Основы дифференциальной геометрии и топологии
Лекция 13
Нормальная кривизна гиперповерхности

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика
(4 семестр)

Лемма о IIФФ от касательного вектора

Пусть $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ - гиперповерхность, $\beta = f \circ \alpha$, $\alpha : I \to U$ и $p = \alpha(t)$. Тогда

$$\mathrm{II}_p(\dot\beta, \dot\beta) = \langle \ddot\beta(t), N(p) \rangle$$

Доказательство.

По утверждению о значении дифференциала от касательного вектора имеем $\dot\beta(t) = df_p(\dot\alpha(t))$ и $\dot\alpha(t) = (df_p)^{-1}(\dot\beta(t))$.

Кроме того, $\langle \dot\beta(t), N(\alpha(t)) \rangle \equiv 0$.

Продифференцировав тождество и учитывая $p = \alpha(t)$, получаем

$\langle \ddot\beta(t), N(p) \rangle + \langle \dot\beta(t), N'(p)\dot\alpha(t) \rangle \equiv 0$ или, что то же самое,

$\langle \ddot\beta(t), N(p) \rangle + \langle \dot\beta(t), dN_p(\dot\alpha(t) \rangle \equiv 0$.

Следовательно,

$\langle \ddot\beta(t), N(p) \rangle = -\langle \dot\beta(t), dN_p(\dot\alpha(t)) \rangle = \langle -dN_p(\dot\alpha(t)), \dot\beta(t) \rangle =$
$\langle -dN_p(df_p)^{-1}(\dot\beta(t)), \dot\beta(t) \rangle = \langle L_p(\dot\beta), \dot\beta \rangle = \mathrm{II}_p(\dot\beta, \dot\beta)$.

Теорема Менье

Пусть $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ - гиперповерхность, k — кривизна плоской кривой $\beta = f \circ \alpha$, $\alpha : I \to U$, в момент времени t и θ — угол между $E_2(t)$ и $N(p)$, $p = \alpha(t)$, где $(E_1(t), E_2(t))$ — базис Френе кривой $\beta(t)$. Тогда

$$k \cos\theta = \frac{\mathrm{II}_p(\dot\beta(t), \dot\beta(t))}{\mathrm{I}_p(\dot\beta(t), \dot\beta(t))}$$

(см. рис. 1)

Доказательство.

Из $\dot\beta = |\dot\beta| E_1$ следует $\ddot\beta = |\dot\beta|^{\cdot} E_1 + |\dot\beta| \dot E_1$. Используя уравнение Френе $\dot E_1 = k|\dot\beta| E_2$ для кривой β, имеем $\ddot\beta = |\dot\beta|^{\cdot} E_1 + |\dot\beta|^2 k E_2$.

Тогда в силу леммы и, учитывая $N \perp E_1$, получаем

$\mathrm{II}_p(\dot\beta, \dot\beta) = \langle \ddot\beta, N\rangle = \langle |\dot\beta|^{\cdot} E_1 + |\dot\beta|^2 k E_2, N\rangle = |\dot\beta|^2 k \langle E_2, N\rangle = \mathrm{I}_p(\dot\beta, \dot\beta) \cdot k \cdot \cos\theta$,

поскольку $|E_2| = |N| \equiv 1$, откуда следует требуемое.

Теорема Менье (иллюстрация)

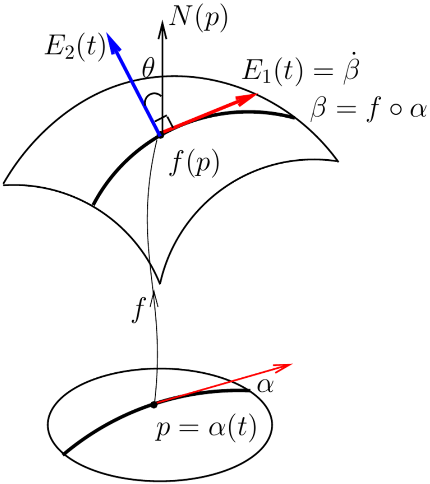


Рис.: 1

Определение нормальной кривизны

Нормальной кривизной $k_N(X)$ поверхности f в точке p в направлении $X \in T_p f$ называется отношение $\dfrac{\mathrm{II}_p(X,X)}{\mathrm{I}_p(X,X)}$.

Определение нормального сечения

Нормальным сечением гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ в точке p вдоль вектора $X \in T_p f$ называется кривая, полученная при сечении образа гиперповерхности f плоскостью, проходящей через точку p, нормальный вектор к поверхности в этой точке и вектор X.

Наблюдения

(1) Из теоремы Мёнье следует, что нормальная кривизна вдоль вектора X равна кривизне нормального сечения $(\theta = 0)$ (см. рис.2-3).
(2) Из определения следует, что нормальное сечение не зависит от длины касательного вектора X, а зависит только от направления.

