

Основы дифференциальной геометрии и топологии

Лекция 3-4

Гладкие линии на плоскости

Ю. В. Нагребцкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика
(4 семестр)

Определение

Гладкая линия — образ некоторой гладкой регулярной кривой.

Обоснование.

1) График любой гладкой функции $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ — регулярная кривая.

2) Пусть $\alpha(I)$ — гладкая линия на плоскости: для любого $t \in I$
 $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$; $\dot{\alpha} = (\dot{x}, \dot{y}) \neq \vec{0}$.

Значит, для любой точки $t = t_0$ справедливо $\dot{x}(t_0) \neq 0$ или $\dot{y}(t_0) \neq 0$.

Без ограничений общности будем считать, что

$\dot{y}(t_0) \neq 0 \Rightarrow \exists O(t_0) : \dot{y}(t) \neq 0, \forall t \in O(t_0) \Rightarrow y(t)$ строго монотонна в $O(t_0)$, т.е. существует обратная функция

$t = t(y) \Rightarrow x = x(t) = x(t(y)) = x(y)$.

Таким образом, в $O(\alpha(t_0))$ линия — это график некоторой гладкой функции (без самопересечений) (см. рис.1).

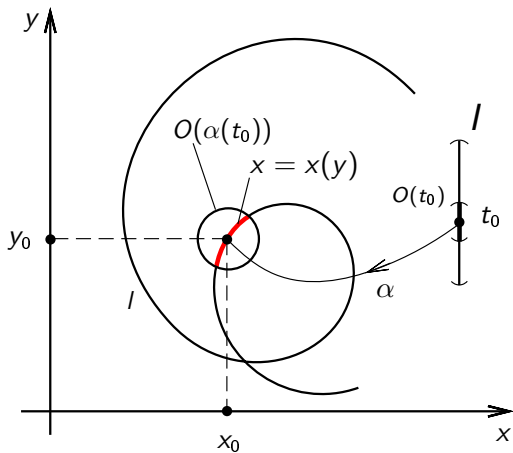


Рис.: 1

3) Любую регулярную кривую I можно задать уравнением $F(x, y) = 0$, где F — гладкая функция, удовлетворяющая условию $\overrightarrow{\text{grad}}F \Big|_I \neq \vec{0}$, $I = F^{-1}(0)$.

При этих условиях $\forall M_0 \in I \exists O(M_0) : F^{-1}(0) \cap O(M_0)$ — образ гладкой регулярной кривой.

Пусть $M_0 \in I$, $\overrightarrow{\text{grad}}F \Big|_{M_0} \neq \vec{0}$. Без ограничения общности будем считать, что $F'_y \neq 0$ в точке $M_0 = (x_0, y_0)$.

Тогда по теореме о неявной функции существует такая окрестность $O(x_0)$, что для некоторой гладкой функции $y = y(x)$, определенной в $O(x_0)$, выполняется условие $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x)$.

Пусть $\alpha(t) = (t, y(t))$, $t \in I = O(x_0)$ — гладкая регулярная кривая. Тогда $\exists O(M_0) : O(M_0) \cap F^{-1} = \alpha(I)$. (см.рис.2)

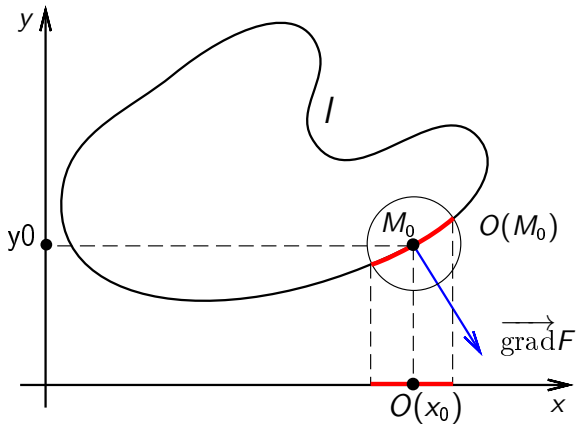


Рис.: 2

Явное задание кривой

$\alpha : I \rightarrow R^n$ - гладкая регулярная кривая, $I = \alpha(I)$ — линия,
 $t_0 \in I$, $M_0 = \alpha(t_0)$ — точка на кривой I .

Уравнение касательной: $p = \alpha(t_0) + \dot{\alpha}(t_0)u$, $u \in \mathbb{R}$;

Уравнение нормали: $\langle q - \alpha(t_0), \dot{\alpha}(t_0) \rangle = 0$. (рис.3)

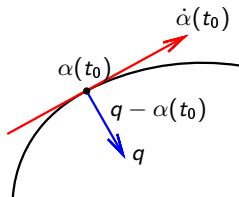


Рис.: 3

Пусть $I = F^{-1}(0)$ — гладкая кривая, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, где F — гладкая функция, $\vec{\text{grad}}F \Big|_I \neq 0$.

