Основы дифференциальной геометрии и топологии

Лекция 15

Геодезические кривые

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Направление: Математика
(4 семестр)

Пусть $f : U \to \mathbb{R}^m$ — поверхность, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — область, $n \leq m$ и пусть $\alpha : I \to U$ - регулярная кривая.

Определение геодезической кривой

Кривая $\beta = f \circ \alpha$ на поверхности f называется *геодезической*, если для любого $t \in I$ справедливо $\ddot{\beta}(t) \perp T_{\alpha(t)} f$.

Кривая β идет по поверхности как можно прямее, так как у неё нет горизонтальной составляющей (см.рис 1).

На плоскости геодезические — только прямые ($\ddot{\beta} \equiv 0 \Leftrightarrow \beta$ — прямая).

Определение геодезической линии

Линия на поверхности называется *геодезической*, если она является образом геодезической кривой.

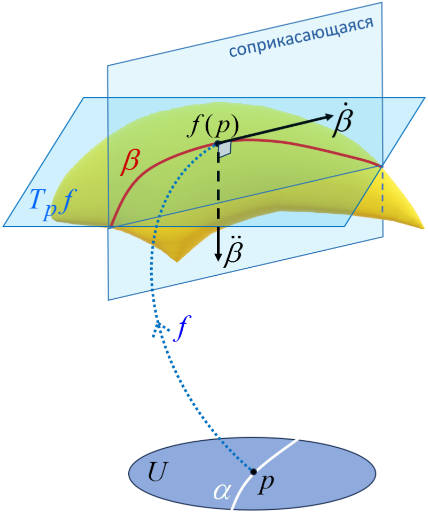

Рис.: 1

Пусть $\beta = f \circ \alpha$, где $\alpha : I \to U$, — произвольная кривая на поверхности $f : U \to \mathbb{R}^m$ и $p = \alpha(t)$.

Тогда $[\alpha(t)]_{f_u} = (u^1(t), u^2(t), \ldots, u^n(t))^T$, вектор скорости

$$\dot{\beta}(t) = d_p f(\dot{\alpha}(t)) = f'(p)[\dot{\alpha}(t)]_{f_u} = \sum_i f_{u^i}(\alpha(t))\dot{u}^i,$$

а вектор ускорения (см. рис. 2)

$$\ddot{\beta}(t) = \sum_i \sum_j f_{u^i u^j} \dot{u}^i \dot{u}^j + \sum_i f_{u^i} \ddot{u}^i =$$

$$= \sum_k f_{u^k} \ddot{u}^k + \sum_{i,j} \dot{u}^i \dot{u}^j \left(\sum_k \Gamma^k_{ij} f_{u^k} + N_{ij} \right) = \underbrace{\sum_k \left(\ddot{u}^k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j \right) f^k_u}_{\frac{\nabla \dot{\beta}}{dt} \text{ — ковариантное ускорение}} + \sum_{i,j} \dot{u}^i \dot{u}^j N_{ij}$$

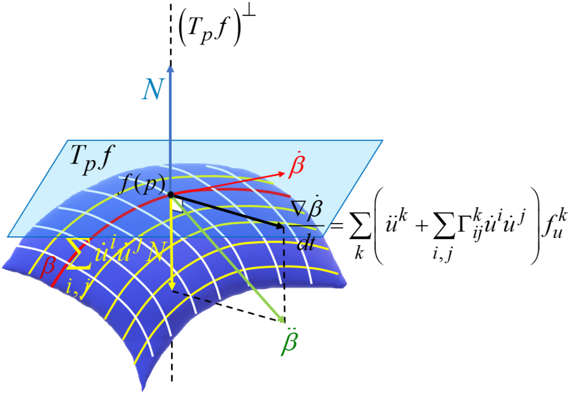
$(T_pf)^\perp$
N
T_pf
$f(p)$
$\dot\beta$
$\frac{\nabla\dot\beta}{dt}=\sum_k\left(\ddot u^k+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\dot u^i\dot u^j\right)f^k_u$
$\sum_{i,j}\dot u^i\dot u^j N$
β
$\ddot\beta$

Рис.: 2

Ковариантное ускорение

Определение ковариантного ускорения

Ковариантным ускорением произвольной кривой β на поверхности f называется ортогональная проекция

$$\frac{\nabla \dot{\beta}}{dt} = \sum_k \left(\ddot{u}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j \right) f_u^k$$

ускорения $\ddot{\beta}$ на касательное пространство $T_p f$, где $p = \alpha(t)$.

