Основы дифференциальной геометрии и топологии
Лекция 7
Кривые общего вида
Репер Френе кривой общего вида

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика
(4 семестр)

Определение

Гладкая кривая $\alpha : I \to \mathbb{R}^m$ называется *кривой общего вида* *(кривой общего положения, сокр. КОП)* , если все её производные $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)}$ линейно независимы на I.

При $m = 2$ плоская кривая общего вида является регулярной, при $m = 3$ пространственная кривая общего вида является *бирегулярной*.

Лемма

Пусть α — кривая общего вида и кривая β получается из кривой α заменой параметра или изометрией. Тогда β — кривая общего вида.

Пусть $\beta(t) = \alpha(\varphi(t))$, где $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ для любого $t \in I$. Подсчитаем производные кривой β: $\dot{\beta} = \dot{\alpha}(\varphi)\dot{\varphi}$, $\ddot{\beta} = \ddot{\alpha}\dot{\varphi}^2 + \dot{\alpha}(\varphi)\ddot{\varphi}$, $\beta^{(3)} = \alpha^{(3)}\dot{\varphi}^3 + \dots,$ $\beta^{(k)} = \alpha^{(k)}\dot{\varphi}^k + \dots$, $(k = 4, \dots, m-1)$. Следовательно, $(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{(m-1)}) = (\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)})\boldsymbol{T}$, где

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} & \ddot{\varphi} & \dots & * \\ 0 & \dot{\varphi}^2 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{\varphi}^{m-1} \end{pmatrix}$$

.

Так как $\dot{\varphi} \neq 0$, матрица $\boldsymbol{T}$ невырожденная $(\det(T) = \dot{\varphi}^{\frac{m(m-1)}{2}})$ и потому векторы $(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \dots, \beta^{m-1})$ линейно независимы.

Заметим, что если $\dot{\varphi} > 0$ (кривые положительно эквивалентны), то система $(\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \ldots, \beta^{(m-1)})$ порождает один и тот же орфлаг, что и система $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(m-1)})$.

Пусть $\mathcal{A}$ — изометрия аффинного пространства $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{A}p = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\boldsymbol{x}$, где $x = p - p_0$, $\vec{\mathcal{A}}$ — ортогональный оператор. Пусть $\beta(t) = \mathcal{A}\alpha(t)$. Тогда $\dot{\beta} = \vec{\mathcal{A}}\dot{\alpha}$, и аналогично $\ddot{\beta} = \vec{\mathcal{A}}\ddot{\alpha}$, ..., $\beta^{(m-1)} = \vec{\mathcal{A}}\alpha^{(m-1)}$. Так как $\vec{\mathcal{A}}$ — ортогональный оператор (а значит, невырожденный, с нулевым ядром) и векторы $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(m-1)}$ линейно независимы, векторы $\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \ldots, \beta^{(m-1)}$ также линейно независимы.

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида.

Определение

Репером Френе кривой $\alpha(t)$ называется подвижный репер $\{(\alpha(t); \boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \ldots, \boldsymbol{E}_m)(t) | t \in I\}$ вдоль α такой, что
1) в любой момент $t \in I$ векторы $\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \ldots, \boldsymbol{E}_m(t)$ образуют ортонормированный базис;
2) в любой момент $t \in I$ векторы $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(m-1)}$ и $\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \ldots, \boldsymbol{E}_{m-1}(t)$ порождают один и тот же орфлаг;
3) в любой момент $t \in I$ базис $\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \ldots, \boldsymbol{E}_m(t)$ положительно ориентирован.

Теорема Френе

Для любой кривой общего вида $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ существует единственный репер Френе.

Доказательство следует из процесса ортогонализации Грама-Шмидта и того, что $E_n = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_{n-1}$

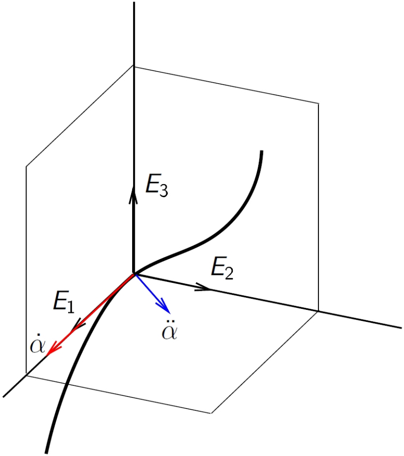


Рис.: 4

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — кривая общего вида, т.е. бирегулярная. Векторы репера Френе традиционно обозначаются так: $\boldsymbol{E}_1 = \vec{\tau}$ (*вектор касательной*), $\boldsymbol{E}_2 = \vec{\nu}$ (*вектор нормали*), $\boldsymbol{E}_3 = \vec{\beta}$ (*вектор бинормали*).

