Основы дифференциальной геометрии и топологии

Лекция 10

Первая фундаментальная форма поверхности

Внутренняя геометрия поверхности

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Направление: Математика
(4 семестр)

Чтобы определить геометрию на поверхности (*внутреннюю геометрию на поверхности*), нужно в каждом касательном пространстве задать скалярное произведение.

Определение IФФ

Первой фундаментальной формой (IФФ) поверхности называется билинейная форма, определяемая равенством
$\mathrm{I}_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle$; $X, Y \in T_p f$.
Значение IФФ от касательных векторов — это скалярное произведение этих векторов в «объемлющем» поверхность пространстве.

Пусть $X = \dot{\beta}$, $\beta = f \circ \alpha$; $\quad Y = \dot{\gamma}$, $\gamma = f \circ \delta$; $\quad \alpha : I \to U$; $\delta : I \to U$;
$\alpha(t) = \left(u^1(t), \ldots, u^n(t)\right)$, $\dot{\alpha}(t) = (\dot{u}^1(t), \ldots, \dot{u}^n(t))$;
$\delta(t) = \left(v^1(t), \ldots, v^n(t)\right)$; $\dot{\delta}(t) = (\dot{v}^1(t), \ldots, \dot{v}^n(t))$.

Получим явное представление IФФ.

По предыдущему утверждению

$$X = \left[\dot{\beta}\right]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = [\dot{\alpha}]_{e_1,\ldots,e_n} = \left(\dot{u}^1,\ldots,\dot{u}^n\right)^T;$$

$$Y = [\dot{\gamma}]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = \left[\dot{\delta}\right]_{e_1,\ldots,e_n} = \left(\dot{v}^1,\ldots,\dot{v}^n\right)^T.$$

Следовательно,

$$\mathrm{I}_p(X,Y) = \langle X,Y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \dot{u}^i f_{u^i}, \sum_{j=1}^n \dot{v}^j f_{u^j}\right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \dot{u}^i\dot{v}^j \left\langle f_{u^i}, f_{u^j}\right\rangle =$$
$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\dot{u}^i\dot{v}^j, \text{ где } g_{ij} = \left\langle f_{u^i}, f_{u^j}\right\rangle.$$

Если обозначить $X = \dot{\beta}dt = d\beta$, $Y = \dot{\gamma}dt = d\gamma$,
то получим следующее представление IФФ

Формула вычисления IФФ

$\mathrm{I}_p(X,Y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}du^i dv^j = [X]^T(g_{ij})[Y]$ для

$$X = [d\beta]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = [d\alpha]_{e_1,\ldots,e_n} = \left(du^1,\ldots,du^n\right)^T$$

$$Y = [d\gamma]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = [d\delta]_{e_1,\ldots,e_n} = \left(dv^1,\ldots,dv^n\right)^T$$

Определение матрицы IФФ

Матрицей первой фундаментальной формы называется матрица $[\mathrm{I}_p] = (g_{ij})$. Матрица $[\mathrm{I}_p]$ есть матрица Грамма стандартного базиса касательного пространства в точке p.

Пусть β — кривая на поверхности f, т.е. $\beta = f \circ \alpha$, $\alpha : I \to U$ (см. рис.3).
Вычислим длину кривой β:

$$l[\beta] = \int_I |\dot{\beta}|\, dt = \int_I |d\beta| = \int_I \sqrt{\mathrm{I}_p\,(X, X)}$$

$$[|d\beta| = |X| = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{\mathrm{I}_p(X, X)}].$$

Таким образом,

Вычисление длины кривой на поверхности

$l[\beta] = \int_I \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, du^i du^j}$ где

$$\alpha(t) = (u^1(t), \ldots, u^n(t))^T, [d\alpha]_{e_1,\ldots,e_n} = (du^1, \ldots, du^n)^T = [d\beta]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}}$$

