Основы дифференциальной геометрии и топологии
Лекция 12
Внешняя геометрия гиперповерхности
Локальное строение гиперповерхности

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Направление: Математика
(4 семестр)

Определение линии кривизны

Образ кривой $\beta(t)$ на гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ называется линией кривизны, если для любого t касательный вектор $\dot{\beta}(t)$ является главным направлением на гиперповерхности.

Таким образом, нормльный вектор вдоль линии кривизны меняется вдоль нее (см. рис.1).

Утверждение (о вычислении линий кривизны на двумерной поверхности)

Образ кривой $\beta(t)$, где $\beta = f \circ \alpha$, $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ — гиперповерхность, является линией кривизны, если выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$$

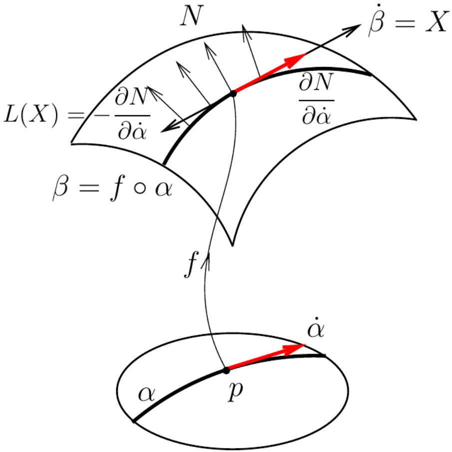
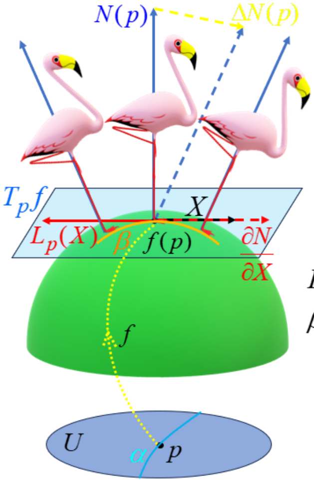

N
$\dot\beta = X$
$L(X) = -\dfrac{\partial N}{\partial \dot\alpha}$
$\dfrac{\partial N}{\partial \dot\alpha}$
$\beta = f \circ \alpha$
f
$\dot\alpha$
α
p

Рис.: 1



$L_p(X) \parallel X$

β – линия кривизны

Рис.: 1

Определенеие полной Гауссовой и средней кривизны гиперповерхности

Полной Гауссовой кривизной на гиперповерхности в точке p называется число

$$K(p) = \det[L_p] = \frac{\det[\mathrm{II}_p]}{\det[\mathrm{I}_p]}$$

Средней кривизной на поверхности в точке p называется

$$H(p) = \frac{1}{n}\mathrm{trace}[L_p]$$

Вычислене полной Гауссовой и средней кривизны гиперповерхности через главные кривизны

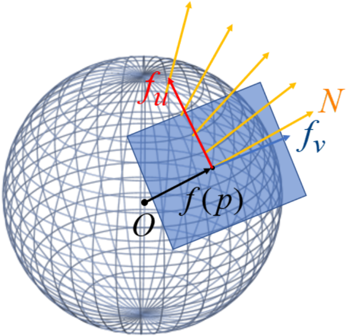
$$K = k_1\, k_2 \ldots k_n$$

$$H = \frac{1}{n}\,(k_1 + k_2 \cdots + k_n)$$

$f(u,v) = (R\cos u\cos v,\ R\cos u\sin v,\ R\sin u)$, — параметрицация сферы,
u — широта; v — долгота;
$U = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \times [0; 2\pi]$.
Частные производные (касательные векторы) и их векторное произведение (нормаль к поверхности):
$f_u = (-R\sin u\cos v,\ -R\sin u\sin v,\ R\cos u)$
$f_v = (-R\cos u\sin v,\ R\cos u\cos v, 0)$
$N = (\cos u\cos v,\ \cos u\sin v,\ \sin u) = \frac{1}{R}f(u,v)$
$N_u = (-\sin u\cos v,\ -\sin u\sin v,\ \cos u) = \frac{1}{R}f_u \Rightarrow L_p(f_u) = -\frac{1}{R}f_u$
$N_v = (-\cos u\sin v,\ \cos u\cos v,\ 0) = \frac{1}{R}f_v \Rightarrow L_p(f_v) = -\frac{1}{R}f_v \Rightarrow$
f_u, f_v — главные направления,
$f_u \perp f_v$, $k_1 = k_2 = -\frac{1}{R}$ — главные кривизны;
$K = \frac{1}{R^2}$ — полная Гауссова кривизна, $H = -\frac{1}{R}$ — средняя кривизна;
u, v-линии (параллели и меридианы) являются лин. кривизны (см. рис.5).

