Основы дифференциальной геометрии и топологии

Лекция 14

Движение репера Френе вдоль поверхности
Уравнение Гаусса-Петерсона-Кодацци-Майнарди

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика
(4 семестр)

Для гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ можно построить теорию движения репера $(f; f_{u^1}, \dots, f_{u^n}, N)$:

$$N_{n^i} = -L_u(f_{u^i}) = -\sum_k a_i^k f_{u^k}, \quad \text{где } a_i^k = \sum_l g^{kl} h_{l_i}$$

Теорема Кристоффеля

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — поверхность. Тогда

$$f_{u^i u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k f_{u^k} + N_{ij},$$

где

1) $N_{ij} \perp T_u f$, и если $m = n + 1$, то $N_{ij} = h_{ij} N_j$;
2) $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right).$

Доказательство

(1) Так как $f_{u^i u^j} \in \overrightarrow{\mathbb{R}^m} = T_p f \oplus (T_p f)^{\perp}$, то $f_{u^i} u^j = Xij + N_{ij}$, где $X_{ij} \in T_p f$, $N_{ij} \perp T_p f$.

Если $m + n + 1$, то $(T_p f)^{\perp} = \langle N \rangle$ и тогда $N_{ij} = \sigma_{ij} N$ (см. рис. 1).

Далее, $\sigma_{ij} = \langle N_{ij}, N \rangle = \langle X_{ij} + N_{ij}, N \rangle = \langle f_{u^i u^j}, N \rangle = h_{ij}$.

(2) Поскольку $X_{ij} \in T_p f$, имеем $X_{ij} = \sum\limits_k \Gamma^k_{ij} f_{u^k}$ для некоторых $\Gamma^k_{ij} \in \mathbb{R}$. Так $f_{u^i} u^j = f_{u^j} u^i$ (в смешанных производных порядок дифференцирования безразличен), то $X_{ij} = X_{ji}$. Следовательно, $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Обозначим через

$$\Gamma_{ijk} = \langle f_{u^i u^j}, f_{u^k} \rangle = \langle \sum_l \Gamma^l_{ij} f_{u^l} + N_{ij}, f_{u^k} \rangle = \sum_l \Gamma^l_{ij} g_{lk}$$

Коэффициенты Γ^k_{ij}, Γ_{ijk} называются *коэффициентами связности* или *символами Кристоффеля второго рода*. Коэффициенты Γ_{ijk} называются *символами Кристоффеля первого рода*.

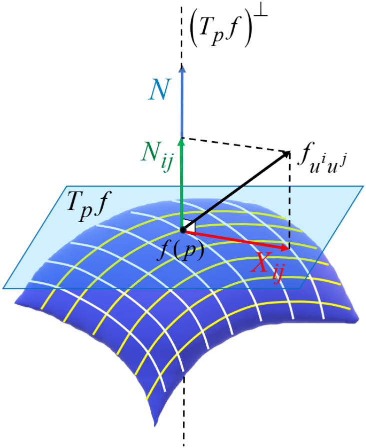

Рис.: 1

Наблюдение 1 (о символах Кристофеля)

Символы Кристофеля первого и второго рода являются свойством внутренней геометрии поверхности.

Напомним, что $(g_{ij}) = (\langle f_{u_i}, f_{u_j} \rangle)$ *– матрица Грамма стандартного базиса касательного пространства* $(f_{u_1}, f_{u_2}, \dots, f_{u_n})$*, а* (g^{ij}) *– обратная матрица к матрице* (g_{ij}).