Как показано выше, существует $O(M_0)$ т.ч. $I \cap O(M_0) = \alpha(I)$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкая регулярная кривая.

Утверждение

$\vec{\text{grad}}F$ перпендикулярен касательной в любой точке линии $I = F^{-1}(0)$ (см.рис.4).

Доказательство. В обозначениях второго примера предыдущего пункта имеем: $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.

Вектор $\dot{\alpha}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0))$ параллелен касательной в точке $\alpha(t_0)$; $F(x(t), y(t)) \equiv 0$.

Дифференцируем это равенство: $F'_x \dot{x} + F'_y \dot{y} \equiv 0$.

Значит, $\langle \vec{\text{grad}}F, \dot{\alpha} \rangle \Big|_{t=t_0} = 0$

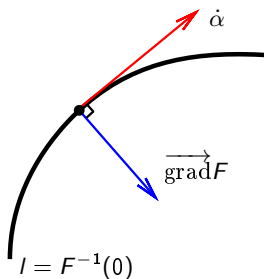


Рис.: 4

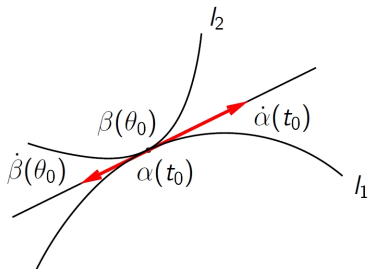
Определение.

Две гладкие линии *касаются* в точке пересечения, если в этой точке они имеют общую касательную.

Случай 1. Явное задание обеих гладких линий.

Пусть l_1 — образ кривой $\alpha(t)$; l_2 — образ кривой $\beta(\theta)$;

α, β — гладкие регулярные кривые.



Условие касания:

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = \beta(\theta_0) \\ \dot{\alpha}(t_0) \parallel \dot{\beta}(\theta_0) \end{cases}$$

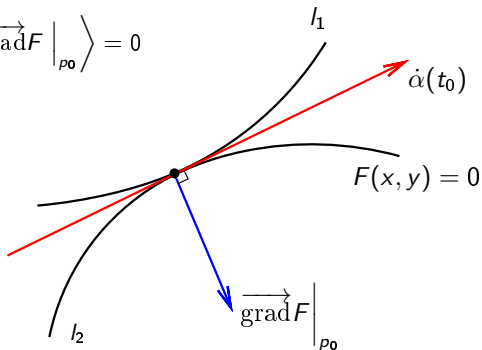
Случай 2. Явное задание одной гладкой линии и неявное задание другой.

l_1 — образ гладкой регулярной кривой α ,

F — гладкая функция, $l_2 = F^{-1}(0)$, $\overrightarrow{\text{grad}}F \Big|_{l_2} \neq \vec{0}$.

Условия касания:

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = p_0 \\ F(p_0) = 0 \\ \left\langle \dot{\alpha}(t_0), \overrightarrow{\text{grad}}F \Big|_{p_0} \right\rangle = 0 \end{cases}$$

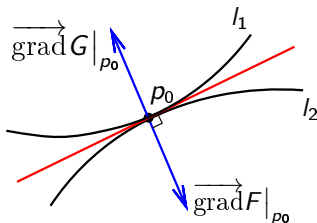


Случай 3. Неявное задание обеих гладких линий.

$l_1 = F^{-1}(0)$, $l_2 = G^{-1}(0)$, F, G — гладкие функции,
 $\overrightarrow{\text{grad}}F|_{l_1} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{\text{grad}}G|_{l_2} \neq \vec{0}$.

Условия касания:

$$\begin{cases} F(p_0) = G(p_0) = 0 \\ \overrightarrow{\text{grad}}F|_{p_0} \parallel \overrightarrow{\text{grad}}G|_{p_0} \end{cases}$$



Пример касания двух гладких линий

Пример. Доказать касание двух гладких линий (см.рис. 5)

$$l_1 : y = \cos(x), \quad l_2 : y = 1 - x^2.$$

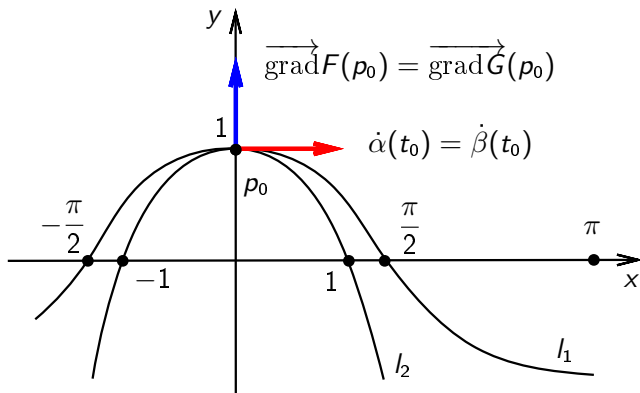


Рис.: 5

1) Явное задание линий.