Для сферы основной оператор является, очевидно, скалярным, а значит любой ненулевой вектор касательного пространства — собственным, т.е. главным направлением. Следовательно, любая кривая на сфере является линией кривизны.

Пример-сфера (иллюстрация)



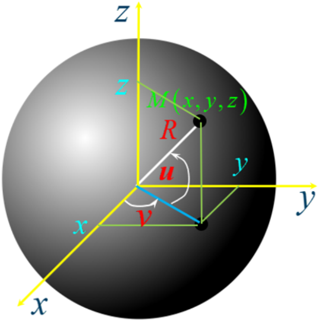


Рис.: 5

(2) $f(u,v) = p_0 + u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b},\ \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ — плоскость (см. рис.6).

$f_u = \vec{a},\ f_v = \vec{b},\ N = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ — нормаль к плоскости;

так как $N = const$,

то $N_u \equiv 0,\ N_v \equiv 0,\ [L_p] \equiv (0) \Rightarrow L_p = (0)$;

$k_1 = k_2 = 0,\ K = 0,\ H = 0$,

любое направление — главное, любая кривая — линия кривизны.

Пример-плоскость (иллюстрация)

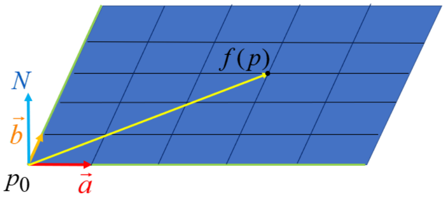


Рис.: 6

(3) Рассмотрим поверхность вращения $f(u,v) = A[v]\alpha(u)$, где $A[v]$ — матрица поворота вокруг оси Oz на угол v, т.е.

$$A[v] = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))$ — профиль,

т.е. $f(u,v) = (x(u)\cos v,\ x(u)\sin v,\ z(v))$

Можно показать, что линиями кривизны на этой поверхности являются параллели и меридианы (см. рис. 7);

$f(u,v)$ — поверхность везде, кроме точек пересечения с осью Oz.

Пример-поверхность вращения

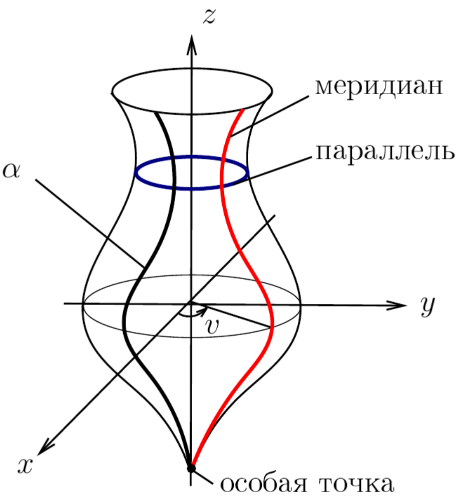


Рис.: 7

Полная Гауссова кривизна для поверхностей второго порядка (иллюстрация)

Для гиперболического параболоида $K < 0$ (см.рис. 8)
Для цилиндра $K = 0$.
Для сферы $K > 0$.

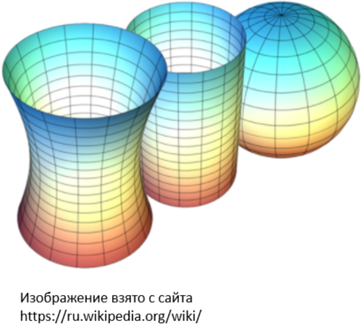


Рис.: 8

Для плоскости $K = const = 0$ (см.рис. 9)

Для сферы $K = const = \dfrac{1}{R^2} > 0$.

Для псевдосферы $K = const = -\dfrac{1}{R^2} < 0$.

