Основы дифференциальной геометрии и топологии

Лекция 8

Теорема Жордана

Кривизны кривой общего вида

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика
(4 семестр)

Каковы скорости базисных векторов репера Френе при движении репера вдоль кривой? Приведем теорему Френе-Жордана без доказательства.

Теорема Френе-Жордана

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида, $\{(\alpha(t); \boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \dots, \boldsymbol{E}_m)(t) | t \in I\}$ — ее репер Френе. Тогда существует гладкие скалярные функции $k_1, \dots, k_{m-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ такие что при всех $t \in I$ выполнены следующие условия:

$$(1) \begin{cases} \dot{\alpha} = |\dot{\alpha}| \boldsymbol{E}_1, \\ \dot{\boldsymbol{E}}_1 = |\dot{\alpha}| k_1 \boldsymbol{E}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\boldsymbol{E}}_i = |\dot{\alpha}|(-k_{i-1}\boldsymbol{E}_{i-1} + k_i \boldsymbol{E}_{i+1}) \ (i = 2, \dots, m-1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\boldsymbol{E}}_m = -|\dot{\alpha}| k_{m-1} \boldsymbol{E}_{m-1}. \end{cases}$$

(2) $k_1(t) > 0,\ k_2(t) > 0, \dots, k_{m-2}(t) > 0$ и $k_i(t) = \dfrac{\langle \dot{\boldsymbol{E}}_i, \boldsymbol{E}_{i+1} \rangle}{|\dot{\alpha}(t)|}$

Выписанные только что формулы 1) называются *формулами Френе*. Функции $k_1, \dots, k_{m-1}$ называются *кривизнами* кривой α.

В матричной записи формулы Френе выглядят так:

$$
(\dot{\boldsymbol{E}}_1, \dot{\boldsymbol{E}}_2, \dots, \dot{\boldsymbol{E}}_m) = \tag{1}
$$

$$
= |\dot{\alpha}|(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \dots, \boldsymbol{E}_m) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{m-1} & 0 \end{pmatrix} =
$$

$$
= (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \dots, \boldsymbol{E}_m)\boldsymbol{\omega}(t).
$$

Определение

Матрица $\boldsymbol{\omega}(t)$ называется *матрицей кривизн*.

Матрица $|\dot{\alpha}| \cdot \boldsymbol{\omega}(t)$ является матрицей перехода от ортонормированного базиса $(\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \dots, \boldsymbol{E}_m(t))$ к системе векторов производных $(\dot{\boldsymbol{E}}_1(t), \dot{\boldsymbol{E}}_2(t), \dots, \dot{\boldsymbol{E}}_m(t))$ (которая не обязана быть базисом). Матрица кривизн является **кососимметрической** матрицей.

Теорема об инвариантности б.Френе и кривизн отн. замены параметра

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида, $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, ..., $\boldsymbol{E}_m$ — базис Френе, k_1, k_2, ..., k_m — кривизны α. Если $\varphi : J \longrightarrow I$ — замена параметра, сохраняющая ориентацию ($\dot{\varphi}(\theta) > 0$ при всех $\theta \in J$), то $\beta = \alpha(\varphi(\theta))$ — кривая общего вида и базис Френе кривой β имеет вид $\tilde{\boldsymbol{E}}_1 = \boldsymbol{E}_1(\varphi(\theta))$, $\tilde{\boldsymbol{E}}_2 = \boldsymbol{E}_2(\varphi(\theta))$, ..., $\tilde{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{E}_m(\varphi(\theta))$, а ее кривизны равны соответственно $\tilde{k}_1 = k_1(\varphi(\theta))$, $\tilde{k}_2 = k_2(\varphi(\theta))$,..., $\tilde{k}_m = k_m(\varphi(\theta))$.

