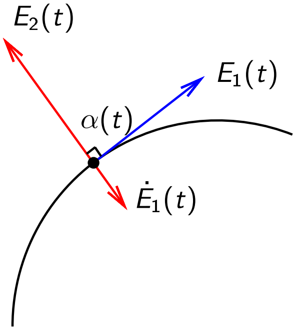
Основы дифференциальной геометрии и топологии
Лекция 5
Репер Френе и кривизна плоской кривой

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика
(4 семестр)

Пусть задана плоская регулярная кривая $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$.
Обозначим $E_1(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|}$; $E_2(t) = J(E_1(t))$,
где $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот плоскости на $\frac{\pi}{2}$.



Определение

Базисом Френе называется ОНБ,
образованный векторами $(E_1(t), E_2(t))$; $(\alpha(t), E_1(t), E_2(t))$ — *репер Френе*.

Вектор-функции $E_1(t), E_2(t)$ — гладкие, причем
$|E_1(t)| \equiv 1 \Rightarrow E_1^2 \equiv 1 \ \Rightarrow \ 2\langle E_1, \dot{E}_1\rangle \equiv 0 \ \Rightarrow$
$\Rightarrow \ E_1(t) \perp \dot{E}_1(t) \ \Rightarrow \dot{E}_1(t) \parallel E_2(t) \ \Rightarrow \ \dot{E}_1(t) = \lambda(t)E_2(t) \ \Rightarrow$
$\lambda(t) = \langle \dot{E}_1(t), E_2(t)\rangle$ — гладкая функция.

Определение

.
Кривизной кривой α в момент времени t (в точке $\alpha(t)$) называется:

$$k(t) = \frac{\lambda(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} = \frac{\langle \dot{E}_1, E_2\rangle}{|\dot{\alpha}|}$$

Теорема (уравнения Френе)

Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ — плоская регулярная кривая и $(E_1(t), E_2(t))$ — её базис Френе. Тогда:

1. $\dot{E}_1(t) = |\dot{\alpha}(t)| \cdot k(t) \cdot E_2(t)$
2. $\dot{E}_2(t) = -|\dot{\alpha}(t)| \cdot k(t) \cdot E_1(t)$
3. $k(t) = \frac{\det[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)]}{|\dot{\alpha}(t)|^3}$

Уравнения 1 и 2 называются *уравнениями Френе*.

Доказательство.

1. $\dot{E}_1 = \lambda E_2 = |\dot{\alpha}| \ k \, E_2$ (по определению).
2. $E_2 = J(E_1) = [J] \, E_1 \Rightarrow \dot{E}_2 = [J] \, |\dot{\alpha}| \ k \, E_2 = |\dot{\alpha}| \ k \ [J] \ E_2 = |\dot{\alpha}| \ k \, J(E_2) = -|\dot{\alpha}| \ k \, E_1$.
3. $\dot{\alpha} = |\dot{\alpha}| \ E_1 \Rightarrow \ddot{\alpha} = |\dot{\alpha}|^{\cdot} \ E_1 + |\dot{\alpha}|^2 \ k \, E_2 \Rightarrow \det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}] =$
$\det\left[\dot{\alpha}, |\dot{\alpha}|^{\cdot} \ E_1 + |\dot{\alpha}|^2 \ k \, E_2\right] = \det\left[|\dot{\alpha}| E_1, |\dot{\alpha}|^{\cdot} \ E_1\right] + \det\left[|\dot{\alpha}| E_1, |\dot{\alpha}|^2 \ k \, E_2\right] =$
$|\dot{\alpha}| \cdot |\dot{\alpha}|^{\cdot} \det[E_1, E_1] + |\dot{\alpha}|^3 \, k \det[E_1, E_2] \Rightarrow \det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}] = |\dot{\alpha}|^3 \ k$.

Утверждение(об инвариантности базиса Френе и кривизны относительно положительной эквивалентности)

Базис Френе и кривизна инвариантна относительно положительной эквивалентности.