$$\alpha(t) = (t, \cos(t)), \quad \beta(\theta) = (\theta, 1 - \theta^2), \quad p_0 = (0, 1), \quad t_0 = 0, \quad \theta_0 = 0,$$

$$\alpha(t_0) = \beta(\theta_0) = p_0, \quad \dot{\alpha}(t_0) = \dot{\beta}(\theta_0) = (1, 0),$$

$$\dot{\alpha}(t) = (1, -\sin(t)), \quad \dot{\beta}(\theta) = (1, -2\theta),$$

l_1 и l_2 касаются в точке $p_0 = (0, 1)$; $x_0 = 0, y_0 = 1$.

2) Смешанное задание линий.

$$l_1 : \alpha(t) = (t, \cos(t)), \quad t_0 = 0, \quad p_0 = \alpha(t_0) = (0, 1),$$

$$l_2 : F(x, y) = x^2 + y - 1 = 0, \quad F(p_0) = 0,$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}F = (2x, 1), \quad \dot{\alpha}(t_0) = (1, -\sin t_0) = (1, 0),$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}F \Big|_{p_0} = (0, 1).$$

3) Неявное задание линий.

$$l_1 : G(x, y) = y - \cos(x) = 0,$$

$$l_2 : F(x, y) = x^2 + y - 1 = 0, \quad p_0 = (0, 1), \quad G(p_0) = F(p_0) = 0,$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}G = (\sin x, 1),$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}F = (2x, 1).$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}G(p_0) = \overrightarrow{\text{grad}}F(p_0) = (0, 1).$$

Пусть кривые заданы по случаю 2 (одна явно, другая — неявно) и выполняется условие их касания:

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = p_0, F(p_0) = 0 \\ \langle \dot{\alpha}(t_0), \overrightarrow{\text{grad}}F \Big|_{p_0} \rangle = 0 \end{cases}$$

Введем функцию: $f(t) = F(\alpha(t)) = F(x(t), y(t))$. Тогда условие касания принимает вид:

$$\begin{cases} f(t_0) = 0 \\ f'(t_0) = F'_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + F'_y(x(t), y(t))\dot{y}(t) \Big|_{t=t_0} = \langle \overrightarrow{\text{grad}}F \Big|_{p_0}, \dot{\alpha}(t_0) \rangle = 0 \end{cases}$$

Функция $f(t)$ характеризует меру отличия образа кривой $\alpha(t)$ от гладкой линии $L = F^{-1}(0)$, $F(x, y) = 0$.

Определение.

Говорят, что линии l_1 и l_2 *имеют порядок касания* k в точке $p_0 \in l_1 \cap l_2$, если

$$0. f(t_0) = 0.$$

$$1. \dot{f}(t_0) = 0.$$

$$2. \ddot{f}(t_0) = 0.$$

$$3. \overset{\cdot\cdot\cdot}{f}(t_0) = 0.$$

$$\vdots$$

$$k. f^{(k)}(t_0) = 0.$$

$$k + 1. f^{(k+1)}(t_0) \neq 0.$$

Тогда по формуле Тейлора $f(t) = o((t - t_0)^k)$ в окрестности точки t_0 .

Пример. Найти порядок касания двух гладких линий

$l_1 : y = \cos(x)$, $l_2 : y = 1 - x^2$ в их точке касания (см. рис.5).

Решение. Рассмотрим случай *смешанного задания* кривых (слайд "Пример условия касания двух гладких линий")

$l_1 : \alpha(t) = (t, \cos(t))$, $t_0 = 0$, $p_0 = \alpha(t_0) = (0, 1)$,

$l_2 : F(x, y) = x^2 + y - 1 = 0$, $F(p_0) = 0$, $\overrightarrow{\text{grad}}F = (2x, 1)$, $\dot{\alpha}(t_0) = (1, -\sin t_0) = (1, 0)$, $\overrightarrow{\text{grad}}F \Big|_{p_0} = (0, 1)$.

Тогда

$f(t) = F(\alpha(t)) = F(x(t), y(t)) = t^2 + \cos t - 1$;

$f(0) = 0$;

$f'(t) = F(\alpha(t)) = 2t - \sin t$; $f'(0) = 0$;

$f''(t) = F(\alpha(t)) = 2 - \cos t$; $f''(0) = 1 \neq 0$;

Следовательно, данные гладкие линии имеют в точке касания $(0, 1)$ касание первого порядка.