Нормальная кривизна (иллюстрация)

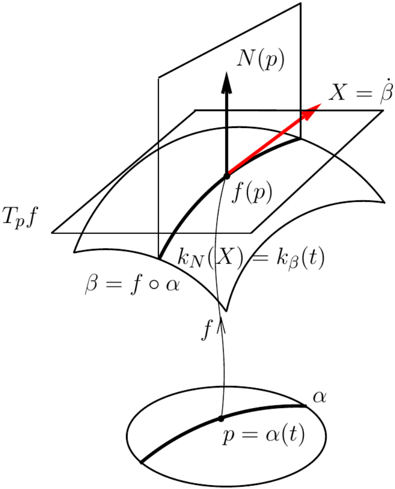


Рис.: 2

Нормальная кривизна (иллюстрация)

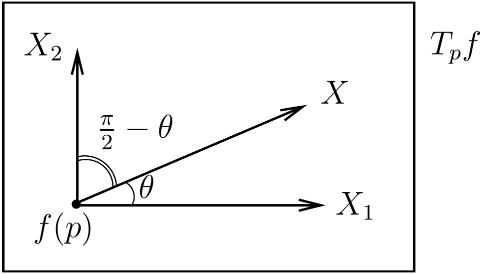


Рис.: 3

Геометрический смысл IIФФ

Вторая фундаментальная форма от единичного касательного вектора равна кривизне нормального сечения вдоль этого вектора (см. рис.4).

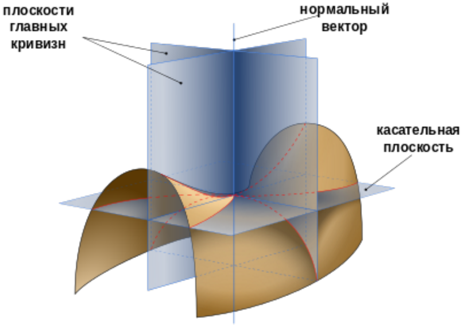


Рис.: 4

Изображение взято с **сайта**

Теорема Эйлера

Теорема Эйлера для произвольного n

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — ОНБ в $T_p f$, состоящий из главных направлений, отвечающих главным кривизнам $k_1, k_2, \dots, k_n$, $X \in T_p f$, $\theta_i = \widehat{X\,X_i}$. Тогда

$$k_N(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cos^2 \theta_i$$

Теорема Эйлера для $n = 2$

$k_N(X) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что $|X| = 1$, т.е. $I_p(X, X) = \langle X, X\rangle = 1$ и $X = \sum\limits_i \cos\theta_i X_i$.

Тогда

$$\mathrm{I\!I}_p(X, X) = \langle L_p(X), X\rangle = \langle \sum_i \cos\theta_i L_p(X_i), \sum_j \cos\theta_j X_j\rangle =$$

$$\langle \sum_i \cos\theta_i k_i X_i, \sum_j \cos\theta_j X_j\rangle = \sum_i \sum_j k_i \langle X_i, X_j\rangle \cos\theta_i \cos\theta_j = \sum_i k_i \cos^2\theta_i$$

Следствие из теоремы Эйлера

Главные кривизны k_1 и k_2 являются экстремальными значениями нормальной кривизны (см. рис.4).

Доказательство

Без ограничения общности можно считать, что $k_2 > k_1$. Тогда

$$k_N(X) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = k_1 + (k_2 - k_1)\sin^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\, k_N(X) = 0 \text{ при этом } \min k_N(X) = k_1 \text{ и } X \upuparrows X_1 \\ \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} k_N(X) = \frac{\pi}{2} \text{ при этом } \max k_N(X) = k_2 \text{ и } X \upuparrows X_2 \end{cases}$$

Таким образом, если мысленно вращать секущую нормальную плоскость вокруг нормального вектора $\overrightarrow{N}$, то max и min кривизны нормальных сечений достигаются на двух взаимно перпендикулярных главных направлениях X_1 и X_2.

Упражнение

Средняя кривизна является средним интегральным значением нормальных кривизны

$$H = \int_0^{2\pi} k_N(\theta)d\theta$$

Здесь $k_N(\theta) = k_N(X)$, где θ — угол между касательными векторами X и X_1.

Указание. Использовать теорему Эйлера.

Определение асимптотического вектора

Пусть $X \in T_p f$. Вектор X называется *асимптотическим* на гиперповерхности f в точке p, если $k_N(X) = 0$.

