Основы дифференциальной геометрии и топологии

Лекция 6

Эволюта и эвольвента

Локальное строение плоских кривых

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Направление: Математика
(4 семестр)

Определение

Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ - гладкая бирегулярная кривая.
Радиусом кривизны в момент времени t (в точке $\alpha(t)$) называется число $R(t) = \frac{1}{|k(t)|}$, а *центром кривизны* — точка $p(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot E_2(t)$.

Определение

Окружность с центром в центре кривизны кривой и радиусом равным радиусу кривизны называется *соприкасающейся окружностью* (см.рис. 3)

Соприкасающаяся окружность (иллюстрация)

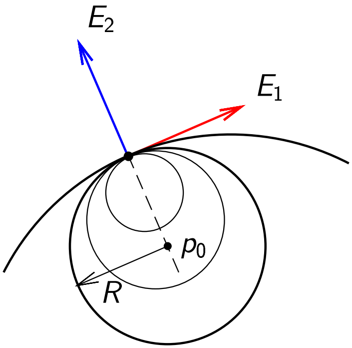


Рис.: 3

Теорема (о соприкасающейся окружности

Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ — бирегулярная кривая. Тогда

(1) соприкасающаяся окружность имеет в точке $\alpha(t)$ с кривой α касание не менее II порядка;

(2) среди всех окружностей касающихся кривой в точке $\alpha(t)$ соприкасающаяся имеет самый высокий порядок касания;

(3) в точке, где кривизна имеет локальный экстремум, соприкасающаяся окружность имеет с кривой порядок касания не менее, чем 3.

Таким образом, мы получаем ещё одну геометрическую интерпретацию кривизны. Величина, обратная к абсолютному значению кривизны в точке, — это радиус окружности, самой «близкой» к данной кривой в некоторой окрестности данной точки.

Пусть $\alpha(s), s \in (s_0, s_0 + \Delta s)$ — К1С,

$\alpha_\varepsilon(s)$ — кривая, полученная параллельным переносом точек образа кривой $\alpha(s)$ вдоль ее нормального вектора $E_2(s)$ на ε, т.е.

$$\alpha_\varepsilon(s) = \alpha(s) + \varepsilon E_2(s)$$

Пусть далее $l = l[\alpha]$, $l_\varepsilon = l[\alpha_\varepsilon]$. Поскольку α — К1С, $l = \Delta s$.

$\Delta l_\varepsilon = l - l_\varepsilon$ — абсолютное изменение длины;

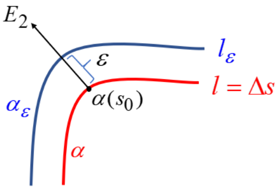
$\delta_\varepsilon = \frac{\Delta l_\varepsilon}{l}$ — относительное изменение длины.

Еще одна интерпретация кривизны

Теорема (упражнение, 36)

$$k(s_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta l_\varepsilon}{\Delta\varepsilon\Delta s} = \frac{d\delta_\varepsilon}{d\varepsilon}$$

Абсолютное значение кривизны равно скорости относительного изменения длины кривой при параллельном перенесении ее вдоль нормали.



Определение

Пусть α - бирегулярная кривая. Множество центров кривизны этой кривой называется *эволютой* (от лат. evolvere развертывать) этой кривой.

Теорема (об эволюте) (рис. 4)

Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ — бирегулярная кривая с кривизной $k(t)$ и $\dot{k}(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. Тогда

(1) эволюта $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot E_2(t)$ является бирегулярной кривой;

(2) $\beta(t)$ — огибающая нормалей кривой $\alpha(t)$;

(3) длина отрезка эволюты равна модулю разности касательных к ней между ней и исходной кривой в соответствующих точках.