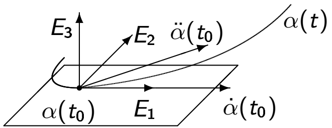


Рис. 1

Сначала заметим, что $E_1 = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$. Для построения репера Френе заметим, что $\mathcal{L}(E_1, E_2) = \mathcal{L}(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ и в этом подпространстве базисы (E_1, E_2) и $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ имеют одинаковую ориентацию (см. рис. 1). Поэтому можно применить процесс ортогонализации Грама–Шмидта к системе $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$. Однако проще оказывается поступить следующим образом. Из условия $E_3 \perp \mathcal{L}(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ следует, что в качестве E_3 можно взять орт векторного произведения $\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}$, т.е. $\vec{E_3} = \dfrac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}$. Положим $\vec{E_2} = \vec{E_3} \times \vec{E_1}$. Тогда тройка E_1, E_2, E_3 будет положительно ориентированной, как и тройка $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, E_3$.

I способ

$$E_1 = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$$

$$E_2 = \frac{b_2}{|b_2|}; \;\; b_2 = \ddot{\alpha} - \lambda E_1; \;\; \lambda = \langle \ddot{\alpha}, E_1 \rangle$$

$$E_3 = E_1 \times E_2$$

II способ

$$E_1 = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$$

$$E_3 = \frac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}$$

$$E_2 = E_3 \times E_1$$

Координатные плоскости репера Френе кривой в трехмерном пространстве

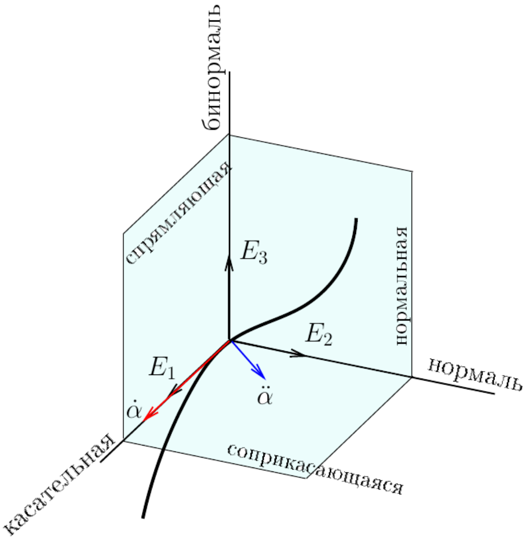
Определения

Сам репер Френе бирегулярной кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ часто называют *подвижным трехгранником* кривой $\alpha(t)$ или *естественным трехгранником*. Координатные плоскости репера Френе, проходящие через точку $\alpha(t)$, называются соответственно *соприкасающейся* (определяется векторами E_1 и E_2), *нормальной* (определяется векторами E_2 и E_3) и *спрямляющей* (определяется векторами E_1 и E_3).

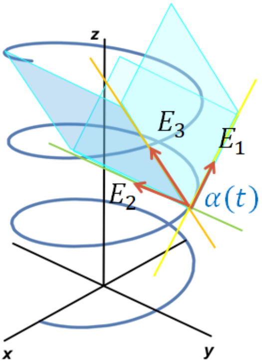
Упражнение

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — бирегулярная кривая, $t_0, t_1, t_2 \in I$. Через три точки $\alpha(t_0)$, $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$ проведем "секущую"плоскость. Докажите, что соприкасающаяся плоскость в точке $\alpha(t_0)$ есть предельное положение этой секущей плоскости при $t_1 \to t_0$ и $t_2 \to t_0$.

Трехгранник Френе (иллюстация)



Трехгранник Френе для винтовой линии (иллюстация)



Параметризация винтовой линии: $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$