Упражнения для студентов ИМКН по курсу «Дифференцильная геометрия»

Кривые в аффинном пространстве. Основные понятия.

Задача №1

Доказать, что аффинное отображение трёхмерного пространства:

1) переводит параллельные прямые в параллельные прямые *(1б)*
2) переводит параллельные плоскости в параллельные плоскости *(2б)*
3) сохраняет отношение отрезков *(2б)*

Задача №2

Доказать, что все ортогональные проекции вершин n-мерного куба на любую большую диагональ этого куба делят её на n равных частей. *(3б)*

Задача №3

Найти число диагоналей n-мерного куба, ортогональных к данной диагонали. *(3б)*

Задача №4

Доказать, что отношение строгой (положительной) эквивалентности является отношением эквивалентности на множестве кривых аффинного пространства. *(2б)*

Задача №5

Доказать последовательно два утверждения.

1) Пусть $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ - положительно эквивалентные кривые единичной скорости. Тогда существует такое число t_0, что $\alpha(t) = \beta(t - t_0)$. *(2б)*

2) Пусть $\alpha(t)$ — кривая единичной скорости. Тогда найдётся такое число s_0, что $\beta(s) = \alpha(s - s_0)$ - натурально параметризована. *(2б)*

Плоские кривые.

Задача №6

Доказать, что окружность с центром в центре кривизны кривой (т.е. в точке $p_0 = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}E_2(s_0))$ и радиусом, равным кривизне кривой в точке $s = s_0$ (т.е. с $R = R(s_0) = \frac{1}{|k(s_0)|}$) , является соприкасающейся, т.е. имеет с кривой касание не ниже второго порядка в точке $s = s_0$ *(4б)*

Задача №7

Доказать, что в точке кривой, где кривизна принимает экстремальное значение, соприкасающаяся окружность имеет с кривой касание не ниже третьего порядка. *(3б)*

Задача №8

Доказать, что если все нормали плоской линии проходят через фиксированную точку, то эта линия есть окружность или её часть. *(3б)*

Задача №9

Для того, чтобы две кривые в общей точке имели касание не ниже второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые соприкасающиеся окружности. *(3б)*

Задача №10

Найти кривизну кривой, заданной в виде $y = f(x)$ в декартовой прямоугольной системе координат. *(1б)*

Задача №11

Найти кривизну кривой, заданной в виде $y = f(x)$ в полярной системе координат. *(1б)*

Задача №12

Доказать, что для любой бирегулярной кривой $\beta(s)$ единичной скорости:

1) кривая $\alpha(s) = \beta(s) + (c - s)\bar{\tau}_\beta(s)$ — эвольвента, т.е. $\beta(s)$ — эволюта для $\alpha(s)$ *(2б)*

2) эвольвента $\alpha(s)$ регулярна всюду, кроме точек отрыва $s = c$ *(2б)*

3) точка отрыва $s = c$ является возвратом I-го рода *(2б)*

Задача №13

Доказать, что если кривизна плоской кривой в некоторой точке принимает экстремальное значение, то в соответствующей точке её эволюты всегда имеется особенность — возврат I-го рода. *(3б)*

Задача №14

Доказать, что если в какой-то точке регулярной кривой кривизна равна 0, то нормаль в этой точке является асимптотой для эволюты. *(1б)*

Задача №15

Пусть α — гладкая регулярная кривая единичной скорости, а $\alpha_\varepsilon(s) = \alpha(s) + \varepsilon E_2(s)$ — ей параллельная. Пусть l — длина α, а l_ε — длина α_ε, $s \in [s_1, s_2]$.