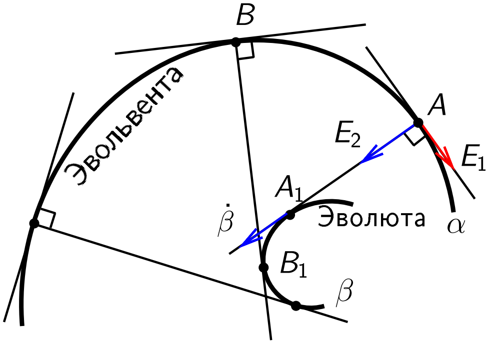


Рис.: 4

$$l[\smile A_1B_1] = BB_1 - AA_1 = R_1 - R_2$$

$$R_1 = |BB_1|\,, \;\; R_2 = |AA_1|$$

Доказательство.

1) $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot E_2(t)$; $(k(t) \neq 0)$ — гладкая;

$\dot{\beta} = \dot{\alpha} + \left(-\frac{\dot{k}}{k^2}\right) E_2 + \frac{1}{k}\left(-|\dot{\alpha}| k E_1\right) = -\frac{\dot{k}}{k^2} E_2$, $|\dot{\beta}| = \left|\dfrac{\dot{k}}{k^2}\right|$, $\dot{\beta} \parallel E_2$;

$\ddot{\beta} = \left(-\frac{\dot{k}}{k^2}\right)^{\bullet} E_2 + \left(-\frac{\dot{k}}{k^2}\right)(-k\dot{\alpha}) E_1 \Rightarrow \ddot{\beta}$ не параллельна $\dot{\beta}$; $\dot{\beta} \neq \vec{0} \Rightarrow \beta$ — бирегулярная.

2) Нормаль к $\alpha(t)$ в момент времени t является касательной к $\beta(t)$. Следовательно, $\beta(t)$ — огибающая для нормали.

3)

$$l[\beta]_{t_1}^{t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\dot{\beta}(t)|\, dt = \left[\dot{k} > 0\right] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{k}}{k^2}\, dt = -\frac{1}{k}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{k(t_1)} - \frac{1}{k(t_2)} = R_1 - R_2.$$

Определение

Кривая α называется *эвольвентой* (от лат. evolvens — разворачивающий) для бирегулярной кривой β, если β — эволюта для α.

Теорема (об эвольвенте)

Пусть β — бирегулярная К1С. Тогда множество эвольвент для кривой β описывается следующим образом:

$$\alpha_C(s) = \beta(s) + (C - s)E_1^{\beta}(s)$$

Формулу для семейства эвольвент для данной кривой β демонстрирует рис.5.

$$\alpha_C(s) = \beta(s) - (s - C)E_1^{\beta}(s)$$

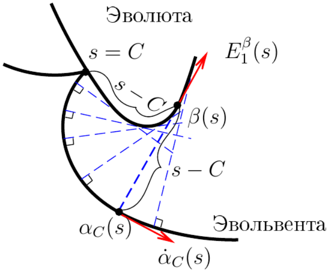


Рис.: 5

$\alpha_C(s)$ — регулярная кривая всюду, кроме точки отрыва $s = C$. Это точка является возвратом I-го рода (см.ниже "Локальное строение плоских кривых").

Выясним, как ведет себя гладкая кривая $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ вблизи каждой своей точки.

Определения

Точка $t_0 \in I$ называется *особой точкой*, если $\dot{\alpha}(t_0) = \vec{0}$ (в особой точке происходит нарушение и регулярности, и бирегулярности);

Точка t_0 называется *точкой распрямления*, если $\dot{\alpha}(t_0) \neq \vec{0}$, но $\dot{\alpha}(t_0) \parallel \ddot{\alpha}(t_0)$ (в точке распрямления происходит нарушение бирегулярности);

Точка t_0 называется *бирегулярной точкой*, если $\dot{\alpha}(t_0) \nparallel \ddot{\alpha}(t_0)$ (в бирегулярной точке кривая имеет ненулевую кривизну).

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — гладкая кривая. Зафиксируем $t_0 \in I$.

Проследим за вектором секущей $\alpha(t) - \alpha(t_0)$.

Считаем, что предельное положение секущей, при $t \to t_0$, есть касательная к кривой в точке $\alpha(t_0)$.