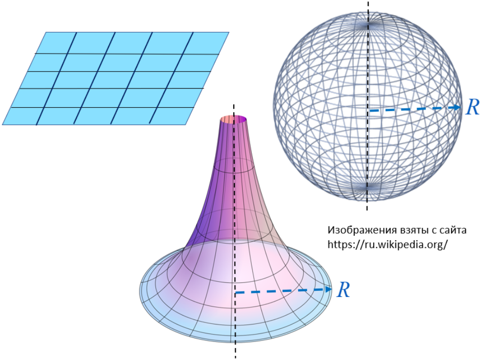
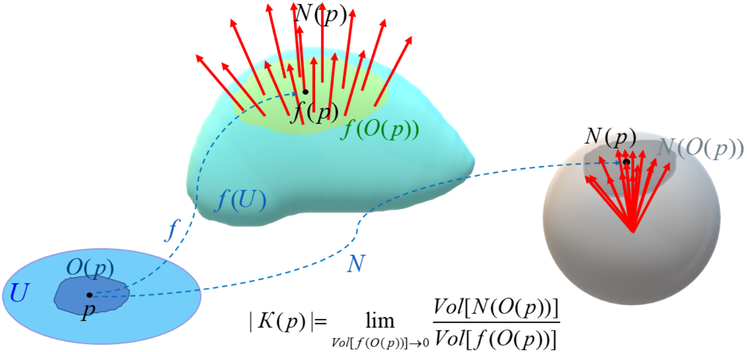


Рис.: 9

Геометричесикй смысл полной Гауссовой кривизны гиперповерхности (иллюстрация)



$$|K(p)| = \lim_{Vol[f(O(p))]\to 0} \frac{Vol[N(O(p))]}{Vol[f(O(p))]}$$

Рис.: 10

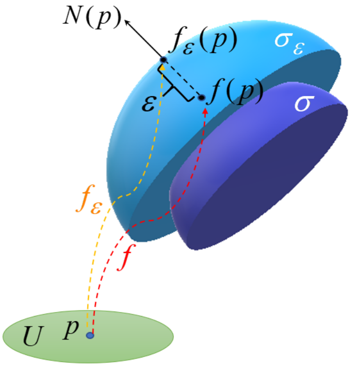
Геометричесикй смысл полной Гауссовой кривизны гиперповерхности

$$K = \lim_{Vol[f(O(p))]\to 0} \frac{Vol[N(O(p))]}{Vol[f(O(p))]}$$

(см. рис. 10)

Указание. Без ограничения общности можно считать, что координатные линии (u^i-линии) являются линиями кривизны.

Воспользоваться определением основного оператора поверхности и идеей, используемыми при доказательстве формулы вычисления объема поверхности, для вычисления объема бесконечно малых объемов $Vol[f(O(p)])$ и $Vol[N(O(p))]$.



$$f_\varepsilon = f + \varepsilon N$$

$$\sigma(U) = Vol[f(U)]$$

$$\sigma_\varepsilon(U) = Vol[f_\varepsilon(U)]$$

$$\Delta_\varepsilon(U) = \frac{\sigma(U) - \sigma_\varepsilon(U)}{\sigma(U)}$$

$$H = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\sigma(U) \to 0} \frac{\Delta_\varepsilon(U)}{\varepsilon}$$

Рис.: 11

Геометричесикй смысл средней Гауссовой кривизны гиперповерхности

$$H = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{\sigma(U) \to 0} \frac{\Delta_\varepsilon(U)}{\varepsilon}$$

— скорость относительного стягивания поверхности вдоль нормали (см. рис. 11).

Здесь $f_\varepsilon = f + \varepsilon N$,
$\sigma(U) = Vol[f(U)]$,
$\sigma_\varepsilon(U) = Vol[f_\varepsilon(U)]$,
$\Delta_\varepsilon = \dfrac{\sigma(U) - \sigma_\varepsilon(U)}{\sigma(U)}$

Указание. Считать, что координатные линии (u^i-линии) являются линиями кривизны.

Определенеие минимальной поверхности

Минимальной поверхностью в трехмерном пространстве называется поверхность нулевой средней кривизны.

