Основы дифференциальной геометрии и топологии

Лекция 9

Определение поверхности. Касательное пространство

Поверхности вращения

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Направление: Математика
(4 семестр)

Определение гладкого отображения

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \\ \dots \\ f_m(u) \end{pmatrix}$, $u \in U$, $\quad u = (u^1, ..., u^n)^T$,

$m \geq n$. Вектор-функция $f(u)$ называется *гладкой*, если каждая скалярная функция $f_i(u)$ имеет сколь угодно много непрерывных частных производных.

Определение гладкого отображения

Пусть

$$f'(p) = [f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}] = \begin{pmatrix} {f_1}'_{u^1} & {f_1}'_{u^2} & \dots & {f_1}'_{u^n} \\ {f_2}'_{u^1} & {f_2}'_{u^2} & \dots & {f_2}'_{u^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {f_m}'_{u^1} & {f_m}'_{u^2} & \dots & {f_m}'_{u^n} \end{pmatrix}$$

Матрицу $f'(p)$ *называют матрицей Якоби* гладкого отображения f.

Пусть $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n, v \in \vec{\mathbb{R}}^n, v = (v^1, \ldots, v^n)^T$.

Теорема Тейлора (разложение первого порядка):
$f(p+v) = f(p) + f'(p)v + o(v)$

Определение дифференциала гладкого отображения

Линейное отображение $d_pf : \vec{\mathbb{R}}^n \to \vec{\mathbb{R}}^m$, определяемое формулой $d_pf(v) = f'(p)v$ называется *дифференциалом гладкого отображения* f в точке p.

$$f(p+v) \approx f(p) + d_pf(v)$$

Значит, можно считать, что значение $f(p+v)$ можно приблизить значением аффинного отображения.

Утверждение(о значении дифференциала от касательного вектора кривой)

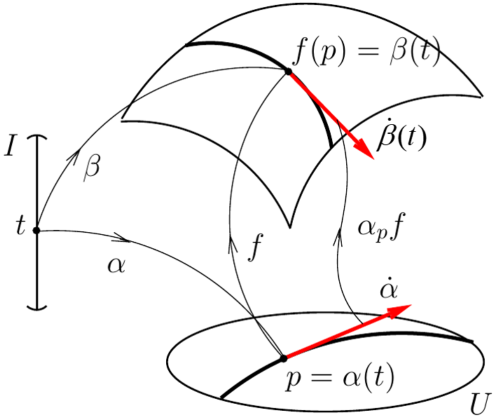
Пусть U — область из $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, $\alpha : I \to U$ — гладкая кривая, $\beta = f \circ \alpha$. Тогда $d_p f(\dot{\alpha}) = \dot{\beta}$.

<u>Доказательство</u> следует из правила дифференцирования сложной функции от нескольких переменных: $\dot{\beta}(t) = (f(\alpha(t)))^{\cdot} =$

$$\begin{pmatrix} (f_1(u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t)))' \\ (f_2(u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t)))' \\ \dots \\ (f_m(u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t)))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_i f'_{1\,u^i} \cdot \dot{u}^i \\ \sum\limits_i f'_{2\,u^i} \cdot \dot{u}^i \\ \dots \\ \sum\limits_i f'_{m\,u^i} \cdot \dot{u}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_{1\,u^1} & \dots & f'_{1\,u^n} \\ f'_{2\,u^1} & \dots & f'_{2\,u^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f'_{m\,u^1} & \dots & f'_{m\,u^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}^1 \\ \dot{u}^2 \\ \dots \\ \dot{u}^n \end{pmatrix}$$

$$= [f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}]\dot{\alpha} = f'(p)\dot{\alpha} = d_p f[\dot{\alpha}]$$

Вектор $\dot{\beta}$ называется *касательным вектором поверхности* f в точке p (см.рис.1).



$f(p) = \beta(t)$
$\dot{\beta}(t)$
I
β
t
α
f
$\alpha_p f$
$\dot{\alpha}$
$p = \alpha(t)$
U

Рис.: 1

Определение поверхности

Определение условия регулярности

Говорят, что в точке $p \in U$ для гладкого отображения $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant n$ выполняется условие *регулярности*, если $\operatorname{rg} f'(p) = n$, $f'(p) = [f'_{u^1}(p), \dots, f'_{u^n}(p)]$, т.е. частные производные $f_{u^1}, \dots, f_{u^n}$ линейно независимы в этой точке.