Критерий асимптотического направления

$$k_N(X) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{II}_p(X, X) = 0 \Leftrightarrow L_p(X) \perp X$$

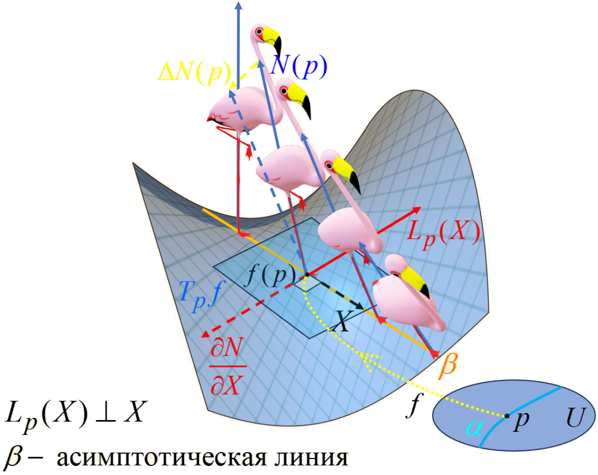
Критерий асимптотического направления для двупараметрической гиперповерхности $n = 2, m = 3$

X — асимптотическое направление $\Leftrightarrow h_{11}\,du^2 + 2h_{12}\,du\,dv + h_{22}\,dv^2 = 0$

Определение асимптотической линии

Образ кривой $\beta(t)$ на гиперповерхности называется асимптотической линией, если для любого t вектор $\dot{\beta}(t)$ является асимптотическим.

Таким образом, нормальный вектор вдоль асимптотической линии меняется перпендикулярно этой линии (см. рис 5).



$\Delta N(p)$
$N(p)$
$L_p(X)$
$f(p)$
T_pf
X
$\frac{\partial N}{\partial X}$
β
f
α
p
U
$L_p(X) \perp X$
β – асимптотическая линия

Рис.: 5

Утверждение об асимптотических линиях двупараметрической поверхности (задачи №№48-49 из списка упражнений)

1. В каждой гиперболической точке двупараметрической гиперповерхности есть две асимптотические линии, причем линии кривизны являются биссектрисами углов между этими асимптотическими линиями (см.рис. 6).
2. В каждой параболической точке асимптотическое направление одно и оно является линией нулевой кривизны.
3. В эллиптических точках нет асимптотических линий (см. рис. 7).
4. Прямолинейная образующая является асимптотической линией (см. рис. 8).

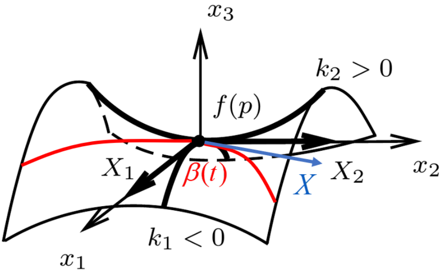


Рис.: 6

Асимптотическое направление и линия кривизны в параболической точке (иллюстрация)

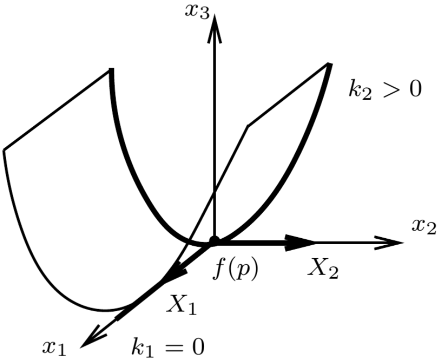
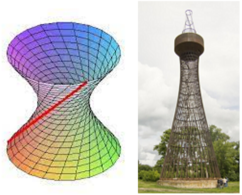
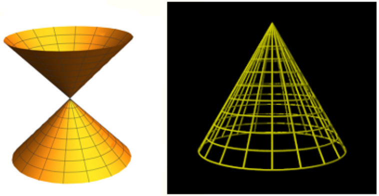


Рис.: 7

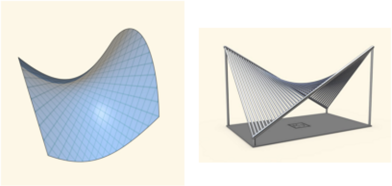
Асимптотические линии (прямолинейные образующие) на поверхностях второго порядка



однополостный гиперболоид



конус



гиперболический параболоид

Рис.: 8

Определение сети на поверхности

Сетью на поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ называют пару однопараметрических кривых $\beta_1(t, C_1)$, $\beta_2(t, C_2)$ на поверхности f таких, что (см. рис.9)
(1) через каждую точку поверхности проходит ровно по одной кривой из каждого семейства;
(2) кривые из разных семейств пересекаются, не касаясь друг друга.

Определение чебышёвской сети

Сеть на поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ называется *чебышёвской*, если в каждом сетевом четырехугольнике противоположные стороны имеют равные углы (см. рис.10). Угол ω называется *сетевым углом*.