Умножим равенство для Γ_{ijk} на g^{km} и просуммируем по k :

$$\sum_k \Gamma_{ijk} g^{km} = \sum_k \sum_l \Gamma^l_{ij} g_{lk} g^{km} = \sum_l \Gamma^l_{ik} \sum_k \underbrace{g_{lk} g^{km}}_{\delta^m_l} = \sum_l \Gamma^l_{ik} \delta^m_l = \Gamma^m_{ij}$$

Итак, получим: $\boxed{\Gamma^m_{ij} = \sum_l \Gamma_{ijk} g^{km}}$

Продифференцируем по u^j равенство $g_{il} = \langle f_{u^i}, f_{u^l} \rangle$:

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \langle f_{u^i u^j}, f_{u^l} \rangle + \langle f_{u^i}, f_{u^l u^j} \rangle = \langle f_{u^i u^j}, f_{u^l} \rangle + \langle f_{u^l u^j}, f_{u^i} \rangle = \Gamma_{ijl} + \Gamma_{lji}$$

Запишем последнее равенство, подставляя различные значения индексов:

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \underline{\underline{\underline{\Gamma_{ijl}}}} + \underline{\underline{\Gamma_{lji}}}$$

$$\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} = \underline{\Gamma_{lji}} + \underline{\underline{\underline{\Gamma_{ijl}}}}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \underline{\Gamma_{lji}} + \underline{\underline{\Gamma_{lji}}}$$

В этих равенствах одинаково подчеркнуты одинаковые слагаемые.

Сложим первые два этих равенства и вычтем третье:

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = 2\Gamma_{ijl}$$

Тогда

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_l g^{kl} = \Gamma_{ijl} = \frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$$

Таким образом,

$$\Gamma_{ijl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)$$

или, что тоже самое,

$$\Gamma_{ijm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)$$

Следовательно,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m g^{km}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)$$

Теорема доказана.

Теорема (уравнение Гаусса-Петерсона-Кодацци-Майнарди)

Для гиперповерхности справедливы уравнения:

1. $\dfrac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial u^i} - \dfrac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial u^j} + \sum_l \left(\Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{li} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lj}\right) = h_{jk}(\mathrm{L}_p(f_{u^i}))^m - h_{ik}(\mathrm{L}_p(f_{u^j}))^m$
2. $\dfrac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} - \dfrac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} + \sum_l \left(\Gamma^l_{jk} h_{li} - \Gamma^l_{ik} h_{lj}\right) = 0$

Доказательство основано на равенстве $f_{u^j u^k u^i} = f_{u^i u^k u^j}$ смешанных производных.

Вычислим $f_{u^j u^k u^i}$ с учетом выражения для f_{u_l, u_i} из теоремы Кристофеля:

$$f_{u^j u^k u^i} = \frac{\partial f_{u^j u^k}}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial u^i}\left(\sum_l \Gamma^l_{jk} f_{u^l} + h_{jk} N\right) =$$

$$= \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial u^i} f_{u^l} + \sum_l \Gamma^l_{jk}\left(\sum_m \Gamma^m_{li} f_{u^m} + h_{li} N\right) + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} N + h_{jk} N_{u^i} =$$

$$= [\mathrm{L}_p(f_{u^i}) = -N_{u^i}] =$$

$$= \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial u^i} f_{u^l} + \sum_l \Gamma^l_{jk}\left(\sum_m \Gamma^m_{li} f_{u^m} + h_{li}N\right) + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} N - h_{jk}\mathrm{L}_p(f_{u^i}) =$$

$$= \sum_m \frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial u^i} f_{u^m} + \sum_l \left(\sum_m \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{li}\right) f_{u^m} + \sum_l \Gamma^l_{jk} h_{li} N + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} N - h_{jk}\mathrm{L}_p(f_{u^i}) =$$

$$= \Big[[\mathrm{L}_p(f_{u^i})]_{(f_{u^1}, f_{u^2}, \ldots, f_{u^n})} = \left(\mathrm{L}_p(f_{u^i})^1, \mathrm{L}_p(f_{u^i})^2, \ldots, \mathrm{L}_p(f_{u^i})^n\right)^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{L}_p(f_{u^i}) = \sum_m (\mathrm{L}_p(f_{u^i}))^m f_{u^m} \Big] =$$