А именно, пусть $\beta(\theta) = \alpha(\varphi(\theta))$, где $t = \varphi(\theta)$ — строгая замена параметра ($\dot{\varphi}(\theta) > 0$). Тогда: если $\left(\tilde{E}_1(\theta), \tilde{E}_2(\theta)\right)$ — базис Френе кривой $\beta : J \to \mathbb{R}^2$; $\varphi(\theta) : J \to I$, то

$$\tilde{E}_1(\theta) = E_1(\varphi(\theta))$$
$$\tilde{E}_2(\theta) = E_2(\varphi(\theta))$$
$$k_\beta(\theta) = k_\alpha(\varphi(\theta))$$

Доказательство. Очевидно, $\dot{\beta}(\theta) = \dot{\alpha}(\varphi(\theta)) \cdot \dot{\varphi}(\theta)$. Следовательно,

$$\tilde{E}_1(\theta) = \frac{\dot{\beta}(\theta)}{|\dot{\beta}(\theta)|} = \frac{\dot{\alpha}(\varphi(\theta)) \cdot \dot{\varphi}(\theta)}{|\dot{\alpha}(\varphi(\theta))| \cdot |\dot{\varphi}(\theta)|} = \frac{\dot{\alpha}(\varphi(\theta))}{|\dot{\alpha}(\varphi(\theta))|} = E_1(\varphi(\theta))$$

Следовательно,

$$\tilde{E}_2(\theta) = J(\tilde{E}_1(\theta)) = J(E_1(\varphi(\theta)) = E_2(\varphi(\theta))$$

Из очевидного равенства $\ddot{\beta}(\theta) = \ddot{\alpha}(\theta)\dot{\varphi}(\theta)^2 + \dot{\alpha}(\theta)\ddot{\varphi}(\theta)$ и формулы (3) из теоремы (уравнения Френе) легко можно получить равенство $k_\beta(\theta) = k_\alpha(\varphi(\theta))$ (упражнение, 1б).

Утверждение(об инвариантности базиса Френе и кривизны относительно движения).

Базис Френе и кривизна инвариантна относительно движения.
А именно, пусть $\beta(t) = \mathcal{A}(\alpha(t))$, где $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$; $t \in I$ - регулярная кривая, $\mathcal{A}(p) = p_0 + A(\overrightarrow{Op})$ — движение, A — ортогональный оператор. Тогда если $(\tilde{E}_1(t), \tilde{E}_2(t)$ — базис Френе кривой β, то

$$\tilde{E}_1(t) = A(E_1(t))$$
$$\tilde{E}_2(t) = A(E_(t))$$
$$k_\beta(t) = k_\alpha(t)$$

Доказательство. Очевидно, $\beta(t) = p_0 + A(\alpha(t))$, $\dot\beta(t) = A(\dot\alpha(t))$. Без ограничения общности, можно считать, что α — К1С.

Следовательно, $|\dot\alpha(t)| = 1$ для любого $t \in I$ и $E_1(t) = \dot\alpha(t)$.

Кроме того $|\dot\beta(t)| = |A(\dot\alpha(t))| = 1$ для любого $t \in I$ и $E_1(t) = \dot\alpha(t)$ (оператор A ортогональный и сохраняет длину векторов).

Значит, $\tilde{E}_1(t) = \dot\beta(t) = A(\dot\alpha(t)) = A(E_1)$,
$\tilde{E}_2(t) = J(\tilde{E}_1) = JA(E_1) = AJ(E_1) = A(E_2)$ (операторы A и J — операторы поворота).

Формулу $k_\beta(t) = k_\alpha(t)$ доказать самостоятельно (упражнение, 1б). При этом использовать то, что ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение.

Теорема (о натуральных уравнениях плоской кривой)

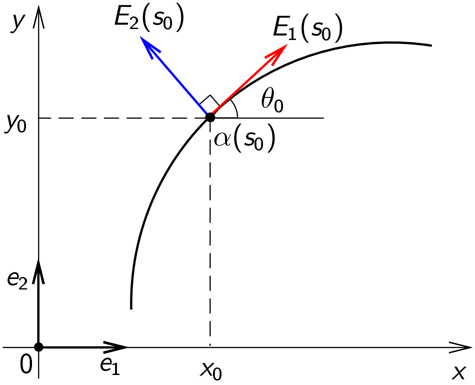
.
Пусть $k : I \to \mathbb{R}$ - некоторая гладкая функция. Тогда для любой точки $M(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ существует единственная К1С $\alpha = \alpha(s)$, $s \in I$ ($\widehat{\ }$ обозначает величину угла):

1. $k(s)$ — кривизна $\alpha(s)$;
2. $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$;
3. $\widehat{\dot{\alpha}(s_0)\, Ox} = \theta_0$ для $s_0 \in I$.