Точки, в которых нарушается условие регулярности, называются *особыми*

Определение поверхности

Поверхностью называется гладкое отображение $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant n$, если в каждой точке $p \in U$ выполняется условие регулярности.

Определение u^i-линии

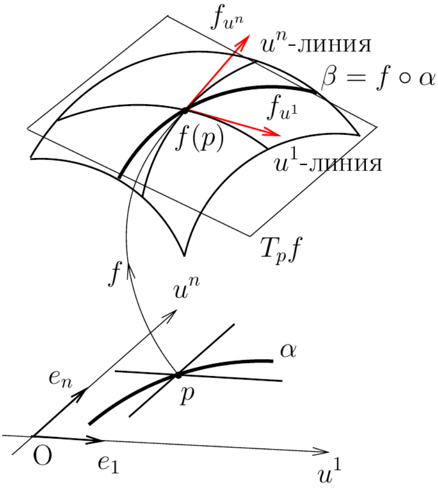
u^i-линией (*координатной линией*) поверхности f называется кривая $f(u_0^1, \ldots, u_0^{i-1}, u_0^i + t, u_0^{i+1}, \ldots, u_0^n)$, $t \in I$, т.е. кривая $f(p + e_i t)$.

Утверждение

Частная производная $f_{u^i} = (f_{1u^i}, \ldots, f_{mu^i})^T$ является вектором-касательным к u^i-линии.

Доказательство.

Пусть $\beta = f(p + e_i t)$ — u^i-линия. Далее, $f_{u^i} = d_p f(e_i)$. При этом $e_i = \dot{\alpha}$ для $\alpha = p + e_i t$, а $d_p f(\dot{\alpha}) = \dot{\beta}$ по предыдущему утверждению. Следовательно, $f_{u^i} = d_p f(e_i) = \dot{\beta}$ — вектор касательной к u^i -линии (см. рис.2).



f_{u^n}
u^n-линия
$\beta = f \circ \alpha$
f_{u^1}
$f(p)$
u^1-линия
$T_p f$
f
u^n
α
e_n
p
O
e_1
u^1

Рис.: 2

Определение касательного пространства

Касательным пространством $T_p(f)$ к поверхности f в точке p называется множество всех касательных векторов $\dot{\beta}(t)$ кривых $\beta(t)$ на поверхности f в точке p (см рис.1).

Теорема о касательном пространстве

Пусть f — поверхность. Тогда

$$T_p f = d_p f(\mathbb{R}^n) = \langle f_{u^1}, \ldots, f_{u^n} \rangle$$

Доказательство.

Пусть $\alpha : I \to U$ — гладкая кривая, $\alpha(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t))$.
Тогда $\dot{\alpha}(t) = (\dot{u}^1, \dot{u}^2, \dots, \dot{u}^n) = \dot{u}^1 e_1 + \dot{u}^2 e_2 + \dots + \dot{u}^n e_n$.

Пусть также $\beta = f \circ \alpha$. Тогда $\dot{\beta} \in T_p f$ и
$\dot{\beta} = d_p f(\dot{\alpha}) = \dot{u}^1 d_p f(e_1) + \dot{u}^2 d_p f(e_2) + \dots + \dot{u}^n d_p f(e_n) =$
$\dot{u}^1 f_{u_1} + \dot{u}^2 f_{u_2} + \dots + \dot{u}^n f_{u_n}$.

Следовательно, $\dot{\beta} \in \langle f_{\dot{u}^1}, \dots, f_{\dot{u}^n} \rangle = d_p f(\mathbb{R}^n)$.

Значит, $T_p f \subseteq d_p f(\mathbb{R}^n)$

Обратно, пусть $v \in d_p f(\mathbb{R}^n)$, т.е. $v = d_p f(u)$ для некоторого $u \in \mathbb{R}^n$.
Рассмотрим $\alpha(t) = p_0 + t \cdot u$. Тогда $\dot{\alpha} = u$ и
$v = \dot{\beta} = d_p f(\dot{\alpha}) = d_p f(u) \in d_p f(\mathbb{R}^n)$.