1) Доказать, что $l_\varepsilon = l - \varepsilon \int\limits_{s_1}^{s_2} k(s)\, ds$ *(4б)*

2) Пусть $s_2 = s + \Delta s$, $s_1 = s$. Доказать, что:

$$k(s) = \lim_{\Delta s \to 0, \varepsilon \to 0} \frac{\Delta l - \Delta l_\varepsilon}{\Delta s \cdot \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{dl - dl_\varepsilon}{ds \cdot \varepsilon},$$

где $\Delta l = l[\alpha]|_s^{s+\Delta s}$, $\Delta l_\varepsilon = l[\alpha_\varepsilon]|_s^{s+\Delta s}$ *(1б)*

3) Если $\alpha(t)$ — не обязательно кривая единичной скорости, то

$$k(t) = \lim_{\Delta l \to 0, \varepsilon \to 0} \frac{\Delta l - \Delta l_\varepsilon}{\Delta l_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{dl - dl_\varepsilon}{dl \cdot \varepsilon}$$

(1б)

Т.е. кривизна кривой в точке — это скорость относительно изменения длины кривой в точке при параллельном переносе её вдоль нормали. Чем больше кривизна, тем больше это изменение.

Кривые общего положения (КОП) в аффинном пространстве.

Задача №16

Доказать аналогично леммам п.9 и п.19, что кривизны $k_1(t),\ k_2(t), ...,\ k_{n-1}(t)$ инвариантны относительно движения евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (учебник С.В.Сизого «Лекции по ДГ»). *(3б)*

Задача №17

Доказать, что если все нормальные плоскости кривой в $\mathbb{R}^3$ проходят через фиксированную точку, то образ этой кривой лежит на сфере. *(4б)*

Задача №18

Обобщите п.8 и п.18 на случай кривой в $\mathbb{R}^4$. *(3б)*

Задача №19

Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости бирегулярной кривой $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ортогональны некоторому постоянному вектору, то кривая α является плоской. *(4б)*

Задача №20

Доказать, что если между точками двух линий (образов бирегулярных кривых) в $\mathbb{R}^3$ можно установить такое соответствие, что в соответствующих точках касательные параллельны, то отношение кручения к кривизне в этих точках одинаково по модулю. *(3б)*

Задача №21

Пусть $\beta(s)$ — кривая единичной скорости в $\mathbb{R}^3$, l — прямая, проходящая через точку $\beta(s_0)$, и $d(\Delta s)$ — расстояние от точки $\beta(s_0 + \Delta s)$ до прямой l. Доказать: для того, чтобы прямая l была касательной к кривой $\beta(s)$ в точке $\beta(s_0)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s} = 0$$

. *(3б)*

Задача №22

Доказать, что соприкасающуюся плоскость бирегулярной кривой $\alpha(t)$ в точке $\alpha(t_0)$ можно определить любым из следующих условий.

1) Плоскость, проходящая через точку $\alpha(t_0)$ с направляющими векторами $\dot{\alpha}(t_0)$, $\ddot{\alpha}(t_0)$. *(3б)*

2) Пусть π — плоскость, проходящая через касательную прямую кривой в точке $\alpha(t_0)$, $\beta = \beta(s)$ — натуральная параметризация кривой, $\alpha(t_0) = \beta(s_0)$, $d(\Delta s)$ — расстояние от точки $\beta(s_0 + \Delta s$ до плоскости π. Плоскость π является соприкасающейся плоскостью кривой $\alpha(\beta)$ в точке $\alpha(t_0) = \beta(s_0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s^2} = 0$$

(3б)

3) Плоскость, имеющая с кривой α в точке $\alpha(t_0)$ касание не ниже второго порядка. *(3б)*

Задача №23

Пусть дана кривая $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, α — гладкая, бирегулярная, $M_0 = \alpha(t_0)$. Доказать, что в точке M_0 проекция $\alpha_k(t)$ кривой $\alpha(t)$ на соприкасающуюся плоскость имеет такую же кривизну, что и $\alpha(t)$. *(3б)*

Задача №24

Доказать, что в случае касания двух линий не ниже третьего порядка в $\mathbb{R}^3$, кручения в их общей точке равны. *(1б)* Верно ли обратное? *(2б)*

Задача №25

Найти порядок малости кратчайшего расстояния между касательными к кривой в трёхмерном пространстве. *(3б)* Решить аналогичную задачу для главных нормалей *(1б)* и бинормалей. *(1б)*

Определение касания кривой с поверхностью.

Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ — кривая и поверхность S задана неявно $F(x, y, z) = 0$, F — гладкая, $\overrightarrow{grad}\, F|_S \neq \overrightarrow{0}$, $\alpha(t_0) = p_0$, $F(p_0) = 0$. Рассмотрим $f(t) = F(\alpha(t))$. Если $t \to t_0$, то $\alpha(t) \to p_0$ и значит $f(t) \to 0$. Если $f(t) = o(t - t_0)^k$, то говорят, что кривая α имеет с поверхностью S в точке p_0 касание k-го порядка.

Задача №26

Вывести вычислительные формулы для нахождения всех трёх кривизн кривой $\alpha(t)$ в пространстве $\mathbb{R}^4$. Эти формулы должны быть аналогичны $k_1 = \frac{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3}$, $k_2 = \frac{(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha)}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2}$. *(1б)*

Поверхности.

Задача №27

Доказать, что если все нормали к поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ проходят через фиксированную точку, то образ этой поверхности лежит на сфере. *(3б)*

Задача №28

Найти I фундаментальную форму поверхности вращения и при помощи неё найти площадь поверхности вращения. *(3б)*

Задача №29

Найти объём тела вращения, ограниченного поверхностью вращения. *(2б)*

Задача №30

Найти I фундаментальную форму поверхности вращения и при помощи неё найти уравнения линий, пересекающих меридианы поверхности вращения под постоянным углом α (уравнения локсодром). *(3б)*

Задача №31

Найти длину локсодромы на сфере в $\mathbb{R}^3$. *(3б)*

Задача №32

Доказать, что стереографическая проекция локсодромы на сфере есть логарифмическая спираль. *(4б)*

Задача №33

Доказать, что прямая, имеющая с поверхностью второго порядка в $\mathbb{R}^3$ касание не ниже второго порядка, целиком лежит на этой поверхности. *(3б)*

Задача №34

Если семейство линий на поверхности задано дифференциальным уравнением $Adu + Bdv = 0$, то уравнение ортогональных траекторий, т.е. линий, пересекающих заданные линии под прямым углом, имеет вид:

$$(Bg_{11} - Ag_{12})du + (Bg_{12} - Ag_{22})dv = 0$$

(3б)

Задача №35

Доказать, что если на диффеоморфных поверхностях длины любых соответствующих кривых совпадают, то эти поверхности изометричны. *(3б)*

Задача №36

Поверхность $f(u, v) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, матрица I фундаментальной формы которой может быть приведена к виду:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \phi(u) + \psi(v) & 0 \\ 0 & \phi(u) + \psi(v) \end{pmatrix},$$

где ϕ, ψ — некоторые скалярные функции, называется поверхностью Лиувилля. Доказать, что любая двумерная поверхность вращения $\widetilde{f} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ локально изометрична некоторой поверхности Лиувилля. *(4б)*

Задача №37

Доказать, что любая цилиндрическая поверхность локально изометрична плоскости. *(3б)*

Задача №38

Доказать, что любая коническая поверхность локально изометрична плоскости (имеется ввиду прямой круговой конус). *(3б)*

Задача №39

Доказать, что линии кривизны задаются дифференциальным уравнением:

$$\begin{vmatrix} du^2 & -dudv & dv^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$$

для гиперповерхности в $\mathbb{R}^3$. *(2б)*

Задача №40

Показать, что линиям кривизны поверхности $f : U \to \mathbb{R}^3$ на параллельной ей поверхности $f_\varepsilon : U \to \mathbb{R}^3$, $f_\varepsilon(u,v) = f(u,v) + \varepsilon \cdot N(u,v)$ соответствуют такие линии кривизны. *(3б)*