Так как $[\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)}] = [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)}] \begin{pmatrix} \dot{\varphi} & & & * \\ & \dot{\varphi}^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \dot{\varphi}^{m-1} \end{pmatrix}$,

векторы $[\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)}]$ в момент θ и $[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)}]$ в момент $t = \varphi(\theta)$ определяют один и тот же орфлаг. Поскольку первые $m-1$ векторов базиса Френе представляют собой ортонормированную систему, порождающую этот орфлаг, и такая система единственна, заключаем, что $\tilde{\boldsymbol{E}}_1 = \boldsymbol{E}_1(\varphi(\theta))$, $\tilde{\boldsymbol{E}}_2 = \boldsymbol{E}_2(\varphi(\theta))$, ..., $\tilde{\boldsymbol{E}}_{m-1} = \boldsymbol{E}_{m-1}(\varphi(\theta))$. Следовательно, $\tilde{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{E}_m(\varphi(\theta))$.

Так как $\dot{\varphi}(\theta) > 0$, на основании формул Френе имеем $\tilde{k}_i(\theta) = \dfrac{\langle \dot{\tilde{\boldsymbol{E}}}_i, \tilde{\boldsymbol{E}}_{i+1} \rangle}{|\dot{\beta}(\theta)|} =$
$\dfrac{\langle \dot{\boldsymbol{E}}_i(\varphi(\theta))\dot{\varphi}(\theta), \boldsymbol{E}_{i+1}(\varphi(\theta)) \rangle}{|\dot{\alpha}(\varphi(\theta))\dot{\varphi}(\theta)|} = \dfrac{\dot{\varphi}(\theta)}{\dot{\varphi}(\theta)} \dfrac{\langle \dot{\boldsymbol{E}}_i(\varphi(\theta)), \boldsymbol{E}_{i+1}(\varphi(\theta)) \rangle}{|\dot{\alpha}(\varphi(\theta))|} = k_i(\varphi(\theta))$.

Теорема об инвариантности базиса Френе и кривизн относительно движения

Пусть $\mathcal{A}$ — движение в $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{A}p = p_0 + \vec{\mathcal{A}}(p - 0)$, $\det(\vec{\mathcal{A}}) = 1$, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида, $\tilde{\alpha} = \mathcal{A}\alpha$. Доказать, что $\tilde{\alpha}$ также является кривой общего вида, $\tilde{\boldsymbol{E}}_i = \vec{\mathcal{A}}\boldsymbol{E}_i$, $\tilde{k}_i = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Теорема Френе-Жордана для плоскости

$$(\dot{\boldsymbol{E}}_1, \dot{\boldsymbol{E}}_2) = |\dot{\alpha}|(E_1, E_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k_1 \\ k_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{E}}_1 = |\dot{\alpha}| k_1 \boldsymbol{E}_2 \\ \dot{\boldsymbol{E}}_2 = -|\dot{\alpha}| k_1 \boldsymbol{E}_1 \end{cases}$$

Теорема Френе-Жордана для $n = 2$ доказана в Лекции 5.

Теорема Френе-Жордана в трехмерном пространстве

Теорема Френе-Жордана для трехмерного пространства

(1) $$(\dot{\boldsymbol{E}}_1, \dot{\boldsymbol{E}}_2, \dot{\boldsymbol{E}}_3) = |\dot\alpha|(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{E}}_1 = |\dot\alpha| k_1 \boldsymbol{E}_2, \\ \dot{\boldsymbol{E}}_2 = |\dot\alpha|(-k_1 \boldsymbol{E}_1 + k_3 \boldsymbol{E}_3) \\ \dot{\boldsymbol{E}}_3 = -|\dot\alpha| k_2 \boldsymbol{E}_2, \end{cases}$$

(2) $$k_1(t) > 0, \text{ и } k_i(t) = \frac{\langle \dot{\boldsymbol{E}}_i, \boldsymbol{E}_{i+1}\rangle}{|\dot\alpha(t)|}, \quad i \in \{1, 2\}$$

Докажем теорему Френе-Жордана для $n = 3$ для кривой единичной скорости $\alpha(t)$ ($|\dot{\alpha}| = 1$).

