прямым нормальным рядом слова* U*; в частности,* $N^D(U) = U$*.*

В леммах 2.6.7 и 2.6.8 почти сильно бескубные слова не встречаются. Заметим, что ни один из классов $[W]$, где $W \in \mathcal{S}_2$, не содержит почти 7/3-свободных слов.

Наконец, приступим к доказательству леммы 2.6.9 для почти 7/3-свободного слова V. Этап 1 состоит в построении главных рядов слов V, P, Q и Y (в обозначениях леммы 2.6.9). При этом мы опираемся на результаты § 2.4, предложение 2.3.3, наблюдение 2.3.1 и леммы 2.6.1 и 2.6.7. Небольшая трудность на этом этапе возникает при рассмотрении слов Y_m, V_m, P_m и Q_m, где $m = \ell(Y)$. Если $|Y_m| = 2$, мы используем лемму 2.6.8, в результате которой получаем

$$V_m = P_m = Y_m c_m Y_m \text{ и } Q_m = Y_m c_m Y_m c_m Y_m \ .$$

Если $|Y_m| = 1$ (пусть, скажем, $Y_m = 1$), то мы имеем $\{P_m, Q_m\} = \{121, 12121\}$, причем оба слова 121 и 12121 являются почти 7/3-свободными. Раньше в этом случае мы пользовались леммой 2.4.3, которая, как было отмечено выше, на почти 7/3-слова не переносится. Тем не менее, поскольку на первой итерации процедуры Ancestor функция η отрезает от слова V два символа, слово $\eta(V)$ является 7/3-свободным и, следовательно, все слова $V_2, \ldots, V_m$ являются 7/3-свободными. Поэтому в этом случае мы также имеем

$$V_m = P_m = Y_m c_m Y_m \text{ и } Q_m = Y_m c_m Y_m c_m Y_m \ .$$

На этом первый этап доказательства леммы 2.6.9 завершен.

На втором этапе мы рассматриваем прямые нормальные ряды для слов V, P, Q и Y. Поскольку все четыре леммы 2.6.3–2.6.6, устанавливающие свойства нормальных рядов, остаются в силе, этап 2 почти дословно переносится на случай почти 7/3-свободного слова V. На третьем этапе мы строим главные и прямые нормальные ряды для слов W, P, Q и X, повторяя рассуждения первых двух этапов. Наконец, четвертый этап вытекает из леммы 2.6.2.

В алгоритме EqAOF необходимо изменить шаг 4: теперь мы должны проверять, является ли возвращаемое процедурой Normalize слово почти 7/3-свободным. Лемма 2.7.1, обеспечивающая корректность работы алгоритма, использует леммы 2.6.1 (1), 2.6.2–2.6.6 и 2.6.9, а потому остается в силе. Отметим один важный момент в доказательстве, где применяется лемма 2.6.1 (2) и свойство сильной бескубности слов: если главные ряды слов U и V (в обозначениях леммы 2.7.1) удовлетворяют условию $(**)$, то условие на шаге 3 процедуры Normalize никогда не выполняется, и процедура Normalize восстанавливает прямой нормальный ряд слова V, который по лемме 2.6.6 совпадет с главным V-рядом. Докажем, что то же имеет место и для r_1-редуцированного почти 7/3-свободного слова V.

Действительно, на входе процедуры Normalize подается слово $\mathrm{Anc}(V)$. Далее, если на некоторой итерации процедуры Normalize мы получаем слово V_{k+1}, $k < \ell(V)$, то на следующей итерации, выполнив шаги 1–2, мы придем к слову

$$h[k]\theta(V_{k+1})t[k] \leqslant L[k]h[k]\theta(V_{k+1})t[k]R[k] = V_k \ .$$

Мы видим, что слово $h[k]\theta(V_{k+1})t[k]$ почти 7/3-свободно. Если $h[k]\theta(V_{k+1})t[k] = YYY$ для некоторого $Y \in \Sigma^+$, то слово $YYY[1 \ldots |Y|{-}1]$ является 7/3-свободным, поэтому мы имеем $\frac{|YYY|-1}{|Y|} < 7/3$, откуда $|Y| < 3/2$, то есть $|Y| = 1$. Это, однако, противоречит тому, что слово V_k является r_1-редуцированным. Следовательно, слово $h[k]\theta(V_{k+1})t[k]$ не является кубом, и условие шага 3 процедуры Normalize не выполняется. В итоге, приписывая к началу и к концу слова $t[k]\theta(V_{k+1})t[k]$ символы $L[k]$ и, соответственно, $R[k]$, мы получаем слово V_k то и требовалось показать.