Задача №41

Доказать, что координатные линии являются линиями кривизны тогда и только тогда, когда $h_{12} \equiv h_{21} \equiv 0$, $g_{12} \equiv g_{21} \equiv 0$ в $\mathbb{R}^3$. *(1б)*

Задача №42

Доказать, что при сферифеском отображении поверхности кривая α и её образ $\sigma(\alpha)$ будут иметь параллельные касательные в соответствующих точках тогда и только тогда, когда α — линия кривизны. *(3б)*

Задача №43

Доказать, что сферическое отображение плоской линии кривизны поверхности есть окружность. *(3б)*

Задача №44

Доказать, что координатные линии на гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ являются асимптотическими $\Leftrightarrow h_{11} \equiv h_{22} \equiv 0$. *(1б)*

Задача №45

Доказать, что кривая α на поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ и её сферическое отображение $\sigma(\alpha)$ имеет в соответствующих точках перпендикулятные касательные тогда и только тогда, когда α — асимптотическая. *(3б)*

Задача №47.5

Линия на поверхности является асимптотической тогда и только тогда, когда в точках линии, где её кривизна отлична от нуля, соприкасающаяся плоскость линии совпадает с касательной плоскостью к поверхности. *(3б)*

Задача №46

Доказать, что на гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ любая линия является асимптотической тогда и только тогда, когда $f(u)$ — плоскость или её часть. *(3б)*

Задача №48s

Доказать, что если $H = 0$ в некоторой точке гиперповерхности $f : U \to \mathbb{R}^3$, то асимптотические направления в этой точке перпендикулярны. *(3б)*

Задача №47

Показать, что всякая прямая, лежащая на образе $f(u)$ гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, является асимптотической линией. *(3б)*

Показать, что обратное неверно. *(1б)*

Задача №48

Доказать, что в области гиперболических точек поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ линии кривизны в каждой точке делят пополам углы между асимптотическими линиями. *(3б)*

Задача №49

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — двумерная гиперповерхность. Доказать, что:

1) в эллиптических точках поверхности f асимптотических направлений нет. *(2б)*

2) в параболических точках поверхности f асимптотическое направление одно. *(2б)*

3) в гиперболических точках поверхности f асимптотических направлений два. *(2б)*

Задача №50

На поверхности, образованной главными нормалями к трёхмерной кривой, эта кривая является асимптотической. *(3б)*

Задача №51

Составить дифференциальное уравнение асимптотических линий поверхности вращения. *(3б)*

Задача №52

В любой точке асимптотической кривой с ненулевой кривизной гиперповерхности $f : U \to \mathbb{R}^3$ выполнено $\kappa^2 = -k$, где κ — кручение, k — полная Гауссова кривизна. *(3б)*

Задача №53

Доказать, что $III_p = 2H \cdot II_p - K \cdot I_p$, где $I_p(X, X) = < X, X >$, $II_p(X, X) = < L(X), X >$, $III_p(X, X) = < L(X), L(X) >$ для $X \in T_p f$. *(3б)*

Задача №54

Доказать, что точка на гиперповерхности $f : U \to \mathbb{R}^3$ является омбилической тогда и только тогда, когда в этой точке

$$\frac{h_{11}}{g_{11}} = \frac{h_{12}}{g_{12}} = \frac{h_{22}}{g_{22}}$$

(2б)

Задача №55

Доказать неравенство $H^2 \geqslant K$ для произвольной гиперповерхности $f: U \to \mathbb{R}^3$ и убедиться, что это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда поверхность омбилическая. *(3б)*

Сетью на поверхности $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ называется пара ортопараметрических семейств кривых вдоль f таких, что через каждую точку поверхности проходит ровно по одной кривой из каждого семейства и кривые из разных семейств пересекаются, не касаясь друг друга.

Сеть на поверхности $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ называется *чебышёвской*, если в каждом сетевом четыхёругольнике противоположные стороны имеют равные длины.