По определению репера Френе имеем $\dot{\alpha} = \boldsymbol{E}_1$.

Так как $\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \boldsymbol{E}_3(t)$ — базис $\mathbb{R}^3$, разложим $\dot{\boldsymbol{E}}_j(t)$ по этому базису:

$$\dot{\boldsymbol{E}}_j(t) = \sum_{i=1}^{3} \omega_j^i(t) \boldsymbol{E}_i(t)$$

Найдем матрицу $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_j^i(t))$ (i —номер строки, j — номер столбца).

Положим $\boldsymbol{X}(t) = [\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \boldsymbol{E}_3(t)]$ (это квадратная матрица порядка 3).

Имеем $\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\omega}(t)$, т.е.

$$[\dot{\boldsymbol{E}}_1(t), \dot{\boldsymbol{E}}_2(t), \dot{\boldsymbol{E}}_m(t)] = [\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \boldsymbol{E}_m(t)] \begin{pmatrix} \omega_1^1(t) & \omega_2^1(t) & \omega_m^1(t) \\ \omega_1^2(t) & \omega_2^2(t) & \omega_3^2(t) \\ \omega_1^3(t) & \omega_2^3(t) & \omega_3^3(t) \end{pmatrix}$$

$$\langle \dot{\boldsymbol{E}}_j, \boldsymbol{E}_i \rangle = \omega_j^i(t)$$

Следовательно, $\omega_j^i(t)$ — гладкая функция.

Матрица $\boldsymbol{X}$ является ортогональной, так как ее столбцы образуют ортонормированный базис. Таким образом,

$$\boldsymbol{X}^T \cdot \boldsymbol{X} = \mathbb{I}_m. \tag{2}$$

Дифференцируя равенство (2) по T и принимая во внимание, что $\dot{\boldsymbol{X}}^T = \boldsymbol{\omega}^T \cdot \boldsymbol{X}^T$, получаем

$$\boldsymbol{O}_3 = \dot{\boldsymbol{X}}^T \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^T \cdot \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\omega}^T \cdot \boldsymbol{X}^T \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^T \cdot \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^T + \boldsymbol{\omega}$$

Следовательно, матрица $\boldsymbol{\omega}$ кососимметрическая, т.е.

$$\omega_j^i = -\omega_i^j, \quad \omega_i^i = 0 \tag{3}$$

Кривая $\alpha(t)$– К1С, следовательно, вектор $\ddot{\alpha}(t) = \dot{\boldsymbol{E}}_1(t)$ перпендикулярен вектору $\dot{\alpha}(t) = \boldsymbol{E}_1(t)$, т.е. коллинеарен вектору $\boldsymbol{E}_2(t)$.

Поэтому $\dot{\boldsymbol{E}}_1(t) = \omega_1^2(t)\boldsymbol{E}_2(t)$.

Значит,

$$\omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1^2(t) & 0 \\ \omega_1^2(t) & 0 & -\omega_2^3(t) \\ 0 & \omega_2^3(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Положим $k_1(t) = \omega_1^2(t)$, $k_2(t) = \omega_2^3(t)$. Ясно, что $k_1(t)$, $k_2(t)$ — гладкие функции.

Теперь утверждение (1) доказано.

Докажем, утверждение (2).

По определению репера Френе кривой $\alpha(t)$ система векторов $(\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t))$ порождает тот же орфлаг, что и система векторов $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = (\boldsymbol{E}_1(t), \dot{\boldsymbol{E}}_1(t))$.

Следовательно, векторы $\dot{\boldsymbol{E}}_1(t)$ и $\boldsymbol{E}_2(t)$ сонаправлены.

Поэтому $\dot{\boldsymbol{E}}_1(t) = k_1(t)\boldsymbol{E}_2(t)$, где $k_1(t) > 0$.