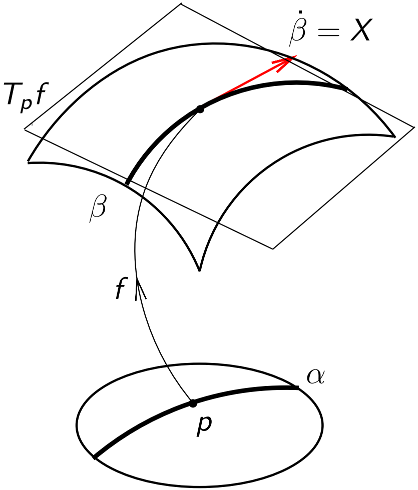


Рис.: 3

Пусть $X,\ Y \in T_p f$, т.е.
$X = d\beta_1,\ \beta_1 = f \circ \alpha_1; \quad Y = d\beta_2,\ \beta_2 = f \circ \alpha_2; \quad \alpha_1 : I \to U;\ \alpha_2 : I \to U;$

Тогда если φ — угол между касательными векторами X и Y, т.е. угол между кривыми β_1 и β_2 в точке $f(p)$, то

$$cos\varphi = \frac{\langle X, Y\rangle}{|X| \cdot |Y|}$$

В «координатном» представлении формула для вычисления угла между кривыми имеет вид

Формула для вычисления угла между кривыми на поверхности

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du^i\, dv^j}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij} du^i\, du^j}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij} dv^i\, dv^j}},$$

где $[d\alpha_1]_{e_1,\ldots,e_n} = [d\beta_1]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = (du^1, \ldots, du^n)^T$
$[d\alpha_2]_{e_1,\ldots,e_n} = [d\beta_2]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = (dv^1, \ldots, dv^n)^T$

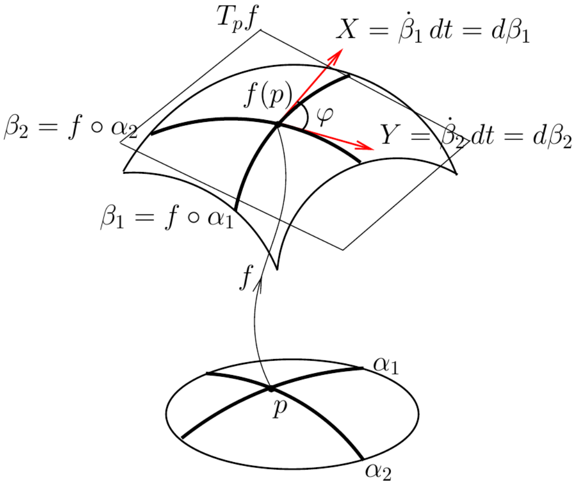

$T_p f$
$X = \dot{\beta}_1\, dt = d\beta_1$
$f(p)$
φ
$\beta_2 = f \circ \alpha_2$
$Y = \dot{\beta}_2 dt = d\beta_2$
$\beta_1 = f \circ \alpha_1$
f
α_1
p
α_2

Рис.: 4

Формула для вычисления "объема"поверхности

Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — поверхность. Тогда её объем вычисляется по формуле

$$Vol(U) = \int\limits_U \sqrt{g(p)}\, du^1 \dots du^n,$$

где $g(p) = \det(g_{ij}(p))$.

Приведем некоторые рассуждения в обоснование определения объема поверхности.

Пусть множество U разбито гиперплоскостями на параллелотопы U_j на векторах $\Delta u^1 \mathbf{e}_1$, $\Delta u^2 \mathbf{e}_2$, $\Delta u^n \mathbf{e}_n$ (см. рис.5).