Задача №56

Доказать, что сеть координатных линий на двумерной поверхности является чебышёвской тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial v} \equiv 0, \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \equiv 0$$

(4б)

Задача №57

Пусть двумерная гиперплоскость $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну $K = const < 0$. Доказать, что тогда асимптотическая сель этой поверхности является чебышёвской. *(4б)*

Задача №58

Доказать, что если координатная сеть поверхности $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ является чебышёвской, то для некоторой криволинейной системы координат
$(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v))$ матрица I фундаментальной формы этой поверхности имеет вид

$$[I_p] = \begin{pmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{pmatrix},$$

где $\omega = \omega(\tilde{u}, \tilde{v})$ — сетевой угол в точке $p(\tilde{u}, \tilde{v}) \in U$ (4б)

Задача №59

Если в касательной плоскости к поверхности в каждом касательном направлении X отложить от точек касания отрезок длины

$$\frac{1}{\sqrt{|K_N(X)|}} = \sqrt{R_N(X)},$$

то в касательной плоскости получится кривая, называемая *индикатриссой Дюнена.* Доказать, что уравнение индикатриссы Дюдена — эллипс, если точка эллиптическая, гипербола, если гиперболическая и парабола, если параболическая. *(3б)*

Задача №60

Пусть $X, Y \in T_p f$ — пара произвольных ортогональных касательных векторов гиперповерхности $f : U \to \mathbb{R}^3$. Доказать, что

$$H = \frac{1}{2}(II_p(X, X) + II_p(Y, Y))$$

(3б)

Задача №61

Пусть две поверхности в $\mathbb{R}^3$ пересекаются по кривой $\alpha(t)$, (первая) кривизна которой есть $k(t)$. Пусть $k_1(\dot\alpha(t))$ и $k_2(\dot\alpha(t))$ — нормальные кривизны этих поверхностей в точках $\alpha(t)$ в направлении её вектора скорости, $\theta(\alpha(t))$ — угол между нормалями к поверхностям в точках кривой $\alpha(t)$. Доказать, что в любой момент $t \in I$ выполнено

$$k^2 \sin^2 \theta = {k_1}^2 + {k_2}^2 - 2k_1 k_2 \cos \theta$$

(3б)

Задача №62

Пусть поверхность получена от вращения вокруг оси l линии L, не имеющей точек с нулевой кривизной. Доказать, что если линия L обращена вогнутостью к оси l, то поверхность состоит из эллиптических точек. Если же она обращена к оси l выпуклостью — из гиперболических точек. *(3б)*

Задача №63

В касательной плоскости в точке M поверхности проведено n прямых, образующих между собой равные углы $\frac{\pi}{n}$. Показать, что

$$\frac{1}{n}(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + ... + \frac{1}{r_n}) = H,$$

где $\frac{1}{r_i}$ — нормальные кривизны линий на поверхности, касающихся данных прямых. *(4б)*

Поверхность вида $f(u,v) = \alpha(u) + vb(u)$, где $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $b : I \to \vec{\mathbb{R}}^3$ называется *линейчатой*. Линейчатая поверхность называется *развёртывающейся*, если во всех точках произвольной образующей касательная плоскость к поверхности одна и та же, т.е. если она является огибающей для семейства своих касательных плоскостей.

Задача №64

Доказать, что линейчатая поверхность является развёртывающейся тогда и только тогда, когда $(\dot{\alpha}(u), b(u), \dot{b}(u)) \equiv 0$ *(3б)*

Задача №65

Доказать, что прямолинейная образующая $p = \alpha(u_0) + vb(u_0)$, $v \in \mathbb{R}$ является одновременно и асимптотической линией и линией кривизны. Таким образом, полная Гауссова кривизна развёртывающейся поверхности равна 0. *(3б)*

Развёртывающиеся поверхности характеризуются тем, что полная Гауссова кривизна их равна 0. Таким образом, развёртывающиеся поверхности изометричны плоскости, т.е. эти поверхности получены изгибанием листа бумаги.