$$= \sum_m \frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial u^i} f_{u^m} + \sum_l \left(\sum_m \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{li}\right) f_{u^m} + \sum_l \Gamma^l_{jk} h_{li} N + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} N - \sum_m h_{jk}(\mathrm{L}_p(f_{u^i}))^m f_{u^m} =$$

$$= \sum_m \frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial u^i} f_{u^m} + \sum_l \left(\sum_m \Gamma^l_{jk} \Gamma^m_{li} \right) f_{u^m} + \sum_l \Gamma^l_{jk} h_{li} N + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} N - \sum_m h_{jk} (\mathrm{L}_p (f_{u^i}))^m f_{u^m} =$$

$$= \sum_m \frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial u^i} f_{u^m} + \sum_m \left(\sum_l \Gamma^l_{jk} \Gamma^m_{li} \right) f_{u^m} - \sum_m h_{jk} (\mathrm{L}_p (f_{u^i}))^m f_{u^m} + \sum_l \Gamma^l_{jk} h_{li} N + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} N =$$

$$= \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial u^i} + \sum_l \Gamma^l_{jk} \Gamma^m_{li} - h_{jk} (\mathrm{L}_p (f_{u^i}))^m \right) f_{u^m} + \left(\sum_l \Gamma^l_{jk} h_{li} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} \right) N$$

Напомним, что это мы вычислили $f_{u^i u^k u^j}$. Переставим индексы в последнем равенстве, получим

$$f_{u^i u^k u^j} = \sum_m \left(\frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial u^j} + \sum_l \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lj} - h_{ik} (\mathrm{L}_p (f_{u^j}))^m \right) f_{u^m} + \left(\sum_l \Gamma^l_{ik} h_{lj} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} \right) N$$

Приравняв коэффициенты (координаты) при равных векторах $f_{u^i u^k u^j}$ и $f_{u^i u^k u^j}$ в базисе $(f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}, N)$, получим равенства:

$$\frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial u^i} + \sum_l \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{li} - h_{jk}(\mathrm{L}_p(f_{u^i}))^m = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial u^j} + \sum_l \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lj} - h_{ik}(\mathrm{L}_p(f_{u^j}))^m$$

$$\sum_l \Gamma^l_{jk} h_{li} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} = \sum_l \Gamma^l_{ik} h_{lj} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j}$$

Из первого равенства получим

$$\frac{\partial \Gamma^m_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial u^j} + \sum_l \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{li} - \sum_l \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lj} = h_{jk}(\mathrm{L}_p(f_{u^i}))^m - h_{ik}(\mathrm{L}_p(f_{u^j}))^m$$

Из второго равенства получим

$$\frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} + \sum_l \Gamma^l_{jk} h_{li} - \sum_l \Gamma^l_{ik} h_{lj} = 0$$

А уже из этих равенств получаем утверждения (1), (2) теоремы.

Обозначим левые части уравнения (2) Гаусса-Петерсона-Кодацци-Майнарди через

$$R^m_{ijk} = \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} + \sum_l \left(\Gamma^l_{jk} h_{li} - \Gamma^l_{ik} h_{lj} \right)$$

Таким образом мы определили n^4 функций.
Пусть $R : T_p f \times T_p f \times T_p f \to T_p f$ – трилинейная форма такая, что

$$R\left(f_{u^i}, f_{u^j}, f_{u^k}\right) = \sum_m R^m_{ijk} f_{u^m}$$

Как отображение R определяется формулой

$$R\left(X, Y, Z\right) = \sum_m R^m_{ijk} X^i Y^j Z^k f_{u^m},$$

где $X = \sum_i X^i f_{u^i}, \quad Y = \sum_j Y^j f_{u^j}, \quad Z = \sum_k Z^k f_{u^k}.$
Отображение R называется *тензором кривизны Леви-Чивита.*

Определение Риманова тензора кривизны

Отображение $R : (T_p f)^4 \to \mathbb{R}$

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y, Z), W \rangle$$

называется *римановым тензором кривизны.*

Наблюдение

Тензор кривизны Римана зависит только от первой фундаментальной формы, т.е является свойством внутренней геометрии поверхности.