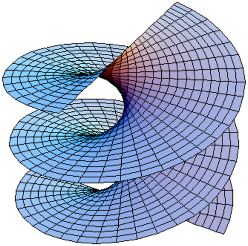
Примеры минимальных поверхностей: прямой геликоид, катеноид

Прямой геликоид - поверхность, полученная движущейся прямой, одновременно вращающейся с постоянной скоростью вокруг оси Oz и движущейся с постоянной скоростью вдоль этой оси (см. рис.12).
Его параметризация

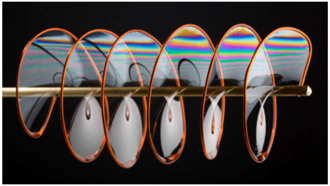
$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)^T$$

Катеноид - поверхность вращения, полученная вращением цепной линии вокруг оси Oz (см. рис. 13).
Его параметризация

$$f(u, v) = A(v)(a \operatorname{ch}(u/a), 0, u)^T = (a \operatorname{ch}(u/a) \cos v, a \operatorname{ch}(u/a) \sin v, u)^T$$

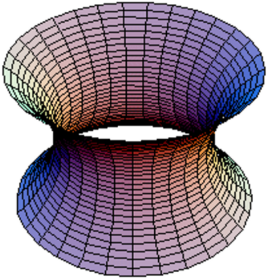


Изображение взято с сайта
https://ru.wikipedia.org/wiki/

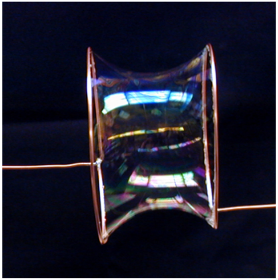


Изображение взято с сайта
https://habr.com/ru/post/450018/

Рис.: 12



Изображение взято с сайта
https://ru.wikipedia.org/wiki/



Изображение взято с сайта
https://instructional-resources.physics.uiowa.edu/

Рис.: 13

Теорема о локальном строении гиперповерхности

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, $p \in U$.
Тогда существует такая окрестность $O(p)$ в U и ОНР в $\mathbb{R}^{n+1}$, что в координатах этого репера поверхность $f(O(p))$ является графиком функции
$$x^{n+1} = \frac{1}{2}\left(k_1 \cdot \left(x^1\right)^2 + k_2 \cdot \left(x^2\right)^2 + \dots + k_n \cdot (x^n)^2\right) + o\left(\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \dots + (x^n)^2\right)$$

<u>Без доказательства</u>

Для $n = 2$ получаем с точностью до бесконечно малых:

$$x^3 = \frac{1}{2}\left(k_1 \cdot \left(x^1\right)^2 + k_2 \cdot \left(x^2\right)^2\right)$$

Следовательно, получаем следующую классификацию точек на обычной поверхности:

1) $K = k_1 \cdot k_2 > 0$ — эллиптическая точка;
2) $K = k_1 \cdot k_2 < 0$ — гиперболическая точка;
3) $K = 0, \;\; H \neq 0$ — параболическая точка;
4) $K = 0, \;\; H = 0$ — сингулярная точка (точка уплощения).

Классификация точек на двупараметрической гиперповерхности (иллюстрация)

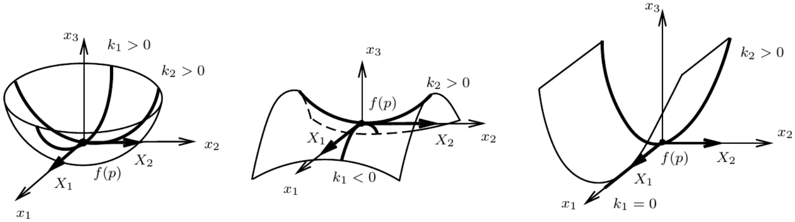


Рис.: 14

Для точки p на произвольной гиперповерхности введем следующее

Определение омбилической точки

Точка p называется *омбилической*, или *точкой округления*, если в ней L_p — скалярный оператор, т.е. любое направление в этой точке является главным, $k_1 = \cdots = k_n$.

Утверждение (о нахождении омбилических точек на двупараметрической гиперповерхности)

Точка p на гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ будет омбилической $\Leftrightarrow$ выполняется равенство

$$\frac{h_{11}(p)}{g_{11}(p)} = \frac{h_{12}(p)}{g_{12}(p)} = \frac{h_{22}(p)}{g_{22}(p)}$$

Доказательство следует из равенства $[L_p] = [\mathrm{I}_p]^{-1}[\mathrm{II}_p] = k\,E$, т.е. $k[\mathrm{I}_p] = [\mathrm{II}_p]$.