Лемма 2.7.2 остается в силе: нетривиальной является оценка временной сложности шага 4 алгоритма EqAOF, однако, как и в случае почти сильно бескубных слов, путем небольших модификаций алгоритма A' из [30] можно построить алгоритм, позволяющий проверять, является ли произвольное слово V почти 7/3-свободным, за время $O(|V|)$.

Доказательство теоремы 3.5 теперь прямо следует из работы алгоритма EqAOF: согласно лемме 2.7.1, если почти 7/3-свободное слово $V \notin \{111, 222\}$ эквивалентно слову U, то $\mathrm{EqAOF}(U) = V$, при этом, очевидно, алгоритм EqAOF может возвращать для каждого входа U только одно почти 7/3-свободное слово V.

Таким же путем на классы, содержащие почти 7/3-свободные слова, распространяются теоремы 3.1 и 3.2.

В заключение, установим один любопытный факт.

Предложение 3.3.2. *Пусть V — r_1-редуцированное почти 7/3-свободное слово. Тогда класс $[V]$ или не содержит 13/5-свободных слов (если $\mathsf{lexp}(V) \geqslant 13/5$), или V — единственное 13/5-свободное слово класса $[V]$ (если $\mathsf{lexp}(V) < 13/5$).*

Доказательство. Пусть $\overline{k} = \overline{k}(V)$, положим $m_{\overline{k}} = \ell(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{\overline{k}})^{3/2})$. Рассмотрим главные ряды $\{V_k\}_{k=1}^{\ell(V)}$ и $\{V_{\overline{k},j}^{3/2}\}_{j=1}^{m_{\overline{k}}}$ для слов V и $\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{\overline{k}})^{3/2}$ соответственно.

Так как, с точностью до инвертирования букв, слова 111, 121121121 и $2121(12)^l11212$ для любого $l \geqslant 3$ и хвосты $(112)^l11211221$ и $12211211(211)^l$ при любом $l > 0$ имеют локальную экспоненту, большую 13/5, а слово 2121121211212 имеет локальную экспоненту 13/5, мы заключаем, что все 13/5-свободные слова классов $[V_k]$ и $[V_{\overline{k},j}^{3/2}]$ для любых $k = 1, \ldots, \ell(V)$ и $j = 2, \ldots, m_{\overline{k}}$ лежат в языках $L[k][\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)]_\mathsf{r}R[k]$ и $[V_{\overline{k},j}^{3/2}]_\mathsf{r}$ соответственно.

В силу лемм 2.6.1 (1) и 2.6.9 (7), а также лемм 2.3.1, 2.3.3 и 2.6.8, доказываемое утверждение справедливо для слов $\mathrm{Anc}(V)$ и $\mathrm{Anc}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{\overline{k}})^{3/2})$ (несмотря на то, что слово $\mathrm{Anc}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_{\overline{k}})^{3/2})$, вообще говоря, может не быть почти 7/3-свободным). Теперь предположим, что утверждение справедливо для слова V_{k+1} при некотором $k < \ell(V)$ или слова $V_{\overline{k},j+1}^{3/2}$ при некотором j таком, что $2 \leqslant j < m_{\overline{k}}$. Поскольку морфизм θ не уменьшает локальную экспоненту слова, единственным 13/5-свободным словом класса $[V_{\overline{k},j}^{3/2}]$ может быть только слово

$$h[\overline{k}-1+j]\theta(V_{\overline{k},j+1}^{3/2})t[\overline{k}-1+j] = V_{\overline{k},j}^{3/2},$$

а 13/5-свободными словами класса $[V_k]$, соответственно, могут быть только слова

$$L[k]h[k]\theta(V_{k+1})t[k]R[k] = V_k$$

и

$$L[k]h[k]\theta(V_{k,2}^{3/2})t[k]R[k] = L[k]\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)^{3/2}R[k]\ .$$