Утверждение о римановом тензоре кривизны

Если f — гиперповерхность с оператором Петерсона L_p и Второй фундаментальной формой $\mathrm{I\!I}$, то выполняются равенства, то

1. $R(X, Y, Z) = \mathrm{I\!I}(Y, Z)\,\mathrm{L}(X) - \mathrm{I\!I}(X, Z)\,\mathrm{L}(Y)$;
2. $R(X, Y, Z, W) = \mathrm{I\!I}(X, W)\,\mathrm{I\!I}(Y, Z) - \mathrm{I\!I}(X, Z)\,\mathrm{I\!I}(Y, W)$;

Определение Риманова тензора кривизны

Отображение $R : (T_p f)^4 \to \mathbb{R}$

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y, Z), W\rangle$$

называется *римановым тензором кривизны*.

Наблюдение 2 (от тензоре кривизны Леви Чевита)

Тензор кривизны Леви-Чевита зависит только от первой фундаментальной формы, т.е является свойством внутренней геометрии поверхности.

Доказательство следует из наблюдения 1.

Наблюдение 3 (о римановом тензоре кривизны)

Риманов тензор кривизны зависит только от первой фундаментальной формы, т.е является свойством внутренней геометрии поверхности.

Доказательство следует из наблюдения 2.

Утверждение о Римановом тензоре кривизны

Если f — гиперповерхность с оператором Петерсона L и Второй фундаментальной формой $\mathrm{I\!I}$, то выполняются равенства

(1) $R(X,Y,Z) = \mathrm{I\!I}(Y,Z)\,\mathrm{L}(X) - \mathrm{I\!I}(X,Z)\,\mathrm{L}(Y)$;

(2) $R(X,Y,Z,W) = \mathrm{I\!I}(X,W)\,\mathrm{I\!I}(Y,Z) - \mathrm{I\!I}(X,Z)\,\mathrm{I\!I}(Y,W) = \begin{vmatrix} \mathrm{I\!I}(X,W) & \mathrm{I\!I}(Y,W) \\ \mathrm{I\!I}(X,Z) & \mathrm{I\!I}(Y,Z) \end{vmatrix}$

Доказательство.

Докажем утверждение (1). Вспомним уравнение Гаусса:

$$R^m_{ijk} = h_{jk}\left(\mathrm{L}\left(f_{u^i}\right)\right)^m - h_{ik}\left(\mathrm{L}\left(f_{u^j}\right)\right)^m \;\Big|\; \cdot f_{u^m}$$

$$R^m_{ijk} f_{u^m} = h_{jk}\left(\mathrm{L}\left(f_{u^i}\right)\right)^m f_{u^m} - h_{ik}\left(\mathrm{L}\left(f_{u^j}\right)\right)^m f_{u^m}$$

Просуммируем левые и правые части последнего равенства по m:

$$\sum_m R_{ijk}^m f_{u^m} = h_{jk} \sum_m \left(\mathrm{L}\left(f_{u^i}\right)\right)^m f_{u^m} - h_{ik} \sum_m \left(\mathrm{L}\left(f_{u^j}\right)\right)^m f_{u^m}$$

Снова учитывая равенство $\mathrm{L}_p(f_{u^i}) = \sum_m \left(\mathrm{L}_p(f_{u^i})\right)^m f_{u^m}$ имеем:

$$\sum_m R_{ijk}^m f_{u^m} = h_{jk} \mathrm{L}\left(f_{u^i}\right) - h_{ik} \mathrm{L}\left(f_{u^j}\right) \tag{1}$$