Свойства геодезической кривой

1. β — геодезическая $\Rightarrow |\dot{\beta}| \equiv const$;
2. β — геодезическая $\Leftrightarrow \dfrac{\nabla \dot{\beta}}{dt} \equiv 0 \Leftrightarrow$

$$\ddot{u}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0, k = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

<u>Доказательство</u>

(1): β – геодезическая $\Rightarrow \ddot{\beta} \perp \dot{\beta} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\langle \dot{\beta}, \dot{\beta} \rangle = 2\langle \underbrace{\dot{\beta}}_{\in T_p f}, \ddot{\beta} \rangle \equiv 0 \Rightarrow |\dot{\beta}| \equiv const$.

(2): β – геодезическая $\Leftrightarrow \ddot{\beta} \perp T_p f \Leftrightarrow \dfrac{\nabla \dot{\beta}}{dt} \equiv 0$.

Таким образом, геодезическая – это та кривая, по которой движется материальная точка на поверхности, если на нее не действуют никакие силы, кроме удерживающей связи.

Теорема о существовании и единственности геодезической линии

Пусть $f : U \to \mathbb{R}^m$ — поверхность, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — область, $n \leq m$, $p \in U$, $X \in T_p f$. Тогда существует единственная геодезическая кривая, проходящая через точку $f(p)$ со скоростью X (см. рис 3).

Доказательство следует из теоремы Коши существования и единственности решения системы (1) с начальными условиями

$[\beta(0)]_e = [p]_e$, т.е. $(u^1(0), u^2(0) \ldots, u^n(0)) = (u_0^1, u_0^2 \ldots, u_0^n)$;

$[\dot\beta(0)]_{f_u} = [X]_{f_u}$, т.е. $(\dot u^1(0), \dot u^2(0) \ldots, \dot u^n(0)) = (v_0^1, v_0^2 \ldots, v_0^n)$,

где $u_j^i, v_j^i \in \mathbb{R}$.

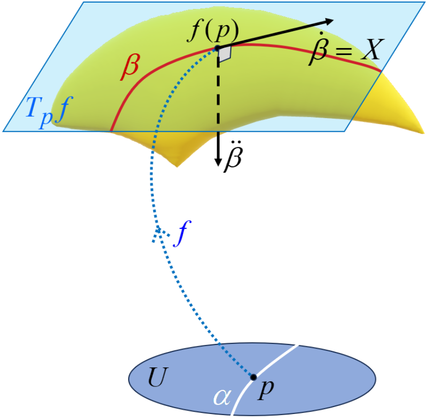

Рис.: 3

Задача

Найти геодезические кривые на цилиндре $f(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v)$, $-pi < u < pi$, $-\infty < v < +\infty$.

<u>Решение</u>

$$\begin{array}{ll} f_u = (-a\sin u, a\cos u), & f_v = (0,0,1) \\ g_{11} = (f_u)^2 = a^2 & g_{12} = g_{21} = \langle f_u, f_v\rangle = 0 \quad g_{22} = (f_v)^2 = 1 \end{array}$$

Следовательно,

$$[I_p] = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Значит, $g_{ij} = const$, поэтому по формуле (см. Лекция 14)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right)$$

получаем, что все коэффициенты связности $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$.