Так как либо $\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)^{3/2} = \mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)$ и $L[k]\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)^{3/2}R[k] = V_k$, либо $\mathsf{exp}(\mathsf{r}_\mathsf{T}(V_k)^{3/2}) = 3$ (в случае, когда $k = \overline{k}$), мы видим, что единственным 13/5-свободным словом в классе $[V_k]$ может быть только V_k. Доказываемое утверждение следует теперь по индукции. □

В связи с предложением 3.3.2, возникает интересный вопрос: как распределены по классам эквивалентности 13/5-свободные слова? Верно ли, что каждый класс эквивалентности содержит не более одного такого слова? В этом случае, «граница единственности» совпадает со значением 13/5, так как $13/5^+$-свободных слов в произвольном классе $[V]$ может быть несколько, как, например, в классе [12122121], содержащем $13/5^+$-свободные слова 12122121 и 1212 21212 2121. Или, может, граница единственности располагается в промежутке $[7/3; 13/5]$? Этот вопрос пока остается открытым.

Литература

[1] С. И. Адян. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975. 335с.

[2] М. Ф. Бакиров, Е. В. Суханов. *Слова Туэ-Морса и $\mathcal{D}$-строение свободной бернсайдовой полугруппы* // Изв. Уральского государственного университета. Серия «Математика и механика». 2000. Т. **18** (выпуск 3). С. 5–19.

[3] Ж. Лаллеман. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: «Мир», 1985. 440с.

[4] И. Г. Лысенок. *Бесконечность бернсайдовых групп периода 2^k при $k \geqslant 13$* // Успехи мат. наук. 1992. Т. **47**: 2(284). С. 201–202.

[5] П. С. Новиков, С. И. Адян. *Бесконечные периодические группы. I* // Изв. АН СССР. Сер. «Математика». 1968. Т. **32**. С. 212–244.

[6] П. С. Новиков, С. И. Адян. *Бесконечные периодические группы. II* // Изв. АН СССР. Сер. «Математика». 1968. Т. **32**. С. 251–524.

[7] И. Н. Санов. *Решение проблемы Бернсайда для показателя 4* // Ученые записки Ленинградского государственного университета. Сер. «Математика». 1940. Т. **10**. С. 166–170.

[8] S. I. Adjan, I. G. Lysionok. *The method of classification of periodic words and the Burnside problem* // Contemporary Mathematics. 1992. Vol. **131**. P. 13–28.

[9] J. Brzozowski. *Open problems about regular languages* // Formal language theory: perspectives and open problems. R. Book. Ed. Academic Press, New York, 1980. P. 23–47.

[10] J. Brzozowski, K. Culik, A. Gabrielian. *Classification of non-counting events* // J. Comput. Syst. Sci. 1971. Vol. **5**. P. 41–53.

[11] W. Burnside. *On an unsettled question in the theory of discontinuous groups* // Quart. J. Pure Appl. Math. 1902. Vol. **33**. P. 230–238.

[12] A. de Luca, S. Varricchio. *On non-counting regular classes* // Proc. ICALP'90. Berlin: Springer, 1990. P. 74–87. (LNCS Vol. **443**).

[13] A. de Luca, S. Varricchio. *On finitely recognizable semigroups* // Acta Inform. 1992. Vol. **29**(5). P. 483–498.

[14] A. de Luca, S. Varricchio. *On non-counting regular classes* // Theoret. Comput. Sci. 1992. Vol. **100**(1). P. 67–104.

[15] A. de Luca, S. Varricchio. Finiteness and regularity in semigroups and formal languages. Berlin: Springer, 1999. 240p.

[16] A. P. do Lago. *On the Burnside semigroups* $x^n = x^{n+m}$ // Proc. LATIN'92. Berlin: Springer, 1992. P. 329–343. (LNCS Vol. **583**).

[17] A. P. do Lago. *On the Burnside semigroups* $x^n = x^{n+m}$ // Internat. J. Algebra Comput. 1996. Vol. **6**(2). P. 179–227.

[18] A. P. do Lago. *Maximal groups in free Burnside semigroups* // Proc. LATIN'98. Heidelberg: Springer, 1998. P. 65–75. (LNCS Vol. **1380**).

[19] A. P. do Lago. *Grupos Maximais em Semigrupos de Burnside Livres* // PhD Thesis. Universidade de São Paulo, 1998. Available at http://www.ime.usp.br/˜alair/Burnside. 141p.