Умножая последнее равенство на $\boldsymbol{E}_2(t)$, получаем: $k_1(t) = \langle \dot{\boldsymbol{E}}_1, \boldsymbol{E}_2 \rangle$.

А умножая равенство $\dot{\boldsymbol{E}}_2(t) = -k_1(t)\boldsymbol{E}_1(t) + k_2(t)\boldsymbol{E}_3(t)$ на $\boldsymbol{E}_3(t)$, имеем $k_2(t) = \langle \dot{\boldsymbol{E}}_2(t), \boldsymbol{E}_3(t) \rangle$.

Утверждение (2) теоремы, а вместе с ним и сама теорема доказаны.

Заметим, что про знак кривизны k_2 ничего сказать нельзя, так как вектор $\boldsymbol{E}_3$ получается не с помощью процесса ортогонализации.

Теорема

Пусть α — КОП. Тогда

$$k_1 = \frac{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3}$$

$$k_2 = \frac{\det[\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha]}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2}$$

Доказательство.

Поскольку кривизны инвариантны относительно замены параметра, то можно считать, что β — К1С. Тогда

$\dot\alpha = E_1,\ \ddot\alpha = \dot E_1 = k_1\, E_2,\ |\dot\alpha| = 1 \Rightarrow \dot\alpha \times \ddot\alpha = k_1\, E_1 \times E_2 = k_1\, E_3,\ |\dot\alpha \times \ddot\alpha| = k_1.$

$\dddot\alpha = \dot k_1\, E_2 + k_1\, \dot E_2 = \dot k_1\, E_2 + k_1\,(-k_1\, E_1 + k_2\, E_3) = -k_1^2\, E_1 + \dot k_1\, E_2 + k_1\, k_2\, E_3.$

$$(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha) = (\dot\alpha \times \ddot\alpha, \dddot\alpha) = k_1^2\, k_2 \Rightarrow k_2 = \frac{(\dot\alpha \times \ddot\alpha, \dddot\alpha)}{k_1^2} = \frac{(\dot\alpha \times \ddot\alpha, \dddot\alpha)}{(\dot\alpha \times \ddot\alpha)^2} =$$

$$= \frac{\det[\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha]}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2}.$$

Теорема об изометричности кривых с одинаковыми кривизнами и абсолютными скоростями

Пусть $\alpha, \tilde{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — две кривые общего вида, $|\dot{\alpha}| = |\dot{\tilde{\alpha}}|$, $\tilde{k}_i = k_i$, $i = 1, \dots, m-1$. Тогда существует такое движение $\mathcal{A}$ аффинного пространства $\mathbb{R}^m$, что $\tilde{\alpha} = \mathcal{A}\alpha$.

Без доказательства.

Теорема

Пусть I — интервал в $\mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$, $k_1, \dots, k_{m-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, причем $k_1(s) > 0, \dots, k_{m-2}(s) > 0$ для любого $s \in I$. Тогда существует единственная кривая общего вида единичной скорости $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ такая что $\alpha(0) = (0, 0, \dots, 0)$, $(\boldsymbol{E}_1(0), \boldsymbol{E}_2(0), \dots, \boldsymbol{E}_m(0)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_m)$, $k_1, \dots, k_{m-1}$ — кривизны кривой α.

Без доказательства.

Теорема

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида. Тогда следующие условия эквивалентны:
(1) образ α лежит в некоторой гиперплоскости;
(2) $\det([\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m)}]) \equiv 0$;
(3) $k_{m-1} \equiv 0$.

