Основы дифференциальной геометрии и топологии
Лекция 2
Вектор-функция
Кривые в аффинном пространстве

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика
(4 семестр)

Определение

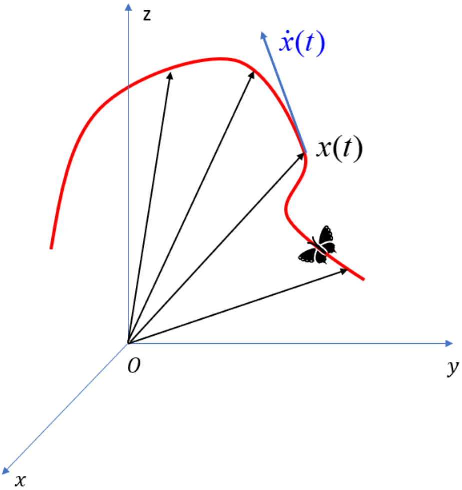
Вектор функция: $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))^T \subset \mathbb{R}^n, \quad x^i(t) : (a, b) \to \mathbb{R}$
Производная вектор-функции:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$$

Определение

Вектор-функция $x(t)$ называется *гладкой*, если каждая $\dot{x}^i(t), (i = 1, 2, \dots, n)$ — гладкая на (a, b), т.е. дифференцируема столько раз, сколько нам нужно.
Разложение вектор-функции $x(t)$ по формуле Тейлора в точке $t_0 \in (a, b)$:

$$x(t) = x(t_0) + \frac{\dot{x}(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + o((t - t_0)^k)$$


z
$\dot{x}(t)$
$x(t)$
O
y
x

Для вектор-функции справедливы формулы, аналогичные формулам для скалярной функции.

Вычисление интеграла от вектор-функции, скалярного произведения и произведения на матрицу A

$$\int_a^b \dot{x}(t)\,dt = x(b) - x(a)$$

$$\int_a^b \langle v, x(t)\rangle\,dt = \langle v, \int_a^b x(t)\,dt\rangle, \;\; v \in \mathbb{R}^n$$

$$\int_a^b Ax(t)\,dt = A\int_a^b x(t)\,dt, \;\; A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Определение

Отображение $B : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}^m$ называется *полилинейным*, если $B(x_1, \ldots, x_k)$ линейно по каждому аргументу.

Пример. $B(x, y) = [x]^T B_e [y]$ — билинейное отображение, где B_e — фиксированная матрица. При этом в заданном базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$ элементы матрицы B_e определяются равенством $B_{ij} = B(e_i, e_j)$. Если $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой базис, то $B_{e'} = T^T_{e \to e'} B_e T_{e \to e'}$.

Теорема (о дифференцировании полилинейных отображений).

Пусть $B : \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}^m$ — полилинейное отображение,
$x_1(t), \ldots, x_k(t)$ - вектор функции,
$x_i(t) : I \to \mathbb{R}^{n_i}$; $x(t) \overset{\text{опр}}{=} B(x_1(t), \ldots, x_k(t))$. Тогда

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{k} B(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), \dot{x}_i(t), x_{i+1}(t) \ldots, x_k(t))$$

Следствия.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ — вектор-функции. Тогда

1. $\frac{d\langle x(t), y(t)\rangle}{dt} = \langle \dot{x}(t), y(t)\rangle + \langle x(t), \dot{y}(t)\rangle$
2. $(x \times y)^{\cdot} = \dot{x} \times y + x \times \dot{y}$
3. $\frac{d}{dt}(A(t) \cdot B(t)) = \dot{A}(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot \dot{B}(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times m}, \ B \in \mathbb{R}^{m\times k}$
4. $\frac{d}{dt}(\det[x_1(t), \ldots, x_n(t)]) = \sum_{i=1}^{n} \det[x_1, \ldots, x_{i-1}, \dot{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n]$, $x_i(t) : I \to \mathbb{R}^n$
5. $|x(t)|^{\cdot} = \frac{\langle x(t), \dot{x}(t)\rangle}{|x(t)|}$