[20] A. P. do Lago, I. Simon. *Free Burnside Semigroups* // Theoret. Inform. Appl. 2001. Vol. **35**(6). P. 579–595.

[21] J. A. Green, D. Rees. *On semigroups in which* $x^r = x$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1952. Vol. **48**. P. 35–40.

[22] V. S. Guba. *The word problem for the relatively free semigroups satisfying* $t^m = t^{m+n}$ *with* $m \geqslant 4$ *or* $m \geqslant 3$, $n = 1$ // Internat. J. Algebra Comput. 1993. Vol. **3**(2). P. 125–140.

[23] V. S. Guba. *The word problem for the relatively free semigroups satisfying* $t^m = t^{m+n}$ *with* $m \geqslant 3$ // Internat. J. Algebra Comput. 1993. Vol. **3**(3). P. 335–348.

[24] M. Hall. *Solution of the Burnside problem for exponent six* // Illinois. J. Math. 1958. Vol. **2**. P. 764–786.

[25] S. V. Ivanov. *On the Burnside problem on periodic groups* // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. Vol. **27**. P. 257–260.

[26] L. Kaďourek, J. Polák. *On free semigroups satisfying* $x^r \simeq x$ // Simon Stevin. 1990. Vol. **64**(1). P. 3–19.

[27] F. W. Levi, B. L. van der Waerden. *Über eine besondere klasse von gruppen* // Hamburg: Abh. Math. Sem., 1933. Vol. **9**. P. 154–158.

[28] M. Lothaire. Combinatorics on words. Reading, MA: Addison-Wesley, 1983. 262p.

[29] J. McCammond. *The solution to the word problem for the relatively free semigroups satisfying* $t^a = t^{a+b}$ *with* $a \geqslant 6$ // Internat. J. Algebra Comput. 1991. Vol. **1**. P. 1–32.

[30] A. M. Shur. *Overlap-free words and Thue-Morse sequences* // Internat. J. Algebra Comput. 1996. Vol. **6**(3). P. 353–367.

[31] A. Thue. *Über unendliche Zeichenreihen* // Norske Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat.-Nat. K1. №7. Christiania, 1906. P. 1–22.

[32] A. Thue. *Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen* // Norske Vidensk. Selsk. Skrifter. I. Mat.-Nat. K1. №10. Christiania, 1912. P. 1–67.

Работы автора по теме диссертации

[33] А. Н. Плющенко. *Сильно бескубные слова и свободная бернсайдова полугруппа с тождеством* $x^2 = x^3$ // Материалы XIV международной научной конференции «Ломоносов-2007». Москва: Мысль, 2007. С. 92.

[34] А. Н. Плющенко. *Сильно бескубные слова и свободная бернсайдова полугруппа с тождеством* $x^2 = x^3$ *и двумя образующими* // Сибирские Эл. Мат. Изв. 2009. Т. **6**. С. 166–181.

[35] А. Н. Плющенко. *О проблеме равенства слов для свободных бернсайдовых полугрупп с тождеством* $x^2 = x^3$ // Тезисы докладов международной конференции «Мальцевские чтения 2011». Новосибирск, 2011. С. 51. Электронный ресурс: http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/11/malmeet2011.pdf

[36] А. Н. Плющенко. *О проблеме равенства слов для свободных бернсайдовых полугрупп с тождеством* $x^2 = x^3$ // Известия вузов. Серия «Математика». 2011. №11. С. 89–93.

[37] A. N. Plyushchenko, A. M. Shur. *Almost overlap-free words and the word problem for the free Burnside semigroup satisfying* $x^2 = x^3$ // Proc.WORDS 2007. Marseille, France, 2007. P. 245–253.

[38] A. N. Plyushchenko, A. M. Shur. *On Brzozowski's conjecture for the free Burnside semigroup satisfying* $x^2 = x^3$ // Proc. DLT 2011. Berlin: Springer, 2011. P. 362–373. (LNCS Vol. **6795**).

[39] A. N. Plyushchenko, A. M. Shur. *Almost overlap-free words and the word problem for the free Burnside semigroup satisfying* $x^2 = x^3$ // Internat. J. Algebra Comput. 2011. Vol. **21**. P. 973–1006.