Следовательно, $d_p f(\mathbb{R}^n) \subseteq T_p f$.

Координаты касательного вектора в стандартном базисе касательного пространства

Определение

Векторы $f_{u^1}, f_{u^2}, \ldots, f_{u^n}$ образуют *стандартный базис* касательного пространства T_pf в точке p (см.рис. 2).

Утверждение (о совпадении координинат касательного вектора в стандартном базисе касательного пространства и координат его прообраза в стандартном базисе)

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — поверхность, $\alpha : I \to U$, $\beta = f \circ \alpha$. Тогда

$$[\dot{\beta}]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = [\dot{\alpha}]_{e_1,\ldots,e_n}$$

(*Координаты касательного вектора в стандартном базисе касательного пространства совпадают с координатами его прообраза в стандартном базисе.*)

Доказательство

Пусть $\alpha : I \to U$ — гладкая кривая, $\alpha(t) = (u^1(t), u^2(t), \ldots, u^n(t))$. Тогда $\dot\alpha(t) = (\dot u^1, \dot u^2, \ldots, \dot u^n) = \dot u^1 e_1 + \dot u^2 e_2 + \ldots + \dot u^n e_n$.

Пусть также $\beta = f \circ \alpha$. Тогда $\dot\beta = d_p f(\dot\alpha) =$ [по утверждению о значении дифференциала от касательного вектора]$=$
$= \dot u^1 d_p f(e_1) + \dot u^2 d_p f(e_2) + \ldots + \dot u^n d_p f(e_n) = \dot u^1 f_{u_1} + \dot u^2 f_{u_2} + \ldots + \dot u^n f_{u_n}$.

Следовательно,

$$[\dot\beta]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = [\dot\alpha]_{e_1,\ldots,e_n}$$

Рассмотрим поверхность вращения $f(u,v) = A[v]\alpha(u)$, где $A[v]$ — матрица поворота вокруг оси Oz на угол v, т.е.

$$A[v] = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))$ — профиль,
т.е. $f(u,v) = (x(u)\cos v,\ x(u)\sin v,\ z(v))$

Область U — открытый прямоугольник $I \times (-\pi, \pi)$.
Проверим, что f — действительно поверхность.

Вычисляем
$f_u = (\dot{x}\cos v, \dot{x}\sin v, \dot{z})$, $f_v = (-x\sin v, x\cos v, 0)$; отсюда
$f_u \times f_v = (-x\dot{z}\cos v, -x\dot{z}\cos v, x\dot{x})$ и $|f_u \times f_v|^2 = x^2(\dot{z}^2 + \dot{x}^2) = x^2|\dot{\alpha}|^2$.

Таким образом, f регулярна, если кривая α регулярна и не пересекает ось Oz. Координатную сеть образуют профили $(v = \mathrm{const})$ и окружности $(u = \mathrm{const})$ (см. рис.8).

$f(u,v)$ — поверхность везде, кроме точек пересечения с осью Oz.

Поверхность вращения (иллюстрация)

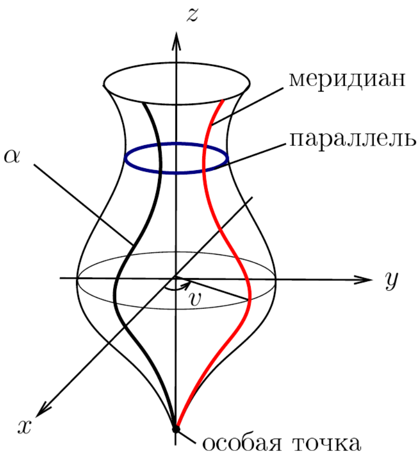


Рис.: 8

Определени

Гладкое отображение $f : U \longrightarrow V$ называется *диффеоморфизмом*, если существует отображение f^{-1}, являющееся гладким.

Наблюдение 1

При $n = m$ поверхность $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ является локальным диффеоморфизмом (f — гладкое и f^{-1} —гладкое в некоторой окрестности) области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ на некоторую область в пространстве $\mathbb{R}^n$. Такое отображение называется *заменой координат* или *заменой параметров*.