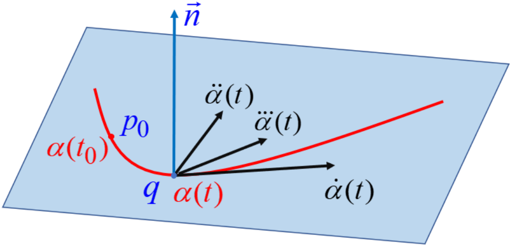
Теорема в случае трехмерного пространства

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ —бирегулярная кривая. Тогда следующие условия эквивалентны:
(1) образ α лежит в некоторой гиперплоскости;
(2) $\det([\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha]) \equiv 0$;
(3) $k_2 \equiv 0$.

Докажем, что из (1) следует (2). Пусть $\langle q - p_0, \boldsymbol{n}\rangle = 0$ — уравнение плоскости, содержащей образ кривой α. В качестве p_0 может быть взята любая точка плоскости. Пусть $p_0 = \alpha(t_0)$ для некоторого $t_0 \in I$. Имеем $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \boldsymbol{n}\rangle \equiv 0$. Дифференцируем это равенство:
$\langle \dot\alpha, \boldsymbol{n}\rangle \equiv 0$, $\langle \ddot\alpha, \boldsymbol{n}\rangle \equiv 0$, $\langle \dddot\alpha, \boldsymbol{n}\rangle \equiv 0$.
Следовательно, $\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha \in \langle \boldsymbol{n}\rangle^\perp$. Так как $\dim\langle \boldsymbol{n}\rangle^\perp = 2$, векторы $\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha$ линейно зависимы, и потому $\det([\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha]) \equiv 0$.

Из (2) следует (3) в силу формулы (2) вычисления кривизны k_2 (кручения) для трехмерного пространства (см.рис.3).

Докажем, что из (3) следует (1). Из последнего уравнения Френе $\dot{\boldsymbol{E}}_3 = -|\dot\alpha| k_2 \boldsymbol{E}_2$ в силу условия $k_2 \equiv 0$ получаем $\dot{\boldsymbol{E}}_3 \equiv 0$, т.е. $\boldsymbol{E}_3(t) = \mathrm{const}$.
Имеем $\dot\alpha \parallel \boldsymbol{E}_1$, поэтому $\langle \dot\alpha, \boldsymbol{E}_3\rangle = 0$.
Интегрируя, получаем $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \boldsymbol{E}_3\rangle = \mathrm{const}$. При $t = t_0$ скалярное произведение равно 0. Следовательно, образ кривой α лежит в гиперплоскости $\langle p - \alpha(t_0), \boldsymbol{E}_3\rangle = 0$. (см.рис.4).



$\vec{n}$
$\ddot{\alpha}(t)$
$\dddot{\alpha}(t)$
p_0
$\alpha(t_0)$
q
$\alpha(t)$
$\dot{\alpha}(t)$

Рис.: 3

Иллюстация доказательства теоремы о последней кривизне

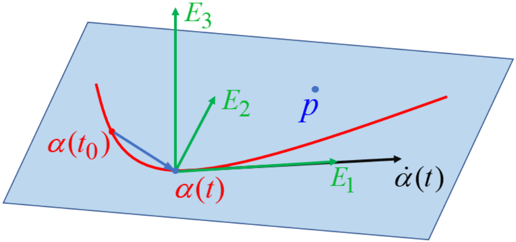
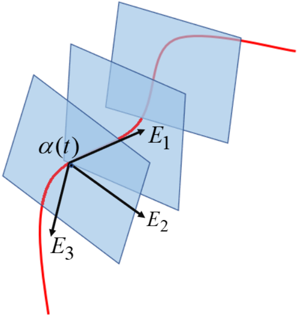


Рис.: 4

Для кривой единичной скорости 1) $\dot{E}_1 = k_1 E_2 \Rightarrow |\dot{E}_1| = |k_1| = k_1$ — скорость вращения вектора E_1, т.е. скорость вращения нормальной плоскости;



2) Аналогично, $|\dot{E}_3| = |k_2|$ — скорость вращения вектора E_3, т.е. скорость вращения соприкасающейся плоскости;