__**Доказательство**__.

Существование. По уравнениям Френе $\dot{E}_1 = k \cdot E_2 = k \cdot J E_1$, где J — матрица поворота на $\dfrac{\pi}{2}$. Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = k(s) J E_1 \\ E_1(s_0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0) \end{cases}$$

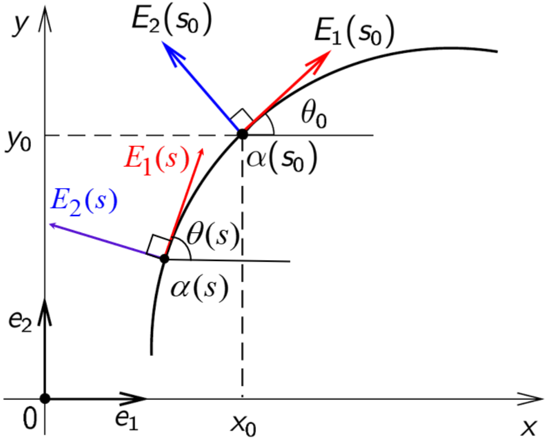


y
$E_2(s_0)$
$E_1(s_0)$
θ_0
y_0
$\alpha(s_0)$
e_2
0
e_1
x_0
x

Так как это система ЛДУ с непрерывными коэффициентами, то она имеет единственное решение при заданных начальных условиях. Следовательно, из равенства $\dot{\alpha}(s) = E_1(s)$ получаем, что существует и единственна кривая $\alpha(s) = \int\limits_{s_0}^{s} E_1(\xi)\, d\xi + \alpha(s_0)$.

Единственность. Можно доказать единственность и непосредственно используя формулы Френе. Пусть $\alpha(s)$ — описанная в теореме К1С, существование которой только что доказано, $(E_1(s), E_2(s))$ — базис Френе на этой кривой.

Введем функцию $\theta(s) = \widehat{E_1(s)\,Ox} = \widehat{\dot{\alpha}(s)\,Ox}$.
Тогда $E_1(s) = \dot{\alpha}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)), E_2(s) = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s))$
$\dot{E}_1(s) = (-\sin\theta(s)\cdot\dot{\theta}(s), \cos\theta(s)\cdot\dot{\theta}(s)) = \dot{\theta}(s)\cdot E_2(s)$
$\dot{E}_1(s) = |\dot{\alpha}(s)|\cdot k(s)\cdot E_2(s) = k(s)\cdot E_2(s) \Rightarrow k(s) = \dot{\theta}(s),\ E_1 = \dot{\alpha} =$
$(\cos\theta, \sin\theta);\ \dot{\alpha} = (\dot{x}, \dot{y})$



y
$E_2(s_0)$
$E_1(s_0)$
θ_0
y_0
$E_1(s)$
$\alpha(s_0)$
$E_2(s)$
$\theta(s)$
$\alpha(s)$
e_2
0
e_1
x_0
x

Следовательно, получаем следующие равенства (натуральные уравнения кривой):

Натуральные уравнения кривой

1. $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(\xi)\, d\xi + \theta_0$
2. $x(s) = \int_{s_0}^{s} \cos\theta(\xi)\, d\xi + x_0$
3. $y(s) = \int_{s_0}^{s} \sin\theta(\xi)\, d\xi + y_0,$

которые определяют кривую однозначно.

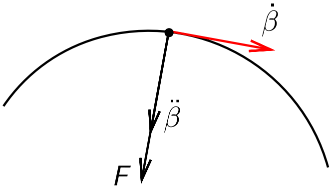


Рис.: 1

1) **Геометрический смысл кривизны**. Кривизна К1С — это угловая скорость поворота касательной: $k(s) = \dot{\theta}(s)$, где $\theta(s) = \widehat{E_1(s)\,Ox}$.