Запишем $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ по формуле Тейлора:

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = \dot{\alpha}(t_0)\frac{t-t_0}{1!} + \ddot{\alpha}(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \alpha^{(3)}(t_0)\frac{(t-t_0)^3}{3!} + \ldots + \\ + \alpha^{(n)}(t_0)\frac{(t-t_0)^n}{n!} + R, \tag{1}$$

где R — остаточный член.

Определение

Обозначим через p порядок первой отличной от нуля в точке t_0 производной от α: $\alpha^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$, а через q порядок первой следующей за $\alpha^{(p)}$ производной такой что $\alpha^{(q)}(t_0) \nparallel \alpha^{(p)}(t_0)$.

В этом случае говорим, что *t_0 — точка типа (p, q)*.

Из (1) выводим

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = \alpha^{(p)}(t_0)\frac{(t-t_0)^p}{p!} + \ldots + \alpha^{(q)}(t_0)\frac{(t-t_0)^q}{q!} + \ldots + R. \qquad (2)$$

Отсюда $\dfrac{p!}{(t-t_0)^p}(\alpha(t) - \alpha(t_0)) = \alpha^{(p)}(t_0) + R_1$, где $R_1 \to \vec{0}$ при $t \to 0$.

Таким образом, $\alpha^{(p)}(t_0)$ — направляющий вектор касательной.

Положим $\vec{a} = \alpha^{(p)}(t_0)$, $\vec{b} = \alpha^{(q)}(t_0)$, $u = t - t_0$. Напомним, что $q > p$. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$.

Разложим по этому базису все векторы, входящие в формулу (2) и приведем подобные члены:

$$\alpha(t)-\alpha(t_0) = \left(\frac{1}{p!}u^p + \xi_1 u^{p+1} + \ldots + \xi_{q-p-1} u^{q-1}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{q!}u^q + \ldots\right)\vec{b} + R_1 = \\ = u^p \xi \vec{a} + u^q \eta \vec{b} + R_1, \quad (3)$$

где $\xi, \eta > 0$.

Таким образом, знак коэффициентов при $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется знаком приращения u.

Рассмотрим возможные случаи, которые определяются четностью чисел p и q.

(1) p, q нечетны.

Тогда при $u > 0$, т.е. при $t > t_0$, вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в первую четверть, а при $t < t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в третью четверть.

Кривая переходит через касательную (см. рис. 6). Точка $\alpha(t_0)$ называется *точкой перегиба*.

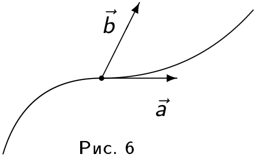


Рис. 6

(2) p нечетно, q четно.

При $t > t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в первую четверть, а при $t < t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен во вторую четверть (см. рис. 7).

Точка $\alpha(t_0)$ называется *точкой изгиба*.

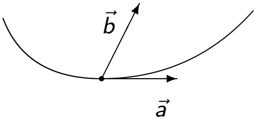


Рис. 7

(3) p четно, q нечетно.

При $t > t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в первую четверть, а при $t < t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в четвертую четверть (см. рис. 6).

Точка $\alpha(t_0)$ называется *точкой возврата I-го рода*.

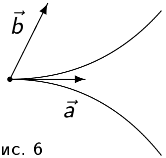


Рис. 6

(4) p четно, q четно.

При $t > t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в первую четверть, и при $t < t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ также направлен в первую четверть (см. рис. 8).

Точка $\alpha(t_0)$ называется *точкой возврата II-го рода* ("клюв Тукана").

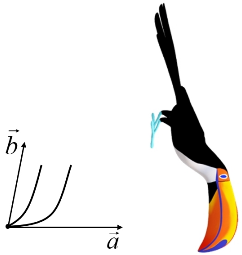


Рис.: 7

Подводя итог, получаем следующее утверждение.

Теорема о окальном строении плоской кривой

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — гладкая кривая, $t_0 \in I$ и пусть α имеет тип (p, q) в точке t_0. Тогда

1. если t_0 — бирегулярная точка, то $\alpha(t_0)$ — точка изгиба и $k(t_0) \neq 0$;
2. если t_0 — точка распрямления, то $k(t_0) = 0$ и в этой точке может быть изгиб или перегиб;
3. если t_0 — особая точка, то в точке $\alpha(t_0)$ может быть изгиб, перегиб, возврат I-го или II-го рода в зависимости от четности чисел p и q.