Тогда по формуле (1) имеем

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = 0 \\ \ddot{v}(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = C_1 t + C_2 \\ v(t) = D_1 t + D_2 \end{cases}$$

$$\alpha(t) = (u(t), v(t)) = (C_1 t + C_2, D_1 t + D_2),$$

$$\beta(t) = (f \circ \alpha)(t) = (f(u(t), v(t))) =$$

$$= (a \cos (C_1 t + C_2), a \sin (C_1 t + C_2), D_1 t + D_2)$$

При различных значениях произвольных постоянных C_1, D_1, C_2, D_2 получаются различные кривые на цилиндре (см. рис. 4).

Рассмотрим возможные случаи.

1). При $C_1 \neq 0$, $D_1 \neq 0$ кривая $t = \dfrac{1}{C_1}u - \dfrac{C_2}{C_1}$, $v = bu + c$, где $b = \dfrac{D_1}{C_1}$,
$c = D_2 - \dfrac{C_2 D_1}{C_1}u$,

$\alpha(u) = (u, bu + c)$,

$\beta(u) = (a\cos u, a\sin u, bu + c) = (a\cos u, a\sin u, bu) + (0, 0, c)$ — винтовая линия, сдвинутая в точку $M(0, 0, c)$.

2). При $C_1 = 0$, $D_1 \neq 0$ имеем $u = const$, $v \in \mathbb{R} \Rightarrow$ кривая β — v-линия, которая является прямолинейной образующей.

3). При $C_1 \neq 0$, $D_1 = 0$ кривая β — u-линия, которая является окружностью.

Это согласуется с нашими повседневными интуитивными представлениями о траектории наэлектизованного шарика, свободно катающегося по стенкам трубы, висящей в космическом пространстве.

Пример геодезической (иллюстрация)

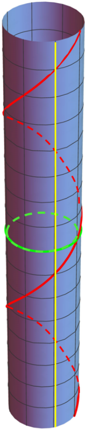

Рис.: 4

Покажем, что если две точки достаточно близки, то геодезическая — кратчайшая кривая между ними.

Определение деформации кривой

Пусть $\beta = f \circ \alpha$, где $\alpha : I \to U$, — произвольная кривая на поверхности $f : U \to \mathbb{R}^m$ и $p = \alpha(t)$.

Деформацией (вариацией) кривой β называется гладкое отображение $\gamma : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to f(U)$, такое, что $\gamma(t, 0) = \beta(t)$.

Таким образом, $\gamma(t, s)$ — семейство кривых $\gamma_s(t) = \gamma(t, s)$, $\gamma_0(t) = \beta(t)$ (см. рис.5).

$$\left.\frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial s}\right|_{s=0} = X(t) \text{ — } \textit{векторное поле деформации } \gamma.$$

Деформация называется *собственной*, если

$$\gamma(a, s) = \beta(a), \ \gamma(b, s) = \beta(b), \frac{\partial \gamma(t, s)}{\partial t} = \dot{\gamma}_s(t) \text{ (см. рис.6).}$$

Деформация γ называется *нормальной*, если $X(t) \perp \dot{\beta}(t)$ (см. рис.7).

Определение деформации (иллюстрация)

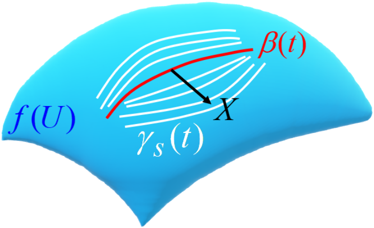

Рис.: 5

Определение собственной деформации (иллюстрация)

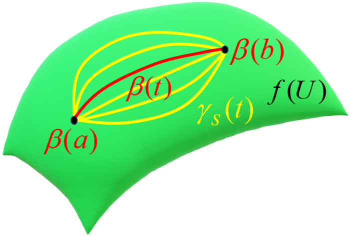

Рис.: 6

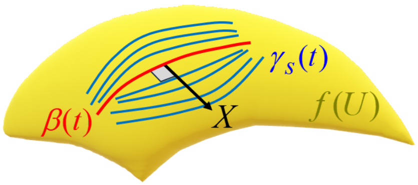

Рис.: 7

Наблюдение (о векторном поле деформации)

Для любого $t \in I$ справедливо $X \in T_p f$, где $p = \alpha(t)$ (см. рис.7).