Наглядный пример чебышёвской сети дают продольные и поперечные нити обычной ткани (см. рис 10).

Сеть на поверхности (иллюстрация)

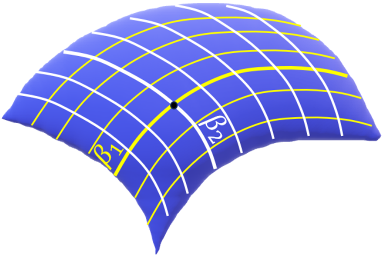


Рис.: 9

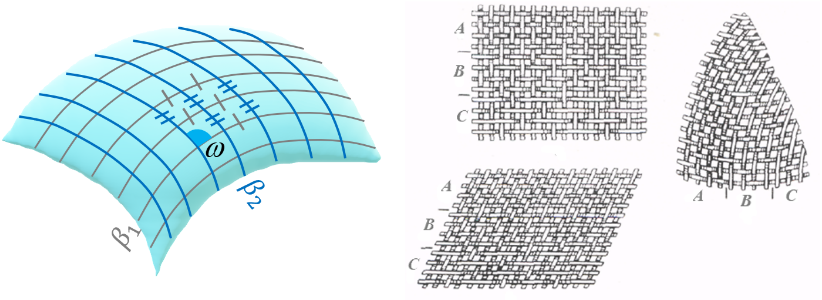


Рис.: 10

Критерий чебышёвской сети (задача №56 из списка упражнений)

Сеть координатных линий на двумерной гиперповерхности является чебышёвской тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial v} \equiv 0 \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \equiv 0$$

Утверждение о сети асимптотических линий для двумерных поверхностей с постоянной $K < 0$ (задача №57 из списка упражнений)

Сеть асимптотических линии двумерной гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ с постоянной отрицательной гауссовой кривизной является чебышёвской.

Утверждение об асимптотических линиях на псевдосфере

Доказать, что сеть асимптотических линий на псевдосфере
(1) является сетью биссектрис координатных линий;
(2) состоит из локсодром;
(3) является чебышовской.

Доказательство.

(1) и (2) следуют из того факта, что координатными линиями псевдосферы как поверхности вращения являются параллели и меридианы, которые перпендикулярны друг другу, и из упражнения об асимптотических линиях двупараметрической поверхности.

(3) следует из того факта, что псевдосфера имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну (см. Лекцию 12) и из утверждения о сети асимптотических линий на поверхности с постоянной отрицательной гауссовой кривизной.

Чебышёвская сеть асимптотических линий на псевдосфере (иллюстрация)

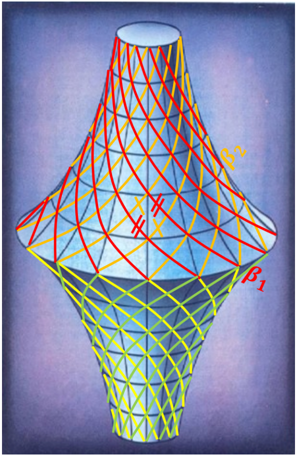


Рис.: 11

В случае двумерной гиперповерхности постоянной отрицательной кривизны ее асимптотическую чебышёвскую сеть можно взять в качестве новой координатной сети этой поверхности.

Пусть $(\tilde{u}, \tilde{v})$ – новые поверхностные координаты. Тогда семейства линий $\tilde{u} = const$ и $\tilde{v} = const$ – асимптотическая чебышёвская сеть, а сетевой угол ω будет, конечно, являться функцией новых поверхностных координат: $\omega = \omega(\tilde{u}, \tilde{v})$.

Задача №58 из списка упражнений

Если координатная сеть поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ является чебышёвской, то матрица первой фундаментальной формы этой поверхности имеет вид

$$[I]_p = \begin{bmatrix} 1 & \cos\omega \\ \cos\omega & 1 \end{bmatrix},$$

где $\omega = \omega(\tilde{u}, \tilde{v})$ – сетевой угол в точке $p(\tilde{u}, \tilde{v}) \in U$.

Упражнение

Пусть двумерная гиперповерхность $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну $K = -1$ и координатная сеть этой поверхности состоит из асимптотических линий. Тогда выполнено (уравнение "синус-Гордона")

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tilde{u} \partial \tilde{v}} = \sin \omega$$

1). Псевдосфера имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну, а сеть ее асимптотических линий всегда можно взять в качестве сети координатных линий.

2). На псевдосфере локально выполняется геометрия Лобачевского.

3). В 1901г. Д. Гильберт показал, что это уравнение "синус-Гордона"не имеет регулярного решения с условием $0 < \omega < \pi$.

Следовательно, реализовать целиком плоскость Лобачевского в евклидовом пространстве нельзя!