Наблюдение 2

При $n = 1$ поверхность $f : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ является гладкой регулярной кривой. Касательным пространством для нее является касательная прямая.

Определение тора

В дифференциальной геометрии *тором* называется декартово произведение двух сфер произвольных размерностей.

Простейший пример тора — декартово произведение двух одномерных окружностей $S^1_a \times S^1_b$, вложенных в $\mathbb{R}^2$ радиусов $a > 0$ и $b > 0$ соответственно. Других ограничений на радиусы не налагается.

Параметризация этого тора получается из параметризаций сфер-окружностей $S^1_a : \alpha(u) = (a\cos u, a\sin u)^T$ и $S^1_b : \beta(v) = (b\cos v, b\sin v)^T$: $f(u, v) = (a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v)^T$, где $(u, v) \in U = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, т.е. область U — открытый квадрат. Таким образом, тор расположен в пространстве $\mathbb{R}^4$ и в пространстве меньшей размерности находиться не может.

Частные производные $f_u = (-a\sin u, a\cos u, 0, 0)^T$ и $f_v = (0, 0, b\sin v, b\cos v)^T$ в любой точке $(u, v) \in U$ отличны от нулевого вектора и ортогональны, так как $\langle f_u, f_v \rangle = 0$. Поэтому в каждой точке области U для f выполняется условие регулярности и тор является двумерной поверхностью, вложенной в четырехмерное пространство.

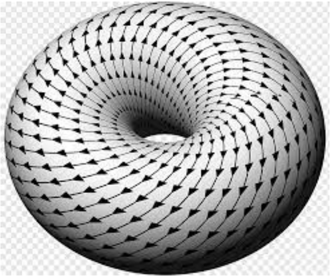


Рис.: 9

Определение тора-"бублика"

Поверхность вращения в трехмерном пространстве, полученная вращением окружности S^1_b так, что ее центр движется по окружности S^1_a $(a > b)$ и плоскость окружности S^1_b всегда перпендикулярна окружности S^1_a, называется также *тор-бублик*.

Окружность S^1_b в плоскости Oxz имеет параметризацию $\alpha(u) = {}^t(a + b\cos u, 0, b\sin u)$ — это профиль поверхности вращения. Тогда параметризация тора-бублика:

$$f(u, v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)^T$$

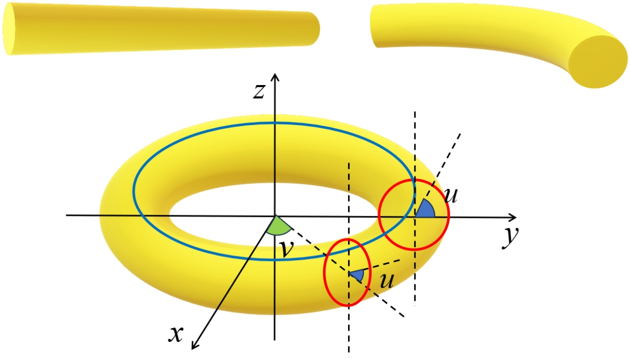


Рис.: 10

Задача

Найти параметризацию поверхности, полученной вращением трактрисы $\alpha(t) = a(\cos t + \ln \operatorname{tg} t/2, \sin t)^T$ вокруг ее асимптоты.

При такой параметризации асимптотой трактрисы является ось Ox. Перепараметризуем трактрису так, чтобы она располагалась в плоскости Oxz и ось Oz была ее асимптотой: $\beta(u) = a^t(\sin u, 0, \ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos u)$, $0 < u < \pi/2$. Вспомним матрицу оператора поворота на угол v относительно оси Oz: $A_v = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Получаем параметризацию псевдосферы:

$f(u, v) = A_v \cdot \beta(u) = a(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos u)^T$, $0 < u < \pi/2$, $0 < v < 2\pi$.

Псевдосфера. Иллюстрация

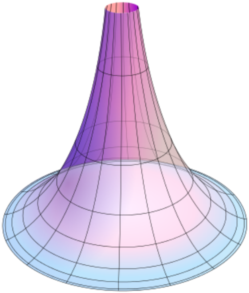


Рис.: 10

Изображение взято с **Сайта**