Доказательство.

Заметим, что гладкое отображение $\gamma(t, s)$ может рассматриваться как двумерная поверхность, образ которой вложен в образ $f(U)$ поверхности f.

И поэтому для любой точки $p = \alpha(t)$ касательные пространства $T_p\gamma$ и $T_p f$ совпадают.

А значит, вектор X, являющийся касательным вектором для поверхности γ и поэтому лежащем в $T_p\gamma$, принадлежит также и $T_p f$.

Векторное поле деформации (иллюстрация)

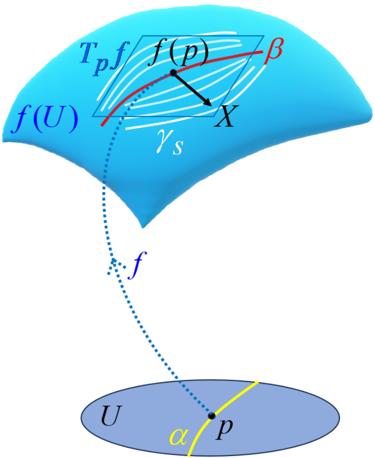

Рис.: 7

Найдем длину деформации кривой

$$l(s) = l[\gamma_s] = \int\limits_a^b |\dot{\gamma}_s(t)|\, dt = \int\limits_a^b \left|\frac{\partial\gamma(t,s)}{\partial t}\right| dt$$

Покажем, что $\min\{l(s) \mid s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\} = l(0)$, в частности, $\dot{l}(0) = 0$.

Лемма о собственной или нормальной деформации

Если деформация γ — собственная или нормальная, а β — кривая 1-скорости, то $\dot{l}(0) = -\int\limits_a^b \langle \ddot{\beta}, X\rangle = -\int\limits_a^b \left\langle \frac{\nabla\dot{\beta}}{dt}, X\right\rangle dt$

<u>Доказательство.</u> Вычислим

$$\dot{l}(s) = \frac{d}{ds} l[\gamma_s] = \frac{\partial}{\partial s}\int\limits_a^b |\dot{\gamma}_s(t)|\, dt = \int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial s}\left|\frac{\partial\gamma(t,s)}{\partial t}\right| dt =$$

$$= \left[\dot{|x|} = \frac{\langle x, \dot{x} \rangle}{|x|} \right] = \int\limits_a^b \frac{\left\langle \dfrac{\partial \gamma(t,s)}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 \gamma(t,s)}{\partial t \partial s} \right\rangle}{\left| \dfrac{\partial \gamma(t,s)}{\partial t} \right|} dt$$

Значит,

$$\dot{l}(0) = \int\limits_a^b \frac{\left\langle \dfrac{\partial \gamma(t,0)}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 \gamma(t,0)}{\partial t \partial s} \right\rangle}{\left| \dfrac{\partial \gamma(t,0)}{\partial t} \right|} dt \qquad (2)$$

Ввиду $\gamma(t,0) = \beta(t)$, имеем $\dfrac{\partial \gamma(t,0)}{\partial t} = \dot{\beta}(t)$, а поскольку β – К1С, $\left| \dfrac{\partial \gamma(t,0)}{\partial t} \right| = 1$. Далее, по определению $X(t) = \left. \dfrac{\partial \gamma(t,s)}{\partial s} \right|_{s=0}$.