2) **Механический смысл кривизны**. Абсолютное значение кривизны К1С равно модулю центростремительного ускорения: $|k(s)| = |\ddot{\beta}(s)|$ (см. рис.1).

Доказательство: $\dot{E}_1 = \ddot{\beta} \Rightarrow \left|\dot{E}_1\right| = |k\,E_2| = |k| = |\ddot{\beta}|$.

Чем больше значение центростремительной силы, которая действует на материальную точку, движущуюся по кривой с единичной скоростью, тем больше значение центростремительного ускорения и тем больше кривизна кривой (траектории движения точки).

Пример 1. Найдем кривую с постоянной ненулевой кривизной.

$k \equiv k_0 \neq 0,\ \ M_0(x_0, y_0) = O(0,0),\ \ \theta_0 = 0,\ \ s_0 = 0.$
$\theta(s) = \int_0^s k\, ds + 0 = k \cdot s.$

$$\binom{x(s)}{y(s)} = \begin{pmatrix} \int\limits_0^s \cos(k\xi)\, d(\xi) \\ \int\limits_0^s \sin(k\xi)\, d(\xi) \end{pmatrix} = \frac{1}{k}\binom{\sin(ks)}{1-\cos(ks)}$$

$\sin(ks) = k \cdot x(s)$
$\cos(ks) = 1 - k \cdot y(s)$

$$1 = \sin^2(ks) + \cos^2(ks) = k^2 \cdot x^2(s) + (1 - k \cdot y(s))^2 \quad \left(:\ k^2\right)$$

$x^2 + \left(y - \frac{1}{k}\right)^2 = \dfrac{1}{k^2};\ r = \dfrac{1}{k} \Rightarrow x^2 + (y-r)^2 = r^2$ — окружность радиуса
$r = \dfrac{1}{k_0}$. (см.рис.2)

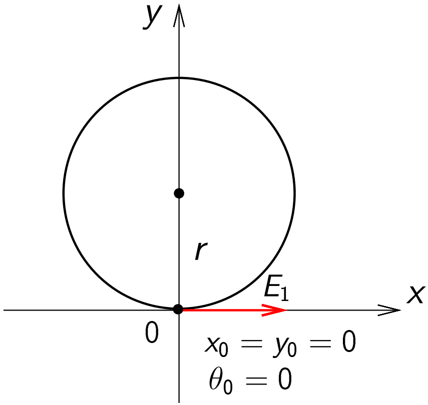


Рис.: 2

Теорема (о кривых с постоянной кривизной)

Пусть у кривой $\alpha(t)$ кривизна $k(t) \equiv k_0$.
Тогда

(1) если $k_0 = 0$, то $\alpha(I)$ лежит на прямой;

(2) если $k_0 \neq 0$, то $\alpha(I)$ лежит на окружности радиуса $R = \frac{1}{|k_0|}$ с центром $p_0 = \alpha(t) + \frac{1}{k_0} \cdot E_2(t)$

Справедливо и обратное: прямая имеет постоянную нулевую кривизну, а окружность — постоянную ненулевую.

1. Доказательство для прямой.

(1) $(\Rightarrow)$ $k(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{E}_1 = |\dot{\alpha}| \cdot k \cdot E_2 \equiv 0 \Rightarrow E_1 = \vec{a} = const \Rightarrow \alpha$ — кривая постоянного направления.
$(\Leftarrow)$ Пусть α — прямая. Тогда можно считать, что $O \in \alpha(I)$ и поэтому $\alpha \parallel \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} = \lambda(t)\alpha(t) \Rightarrow \ddot{\alpha} = \dot{\lambda} \cdot \alpha + \lambda \cdot \dot{\alpha} \parallel \dot{\alpha} \Rightarrow k = \frac{\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3} \equiv 0$.

2. Доказательство для окружности $(\Rightarrow)$ — см. пример 1. Для доказательства обратного утверждения $(\Leftarrow)$ перейдите к натуральной параметризации окружности и докажите во формуле вычисления кривизны, что кривизна окружности постоянна и обратно ее радиусу (упражнение, 16).