Доказательство (5): $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad |x|^{\cdot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle x, x\rangle}} \cdot (\langle \dot{x}, x\rangle + \langle x, \dot{x}\rangle) = \frac{\langle x, \dot{x}\rangle}{|x|}$

Определение

Кривой в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ называется отображение $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, где I — интервал, т.е. $\alpha(t) = v + x(t)$; $v \in \mathbb{R}^n$, $x(t) : I \to \vec{\mathbb{R}}^n$ — вектор-функция. $\alpha(I)$ называется *образом кривой*, или *линией*.

$$\dot{\alpha}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t)$$

$\dot{\alpha}(t) \parallel$ касательной к кривой в данной точке.

Определение

Кривая $\alpha(t)$ называется *регулярной в точке* $t = t_0$, если $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$. Кривая называется *регулярной на* I, если она регулярна в каждой точке интервала I.

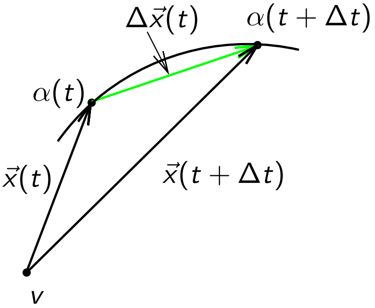


Рис. 1

Формула Тейлора

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \frac{\dot{\alpha}(t_0)}{1!}(t - t_0) + \ldots + \frac{\alpha^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + o((t - t_0)^k)$$

$[\alpha(t) - \alpha(t_0) = x(t)]$

Пример кривой в $\mathbb{R}^2$

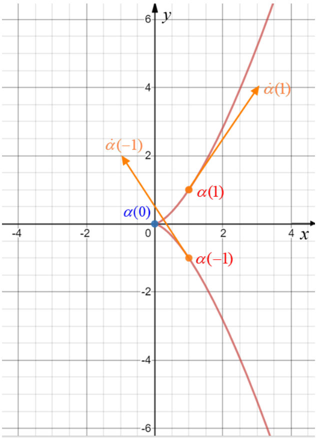


Рис.: 2

Рассмотрим пример. Пусть $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ — *полукубическая парабола* ($x^3 = y^2$, см. рис.2). Имеем $\dot{\alpha}(t) = (2t, 3t^2)$ и $\dot{\alpha}(0) = (0, 0)$.
$\dot{\alpha}(\pm 1) = (\pm 2, 3)^T$, $\dot{\alpha}(0) = (0, 0)$.
Кривая регулярна везде, кроме точки $O(0, 0)$.

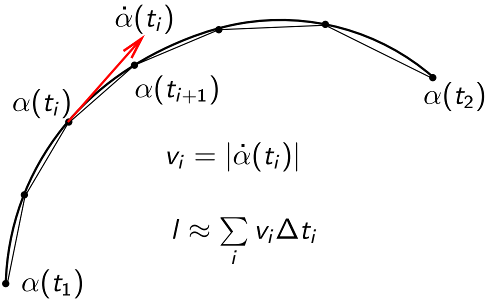


Рис.: 3

Длиной кривой $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, где $I = (a; b)$ называется число

$$l[\alpha]|_a^b = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt$$

Действительно, тот факт, что длину кривой естественно определять именно так, можно проиллюстрировать следующими “наводящими соображениями". Рассмотрим разбиение σ отрезка $[a, b]$ диаметра $d(\sigma)$ и заменим кривую ломаной, составленной из отрезков в m с концами в точках $\alpha(t_i)$, $t_i \in \sigma$. Длина ломаной будет равна

$$\sum_{t_i \in \sigma} |\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)| = \sum_{t_i \in \sigma} \frac{|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)|}{\Delta t_i} \Delta t_i.$$

Последняя сумма может быть преобразована к интегральной сумме для $\displaystyle\int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt$.