Доказательство вспомогательной леммы

Следовательно,

$$\dot{X}(t) = \frac{\partial^2 \gamma(t,s)}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 \gamma(t,0)}{\partial t \partial s}$$

Подставляя в (2), получим

$$\dot{i}(0) = \int\limits_a^b \langle \dot{\beta}(t), \dot{X}(t) \rangle \, dt$$

Преобразуем последний интеграл

$$\dot{i}(0) = \int\limits_a^b \langle \dot{\beta}(t), \dot{X}(t) \rangle \, dt = \int\limits_a^b \frac{d}{dt} \Big(\langle \dot{\beta}, X \rangle - \ddot{\beta}, X \Big) \, dt =$$

$$= [\text{формула Ньютона-Лейбница}] = \langle \dot{\beta}, X \rangle \Big|_a^b - \int\limits_a^b \langle \ddot{\beta}, X \rangle \, dt$$

Если γ — нормальная деформация, то $\dot{\beta}(t) \perp X(t)$ и тогда $\langle \dot{\beta}, X \rangle = 0$, а значит, $\langle \dot{\beta}, X \rangle \Big|_a^b = 0$.

Если γ — собственная деформация, то

$$X(a) = \frac{\partial \gamma(a,s)}{\partial s} = \frac{\partial \beta(a)}{\partial s}\Big|_{s=0} = 0, \quad X(b) = \frac{\partial \gamma(b,s)}{\partial s} = \frac{\partial \beta(b)}{\partial s}\Big|_{s=0} = 0$$

И поэтому снова $\langle \dot{\beta}, X \rangle \Big|_a^b = 0$.

Итак,

$$\dot{l}(0) = -\int_a^b \langle \ddot{\beta}, X \rangle \tag{3}$$

По определению ковариационное ускорение $\dfrac{\nabla\dot{\beta}}{dt}$ является проекцией ускорения $\ddot{\beta}(t)$ на касательное пространство $T_p f$, где $p = \alpha(t)$.

Значит, $\ddot{\beta} = \dfrac{\nabla\dot{\beta}}{dt} + \vec{n}$, где $\dfrac{\nabla\dot{\beta}}{dt} \in T_p f$ и $\vec{n} \in (T_p f)^{\perp}$ (см. рис.8).

Но наблюдению $X \in T_p f$, следовательно, $\langle\ddot{\beta}, X\rangle = \left\langle\dfrac{\nabla\dot{\beta}}{dt}, X\right\rangle$.

Отсюда и из (3) получаем требуемое леммой.

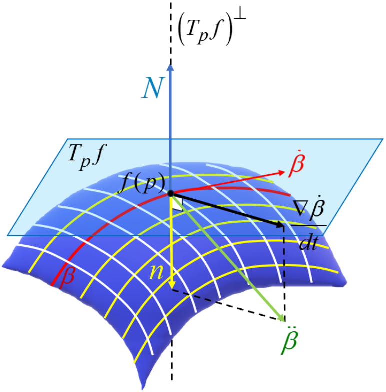
$\left(T_p f\right)^{\perp}$
N
$T_p f$
$f(p)$
$\dot{\beta}$
$\frac{\nabla \dot{\beta}}{dt}$
β
n
$\ddot{\beta}$

Рис.: 8

Определение экстремали

Кривая β называется *экстремалью интеграла длины*, если $\dot{l}(0) = 0$.

Основная теорема о геодезической

Пусть $f : U \to \mathbb{R}^m$ — поверхность, $\alpha : [a, b] \to U$ - кривая такая, что $\beta = f \circ \alpha$ — К1С. Тогда следующие утверждения эквивалентны

1. β — геодезическая;
2. β — экстремаль интеграла длины для любой собственной деформации;
3. β — экстремаль интеграла длины для любой нормальной деформации.

Доказательство.

По лемме для собственной или номальной деформации кривой β справедливо

$$\dot{l}(0) = -\int\limits_a^b \left\langle \frac{\nabla \dot{\beta}}{dt}, X(t) \right\rangle dt$$

(1) $\Rightarrow$ (2): β — геодезическая $\Leftrightarrow \dfrac{\nabla \dot{\beta}}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{l}(0) = 0 \Rightarrow \beta$ – экстремаль.