Задача №66

Пусть $f(u,v)$ — уравнение поверхности S, а $f_\varepsilon = f(u,v) + \varepsilon \cdot N(u,v)$ — уравнение параллельной ей поверхности S_ε. Выразить полную и среднюю кривизну поверхности S_ε через полную и среднюю кривизну поверхности S. *(3б)*

Задача №67

Доказать, что для средней кривизны поверхности S имеет место формула

$$H = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d\sigma - d\sigma_\varepsilon}{2\varepsilon d\sigma} = \lim_{\varepsilon \to 0, \Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta\sigma - \Delta\sigma_\varepsilon}{2\varepsilon \Delta\sigma},$$

где $d\sigma$ и $d\sigma_\varepsilon$ — соответствующие элементы площади параллельных поверхностей S и S_ε.

Таким образом, средняя кривизна — это скорость относительно изменения площади поверхности в точке при параллельном смещении этой поверхности вдоль нормали. *(3б)*

Доказать также, что

$$S_\varepsilon = S - \iint\limits_U H(u,v)\, d\sigma(u,v) - \varepsilon^2 \iint\limits_U k(u,v)\, d\sigma(u,v)$$

(2б)

Задача №68

Найти все минимальные поверхности, которые могут быть заданы уравнением $z = f(\frac{y}{x})$ (это плоскость и прямой геликоид). *(3б)*

Задача №69

Доказать, что плоскость и катеноид являются единственными минимальными поверхностями вращения. *(4б)*

Задача №70

Доказать, что среди линейчатых поверхностей единственной минимальной поверхностью (отличной от плоскости) является поверхность, образованная нормалями к регулярной кривой. *(3б)*

Задача №71

Если поверхность касается плоскости вдоль некоторой кривой, то каждая точка этой поверхности является параболической, а кривая — асимптотической. *(3б)*

Задача №72

Показать, что если нормали к поверхности вдоль некоторой линии l параллельны, то все точки линии l являются параболическими точками поверхности. *(3б)*

Аффинные свойства линий и поверхностей в трёхмерном пространстве.

Задача №73

Показать, что понятие касательной к линии — аффинное, т.е. при аффинном преобразовании касательная перейдёт в касательную. Предварительно надо показать, что понятие гладкой регулярной кривой — аффинное. *(1б)*

Задача №74

Показать, что понятие касательной плоскости к поверхности — аффинное, т.е. касательная плоскость к поверхности при аффинном преобразовании перейдёт в касательную плоскость к преобразованной поверхности. Предварительно надо показать, что понятие поверхности — аффинное. *(1б)*

Задача №75

Доказать, что если однопараметрическое семейство линий на плоскости или поверхностей в пространстве имеет огибающую, то семейство, получающееся в результате аффинного преобразования, также имеет огибающую, которая является образом огибающей исходного семейства. *(2б)*

Задача №76

Показать, что понятие соприкасающейся плоскости — аффинное. Предварительно нужно показать, что понятие бирегулярной кривой — аффинное. *(1б)*

Задача №77

Выяснить, какие из указанных понятий являются аффинными:

1) плоская линия *(1б)*
2) кривизна линии *(1б)*
3) эволюта плоской линии *(1б)*
4) кручение линии *(1б)*
5) нормаль линии *(1б)*
6) бинормаль линии *(1б)*
7) нормальная плоскость линии *(1б)*
8) спрямляющая плоскость *(1б)*
9) асимптотические линии на поверхности *(1б)*
10) линии кривизны на поверхности *(1б)*
11) полная кривизна поверхности *(1б)*
12) средняя кривизна поверхности *(1б)*

13) поверхность нулевой полной кривизны *(1б)*

14) поверхность нулевой средней кривизны *(1б)*

15) минимальная поверхность, эллиптические, гиперболические и параболические точки поверхности *(1б)*

16) омбилические точки поверхности *(1б)*

17) точки уплощения (сингулярные точки) поверхности *(1б)*