В частности, на плоскости получается известная из математического анализа формула: если $\alpha(t) = (x(t), y(t))^T$ на отрезке $[a, b]$, то

Замена параметра

Определение (эквивалентность кривых)

Пусть $\alpha(t), \beta(\tau)$ — кривые, $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $\beta : J \to \mathbb{R}^n$, I, J - интервалы. Будем говорить, что α *эквивалентна* (*положительно эквивалентна*) β, если существует такая функция $\varphi : J \overset{\text{на}}{\to} I$, что

1. φ — гладкая, $t = \varphi(\tau)$
2. φ — регулярная, т.е. $\dot{\varphi}(\tau) \neq 0$ $(\dot{\varphi}(\tau) > 0)$
3. $\beta(\tau) = \alpha(\varphi(\tau))$

$t = \varphi(\tau)$ — замена параметра (см.рис 4).

Оказывается, что каждое из введенных отношений является отношением эквивалентности на множестве всех гладких кривых.

Рассмотрим пример. Пусть $I = (0, 1)$, $J = (0, 1)$, $= (0, 1)$. Рассмотрим кривые

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \alpha(t) = (t, t)^T;$$
$$\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \beta(\theta) = (\theta^3, \theta^3)^T;\ t = \varphi(\theta) = \theta^3$$
$$\gamma : K \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \gamma(u) = (1-u, 1-u)^T;\ t = \varphi(u) = 1-u.$$

Все кривые регулярны, α положительно эквивалентна β $(t = \theta^3)$ и не является положительно эквивалентной γ $(t = 1-u)$.

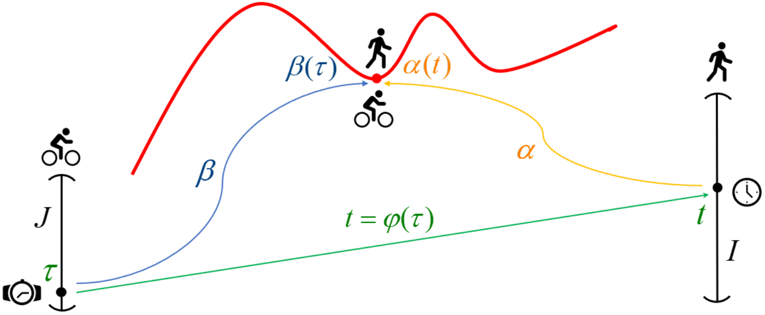


Рис.: 4

Утверждение.

Свойство *регулярности* и величина *длины кривой* инвариантны относительно эквивалентности кривых.

Доказательство

$$\dot{\beta}(t) = \dot{\alpha}\left(\varphi(\tau)\right) \cdot \dot{\varphi}(\tau) \Rightarrow \left[\dot{\beta}(\tau) \neq 0 \Leftrightarrow \dot{\alpha}(t) \neq 0\right].$$

$$l_1 = l[\alpha]\Big|_{t_1}^{t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\dot{\alpha}(t)|\, dt, \;\; l_2 = l[\beta]\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |\dot{\beta}(\tau)|\, d\tau = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |\dot{\alpha}\left(\varphi(\tau)\right)| \cdot |\dot{\varphi}(\tau)|\, d\tau.$$

Так как $\dot{\varphi}(\tau)$ не меняет знак на J, без ограничения общности можно считать, что $\dot{\varphi}(\tau) > 0$ на J

$$\Rightarrow l_2 = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |\dot{\alpha}\left(\varphi(\tau)\right)|\, d\varphi(\tau) = \left[\text{замена} \quad t = \varphi(\tau)\right] = l_1.$$

Утверждение.

Образы эквивалентных кривых *совпадают*, т.е. они «представляют» одну и ту же линию.

Определение.