(2) или (3) $\Rightarrow$ (1) – докажем по контрапозиции $\neg(1) \Rightarrow (\neg(2)$ и $\neg(3))$:

Пусть α — не геодезическая, т.е. $\exists t_0 \in [a, b]$, такое что $\dfrac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$.

Тогда в силу непрерывности $\dfrac{\nabla \dot{\alpha}}{dt}(t) \neq \vec{0}$ при $t \in [a_0, b_0], a \leqslant a_0 < b_0 \leqslant b$.

Пользуясь этим построим деформацию, которая будет одновременно собственной и нормальной.

Нужна гладкая функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi(t) > 0$ при $t \in (a_0, b_0)$ и $\varphi(t) \equiv 0$ в противном случае.

Пусть (см. рис.9)

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases}$$

Данная функция является гладкой (упражнение 1).

Тогда в качестве искомой $\varphi(t)$ можно взять функцию (упражнение 2)

$$\varphi(t) = \varphi(t - a_0) \cdot \varphi(b_0 - t)$$

(см. рис.10).

График функции $t = \varphi_0(t)$

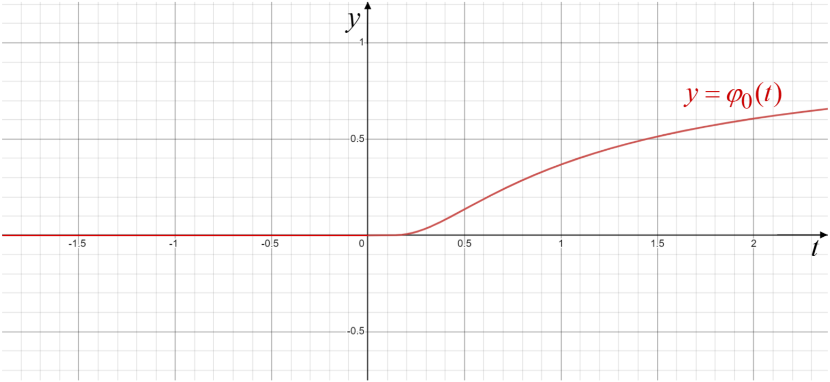

Рис.: 9

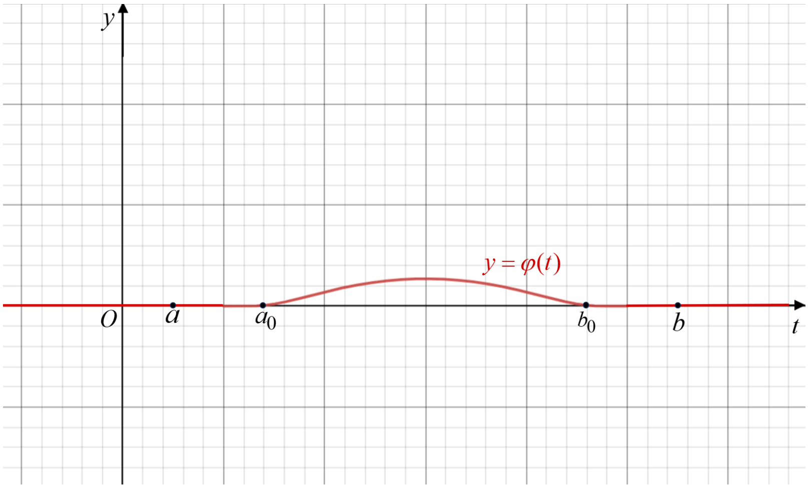

Рис.: 10

Определим вектор $\vec{x}(t)$ как прообраз ковариантного ускорения кривой β:

$$\vec{x}(t) = df^{-1}_{\alpha(t)} \left(\frac{\nabla \dot{\beta}}{dt} \right) \neq \vec{0}$$

А в качестве деформации возьмем

$$\gamma(t, s) = f\left(\delta_s(t)\right), \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что прообразы $\delta_s(t) = \alpha(t) + s\varphi(t)\vec{x}(t)$ кривых $\gamma(t, s)$ лежат в U (см. рис. 11).