Проверим справедливость равенства (1) утверждения теоремы для базисных векторов касательного пространства. Оно перепишется в виде

$$R\left(f_{u^i}, f_{u^j}, f_{u^k}\right) = \mathrm{II}\left(f_{u^j}, f_{u^k}\right) \mathrm{L}\left(f_{u^i}\right) - \mathrm{II}\left(f_{u^i}, f_{u^k}\right) \mathrm{L}\left(f_{u^j}\right) \tag{2}$$

Действительно, по определению тензора R и по (1)

$$R\left(f_{u^i}, f_{u^j}, f_{u^k}\right) = \sum_m R^m_{ijk} f_{u^m} = h_{jk} \mathrm{L}\left(f_{u^i}\right) - h_{ik} \mathrm{L}\left(f_{u^j}\right) \tag{3}$$

Вспомнив, что $h_{jk} = \mathrm{II}(f_{u^j}, f_{u^k})$ и $h_{ik} = \mathrm{II}(f_{u^i}, f_{u^k})$ из (3) получаем (2).

Из трилинейности тензора R и равенства (2) следует, что равенство (1) из формулировки утверждения справедливо для всех векторов.

Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). Для этого равенство (1) из формулировки утверждения скалярно умножим на вектор W :

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y,Z), W\rangle &= \langle \mathrm{L}(Y), Z\rangle \cdot \langle \mathrm{L}(X), W\rangle - \langle \mathrm{L}(X), Z\rangle \cdot \langle \mathrm{L}(Y), W\rangle \\ &= \mathrm{II}(X,W)\cdot \mathrm{II}(Y,Z) - \mathrm{II}(X,Z)\cdot \mathrm{II}(Y,W) \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Theorema Egregium (с лат. "блистательная"теорема, Гаусс 1828 г. для $n = 2$)

Если f — четномерная гиперповерхность (т.е. n — четно), то её полная (гауссова) кривизна определяется только IФФ.
В частности, при $n = 2$

$$K = \frac{R_{1221}}{g} = R\left(f_{u^i}, f_{u^j}, f_{u^k}, f_{u^l}\right)$$

Из этого утверждения вышла вся риманова геометрия, псевдо-риманова геометрия и общая теория относительности.

Доказательство теоремы основано на применении теорема Лапласа, являющейся обобщением разложения определителя по произвольной строке.

Материалы взяты ОТСЮДА

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица размера n.
И пусть выбраны любые k строк матрицы A с номерами $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ и любые k столбцов с номерами $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$.

Определитель матрицы, получаемой из A вычеркиванием всех строк и столбцов, кроме выбранных, называется *минором k-го порядка, расположенным в строках с номерами $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ и столбцах с номерами $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$.*

Он обозначается следующим образом:

$$M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k} = \det \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

Теорема Лапласа

А определитель матрицы, получаемой вычеркиванием только выбранных строк и столбцов из квадратной матрицы, называется **дополнительным минором** к минору $M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$:

$$\overline{M}^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k} = \det\begin{pmatrix} a_{i_{k+1}j_{k+1}} & a_{i_{k+1}j_{k+2}} & \ldots & a_{i_{k+1}j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_nj_{k+1}} & a_{i_nj_{k+2}} & \ldots & a_{i_nj_n} \end{pmatrix}$$

где $i_{k+1} < \ldots < i_n$, $j_{k+1} < \ldots < j_n$ — номера невыбранных строк и столбцов.

Алгебраическое дополнение минора $M^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$ определяется следующим образом:

$$A^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k} = (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}\,\overline{M}^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_k}$$

Теорема Лапласа

Пусть выбраны любые k строк матрицы A. Тогда определитель матрицы A равен сумме всевозможных произведений миноров k-го порядка, расположенных в этих строках, на их алгебраические дополнения:

$$\det A = \sum_{j_1 < \ldots < j_k} M^{i_1, \ldots, i_k}_{j_1, \ldots, j_k} A^{i_1, \ldots, i_k}_{j_1, \ldots, j_k},$$

Применим к определителю $h = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12}\dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22}\dots & h_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2}\dots & h_{nn} \end{vmatrix}$ в формуле $K = \dfrac{h}{g}$ теорему Лапласа, раскрывая этот определитель по первым двум строкам, потом снова двум строкам и т.д. (здесь существенно используется то, что n четно).