Определение.

Пусть C^t - семейство гладких линий, $t \in I$. Говорят, что гладкая линия C является *оггибающей* семейства C^t , если

- 1 $C = \alpha(I)$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ - гладкая регулярная кривая;
- 2 $\forall t \in I$ (C касается C^t в точке $\alpha(t)$) (см.рис.6)

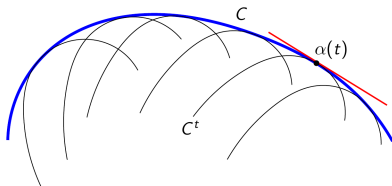


Рис.: 6

Утверждение.

Всякая регулярная гладкая кривая является огибающей для семейства своих касательных (см. рис.7).

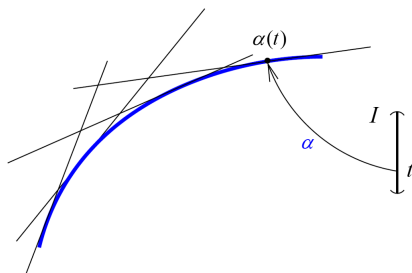


Рис.: 7

Теорема (необходимое условие огибающей)

Пусть C^t задается уравнением $F(x, y, t) = 0$, $t \in I$, F — гладкая функция; $\overrightarrow{\text{grad}}F|_{C^t} \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$; и линия $C = \alpha(I)$ является огибающей семейства C^t , $\alpha(t)$ — гладкая регулярная линия. Тогда $\forall t \in I \forall (x, y) \in C [(x, y) = \alpha(t)]$ выполняются равенства

$$F(x, y, t) = 0, \quad F_t(x, y, t) = 0. \quad (1)$$

Доказательство.

Пусть $M(x, y) = \alpha(t) \in C$, $M \in C^t \Rightarrow$ выполняется первое равенство из (1)

$$(*) \quad F(x(t), y(t), t) \equiv 0$$

$$(x, y) = \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

Дифференцируем (*) по t :

$$F'_x(x(t), y(t), t) \dot{x}(t) + F'_y(x(t), y(t), t) \dot{y}(t) + F'_t(x(t), y(t), t) \equiv 0;$$

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}}F|_{\alpha(t)}, \dot{\alpha}(t) \rangle = 0 \Rightarrow F'_t(x(t), y(t), t) \equiv 0.$$

Определение

Множество точек (x, y) , удовлетворяющих системе (1), называется *дискриминантой* семейства C_t .

Дискриминанта содержит не только точки огибающей, но и особые точки, точки самопересечения линий семейства и т.д.

Упражнение (26) (достаточное условие огибающей)

Если для любого $t \in I$ векторы $\overrightarrow{\text{grad}}F$ и $(\overrightarrow{\text{grad}}F)_t$ в точках решения системы (1) неколлинеарны, то система (1) определяет только огибающую.

Указание Использовать теорему о неявной функции.

Задача.

Найти огибающую семейства окружностей $(x - t)^2 + y^2 - R^2 = 0$, зависящих от одного параметра t .

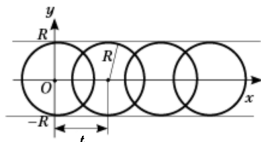


Рис.: 8

Изображение взято с [Сайта](#)

Решение.

$$F(x, y, t) = (x - t)^2 + y^2 - R^2 = 0 \quad (2)$$

$$F'_t(x, y, t) = -2(x - t) = 0 \quad (3)$$

Из (3) следует, что $x = t$, подставим в (2), получим $y^2 = R^2$, т.е. $y = \pm R$ - дискриминанта, которая, очевидно, является огибающей.

Задача (упражнение, 16). Найти огибающую траекторий снарядов, выпущенных из пушки со скоростью v_0 под различными углами α наклона ствола орудия к горизонту. Считать, что орудие находится в начале координат, а траектории снарядов лежат в плоскости XY (сопротивлением воздуха пренебречь) (см. рис.9).

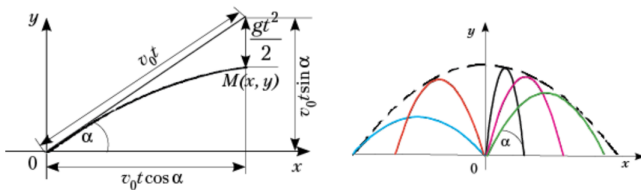


Рис.: 9

Изображение взято с [Сайта](#)