Кривая $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ называется *кривой единичной скорости* (К1С), если $|\dot{\alpha}(t)| \equiv 1$ $(\forall t \in I)$.

Свойства К1С

Пусть $\alpha = \alpha(t)$ — К1С. Тогда

1. α — регулярная $\forall t \in I$;
2. $\ddot{\alpha} \perp \dot{\alpha}$ — ускорение всегда центростремительно;
3. Длина К1С от точки $\alpha(t_0)$ до $\alpha(t)$ равна $t - t_0$ $\left(l[\alpha] \Big|_{t_0}^{t} = t - t_0 \right)$

Доказательство

1. Очевидно.

2. Дифференцируем тождество $\dot{\alpha}^2 \equiv 1$ по t $\Rightarrow 2\langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle \equiv 0$.

Геометрический смысл:

К1С располагает интервал I в R^n как тонкую нерастяжимую нить.

Теорема(о положительной эквивалентности регулярной кривой и K1C).

Всякая регулярная кривая положительно эквивалентна K1C.

Доказательство

$\alpha : I \to \mathbb{R}^n, \alpha$ — регулярна на I, т.е $\dot{\alpha} \neq \vec{0}$, $s = l[\alpha] \Big|_{t_0}^{t} = \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(\tau)| d\tau = \psi(t)$

—

натуральная параметризация (натуральная замена параметра).
$\dot{\psi}(t) = |\dot{\alpha}(t)| \neq \vec{0} \Rightarrow \psi(t) \nearrow$ на I, $\psi(t)$ - гладкая $\Rightarrow$ существует гладкая функция $t = \varphi(s)$, — обратная к $s = \psi(t)$; тогда
$\dot{\varphi}(s) = \frac{1}{\dot{\psi}(t)} = \frac{1}{|\dot{\alpha}(t)|} > 0$; $\varphi : J \to I$; $J = \psi(I)$ — интервал.
Пусть $\beta(s) = \alpha(t(s)) = \alpha(\varphi(s))$. Тогда $\alpha(t)$ и $\beta(s)$ положительно эквивалентны.
$\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(\varphi(s)) \cdot \dot{\varphi}(s) = \frac{\dot{\alpha}(\varphi(s))}{|\dot{\alpha}(\varphi(s))|} = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} \Rightarrow |\dot{\beta}(s)| = \left| \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} \right| \equiv 1 \Rightarrow \beta(s)$ — K1C (см.рис.5).

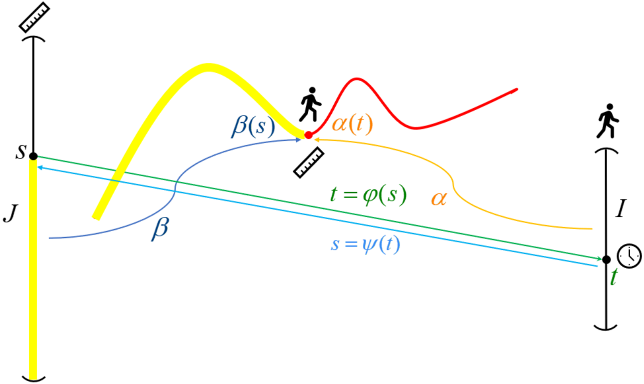


Рис.: 5

Пример.

$$\alpha(t) = p_0 + t \cdot \overrightarrow{v} \text{ — прямая}, \quad v = |\overrightarrow{v}|, \ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(t)|\, dt = \int\limits_{t_0}^{t} |\overrightarrow{v}|\, dt = v \cdot (t - t_0), \ t_0 = 0, \ s = v \cdot t = \psi(t) = s(t)$$

$$t = \frac{s}{v} = \varphi(s) = t(s), \ \beta(s) = \alpha(t(s)) = \alpha\left(\frac{s}{v}\right), \ \beta(s) = p_0 + \frac{s}{v} \cdot \overrightarrow{v}$$