Получим определитель h в виде многочлена от миноров вида $\begin{vmatrix} h_{ik}\, h_{il} \\ h_{jk}\, h_{jl} \end{vmatrix}$.

Помня, что $h_{ij} = \mathrm{I\!I}(f_{u^i}, f_{u^j})$ для произвольных i, j и используя утверждение о римановом тензоре кривизны, имеем

$$\begin{vmatrix} h_{ik}\, h_{il} \\ h_{jk}\, h_{jl} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{I\!I}\,(f_{u^i}, f_{u^k}) & \mathrm{I\!I}\,(f_{u^i}, f_{u^l}) \\ \mathrm{I\!I}\,(f_{u^j}, f_{u^k}) & \mathrm{I\!I}\,(f_{u^j}, f_{u^l}) \end{vmatrix} = R\,(f_{u^i}, f_{u^l}, f_{u^k})$$

В частности, для $n = 2$ получим $h = \begin{vmatrix} h_{11}\, h_{12} \\ h_{21}\, h_{22} \end{vmatrix}$.

Используя Наблюдение 3, имеем требуемое.

Пусть $n = 2$. Применим теорему Egregium для вычисления полной гауссовой кривизны двумерной гиперповерхности с квадратичной формой

$$ds^2 = G(u, v)(du^2 + dv^2)$$

При этом $g_{11} = g_{22} = G, g_{12} = g_{21} = 0$ и

$$g = G^2, \; [I]^{-1} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{-1} & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix}$$

По теореме Кристоффеля

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right).$$

Рассмотрим случаи

1) $i = j \neq k;\quad \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ii} = \dfrac{1}{2G}\left(\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u^i} + \dfrac{\partial g_{ki}}{\partial u^i} - \dfrac{\partial g_{ii}}{\partial u^k}\right) = -\dfrac{1}{2G}\cdot\dfrac{\partial G}{\partial u^k};$

2) $j = k;\quad \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ik} = \dfrac{1}{2}g^{kk}\left(\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u^k} + \dfrac{\partial g_{kk}}{\partial u^i} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right) = \dfrac{1}{2G}\cdot\dfrac{\partial G}{\partial u^i};$

$\Gamma^1_{11};\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21}; \Gamma^2_{22}$ – всевозможные коэффициенты связности.

$$R_{ijkl} = R\left(f_{u^i}, f_{u^j}, f_{u^k}, f_{u^l}\right) = \left\langle R\left(f_{u^i}, f_{u^j}, f_{u^k}\right), f_{u^l}\right\rangle = \left\langle \sum_m R^m_{ijk} f_{u^m}, f_{u^l}\right\rangle = \sum_m R^m_{ijk} g_{ml}$$

$$R_{1221} = \sum_m R^m_{122} g_{m1} = R^1_{122} g_{11} = G\cdot R^1_{122}$$

$$R_{1122} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^2} + \sum_l \left(\Gamma^l_{22}\Gamma^1_{l1} - \Gamma^l_{12}\Gamma^1_{l2} \right) =$$

$$= \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^2} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{21} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{1}{2G}G_u\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{2G}G_v\right) - \frac{G_{vu}}{2G} - \frac{G_u}{2G} - \frac{G_{v^2}}{4G^2} + \frac{G_v^2}{(2G)^2} + \frac{G_u}{2G}\cdot\frac{G_u}{2G}$$

$$K = \frac{R_{1221}}{g} = \frac{G \cdot R^1_{122}}{G^2} = -\frac{1}{2G}\left(\left(\frac{\partial G_u}{G}\right)_u + \left(\frac{\partial G_v}{G}\right)_v\right) = -\frac{1}{2G}\Delta \ln G,$$

где $\Delta\varphi(u, v) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$