Пример построения образа кривой

Построить схематично образ кривой $\alpha(t) = (t^2, t^4 + t^5)^T$.

Решение

Используем теорему о локальном строении плоской кривой.
Имеем

$$\dot{\alpha}(t) = (2t, 4t^3 + 5t^4)^T$$

$$\ddot{\alpha}(t) = (2, 12t^2 + 20t^3)^T$$

$$\dddot{\alpha}(t) = (0, 24t + 60t^2)^T$$

$$\alpha^{IV}(t) = (0, 24 + 120t)^T$$

(1) $\dot{\alpha}(t) = \vec{0}$ при $t = 0$. Следовательно, $\alpha(0) = (0,0)$– единственная особая точка.

Определим тип этой особой точки:

$\ddot{\alpha}(0) = (2,0)^T \neq \vec{0}$. Следовательно, $p = 2$.

$\dddot{\alpha}(0) = (0,0)^T$,

$\alpha^{IV}(0) = (0,24)^T \nparallel \ddot{\alpha}(0)$. Значит, $q = 4$.

Следовательно, (0,0) - возврат II-го рода.

(2) Исследуем тип остальных точек кривой. Для этого вычислим

$$\det\left[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)\right] = \begin{vmatrix} 2t & 2 \\ 4t^3 + 5t^4 & 12t^2 + 20t^3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(12t^3 + 20t^4 - 4t^3 - 5t^4) = 2t^3(8 + 15t)$$

$\dot{\alpha}(t)||\ddot{\alpha}(t)$ при $t_0 = 0$ и $t_1 = -8/15$.

Тип особой точки $\alpha(t_0) = (0,0)^T$ мы уже определили. Исследуем точку $\alpha(t_1) \approx (0.284; 0.038)^T$:

$\dot{\alpha}(t_1) \neq \vec{0}$. Следовательно, $p = 1$.

$\ddot{\alpha}(t_1)||\dot{\alpha}(t_1)$, поскольку $\det\left[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)\right] = 0$.
$\dot{\alpha}(t_1) = (-\frac{16}{15}, *)^T$, $\dddot{\alpha}(t_1) = (0, *)^T$. Значит, $\dot{\alpha}(t_1) \nparallel \dddot{\alpha}(t_1)$.
Следовательно, $q = 4$.

Таким образом, точка $\alpha(t_1)$ имеет тип (1,3) и является точкой перегиба.

(3) Для любых t таких, что $t \neq t_0$ и $t \neq t_1$ имеем $\dot{\alpha}(t) \neq \vec{0}$ и $\dot{\alpha}(t) \nparallel \ddot{\alpha}(t)$.
Следовательно, такие точки имеют тип (1,2) и являются точками изгиба.

(4) Ненулевой вектор $\dot\alpha(t) = (2t, 4t^3 + 5t^4)^T$ параллелен какой-либо оси координат только при $t_2 = -\frac{4}{5}$:

$\dot\alpha(t_2) = (-\frac{8}{5}, 0)^T$ (противоположно направлен с осью Ox).

Ордината вектора $\ddot\alpha(t_2) = (2, -\frac{64}{5})^T$ меньше 0.
Значит, точка изгиба $\alpha(t_2) \approx (0.64, 0.066)^T$ является точкой максимума (для функции $y = y(x) = y(t(x))$).

(5) Наконец, заметим, что кривая $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (t^2; t^4 + t^5)$ является гладкой на своей области определения $(-\infty; +\infty)$.

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = +\infty, \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty, \lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^4+t^5}{t^2} = +\infty.$$

В частности, у образа кривой $\alpha(t)$ нет горизонтальных, вертикальных и наклонных асимптот, и $y(t)$ стремится к бесконечности быстрее, чем $x(t)$ при $t \to \pm\infty$.

Пример, график