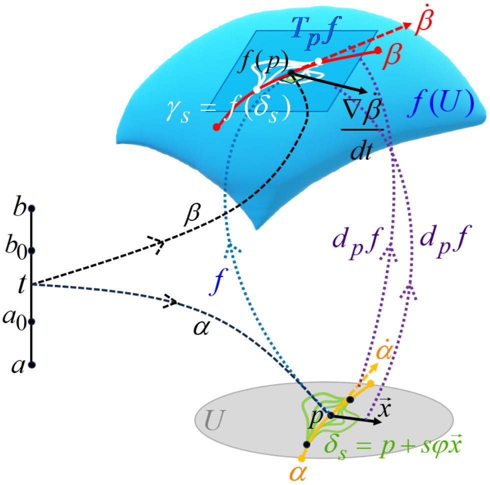
T_pf
$\dot\beta$
$f(p)$
β
$\gamma_s = f(\delta_s)$
$\frac{\nabla\dot\beta}{dt}$
$f(U)$
b
b_0
t
a_0
a
β
α
f
d_pf
d_pf
$\dot\alpha$
$\vec{x}$
U
p
$\delta_s = p + s\varphi\vec{x}$
α

Рис.: 11

γ — собственная деформация:

$$\gamma(a,s) = f\left(\alpha(a) + s\underbrace{\varphi(a)}_{\substack{\parallel \\ 0}}\vec{x}(a)\right) = f(\alpha(a)) = \beta(a); \quad \gamma(b,s) = \beta(b).$$

Проверим, что γ — нормальная деформация:

$$X(t) = \left.\frac{\partial\gamma(t,s)}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial}{\partial s}\left(f\left(\alpha(t)\right)\right)\right|_{s=0} =$$

$$= \left.\left(f'\left(\alpha(t) + s\varphi(t)\vec{x}(t)\right)\right|_{s=0} \cdot \left(\alpha(t) + s\varphi(t)\vec{x}(t)\right)'_s\right|_{s=0} =$$

$$= f'\left(\alpha(t)\right)\varphi(t)\vec{x}(t) = f'\left(p\right)\left(\varphi(t)\vec{x}(t)\right) = df_p\left(\varphi(t)\vec{x}(t)\right) =$$

$$= \varphi(t)df_p\left(\vec{x}(t)\right) = \varphi(t)\frac{\nabla\dot{\beta}}{dt}$$

Так как $|\dot{\beta}| \equiv 1$, то $\ddot{\beta} \perp \dot{\beta}$.

Тогда по теореме о трех перпендикулярах (см. рис. 12) $\dfrac{\nabla \dot{\beta}}{dt} \perp \dot{\beta}$.

Следовательно, $X \perp \dot{\beta}$. Это и означает, что γ — нормальная деформация.

Наконец, вычислим

$$\dot{l}(0) = -\int_a^b \left\langle \frac{\nabla \dot{\beta}}{dt}, \varphi(t) \frac{\nabla \dot{\beta}}{dt} \right\rangle dt = -\int_{a_0}^{b_0} \underbrace{\varphi(t) \left| \frac{\nabla \dot{\beta}}{dt} \right|^2}_{\substack{\vee \\ 0}} dt < 0$$

Теорема доказана.

Применение теоремы о трех перпендикулярах при доказательстве теоремы (иллюстрация)

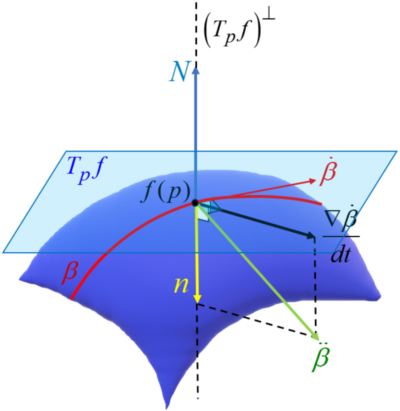

Рис.: 12