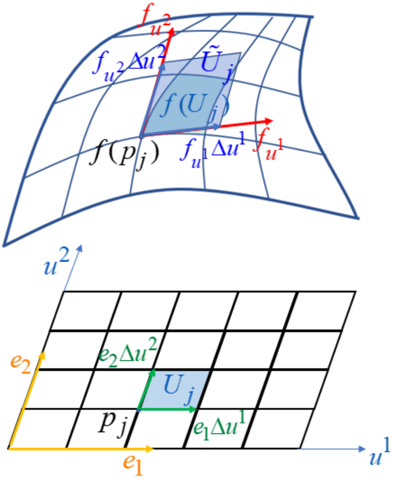
Тогда $f(U_j)$ — кусок поверхности, который мы (в соответствии с общей идеей дифференциальной геометрии) заменяем на параллелотоп в касательном пространстве $T_{p_j} f$, построенный на векторах

$df_{p_j}(\Delta u^1 \mathbf{e}_1) = \Delta u^1 f_{u^1}(p_j)$, $df_{p_j}(\Delta u^2 \mathbf{e}_2) = \Delta u^2 f_{u^2}(p_j), \ldots,$
$df_{p_j}(\Delta u^n \mathbf{e}_n) = \Delta u^n f_{u^n}(p_j)$.

Обозначим этот параллелотоп через $\tilde{U}_j$. Его объем $Vol[\tilde{U}_j] = \sqrt{g(p_j)}\Delta u^1 \ldots \Delta u^n$. Объем куска поверхности $Vol[f(U_j)]$ заменяем на $Vol[\tilde{U}_j]$.

Тогда объем всей поверхности

$Vol[f] \approx \sum\limits_j \sqrt{g(p_j)}\Delta u^1 \ldots \Delta u^n$ — интегральная сумма для $\int\limits_U \sqrt{g(u^1, u^2, \ldots, u^n)}du^1 du^2 \cdots du^n$.



f_{u^2}
$f_{u^2}\Delta u^2$
$\tilde{U}_j$
$f(U_j)$
$f(p_j)$
$f_{u^1}\Delta u^1$
f_{u^1}
u^2
e_2
$e_2\Delta u^2$
U_j
p_j
$e_1\Delta u^1$
e_1
u^1

Рис.: 5

Пример. Сфера с центром в нуле радиуса R задается уравнением
$f(u,v) = (R\cos u\cos v,\ R\cos u\sin v,\ R\sin u)^T$, u — широта, v — долгота,
$U = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \times [0; 2\pi]$, (см. рис.6).

Частные производные (касательные векторы) и их векторное произведение (нормаль к поверхности):
$f_u = (-R\sin u\cos v,\ -R\sin u\sin v,\ R\cos u)$
$f_v = (-R\cos u\sin v,\ R\cos u\cos v,\ 0)$

$$f_u \times f_v = \left(-R^2\cos^2 u\cos v,\ -R^2\cos^2 u\sin v,\ -R^2\sin u\cos u\right) =$$
$$= -R^2\cos u\,(\cos u\cos v,\ \cos u\sin v,\ \sin v) = -R^2\cos u\ = N.$$

$f_u \parallel f_v \Leftrightarrow f_u \times f_v = \vec{0} \Leftrightarrow \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow f$ определяет гладкую поверхность везде, кроме полюсов.

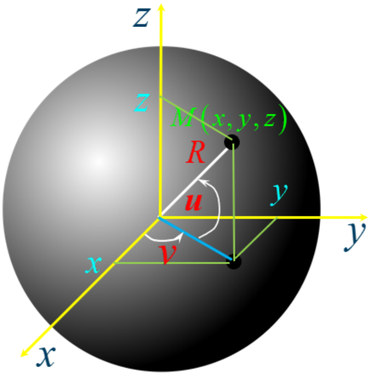


Рис.: 6

Коэффициенты и матрица IФФ:

$g_{11} = f_u^2 = R^2$, $g_{12} = g_{21} = \langle f_u, f_v \rangle = 0$, $g_{22} = f_v^2 = R^2 \cos^2 u$

$$[\mathrm{I}_p] = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u \end{pmatrix}$$

1) Найдем длину экватора, т.е. длину кривой $\beta(t) = f(\alpha(t))$, где $\alpha(t) = (0, t)^T$.

$[d\alpha]_{e_1, e_2} = [d\beta]_{f_u, f_v} = (0, dt)^T = (du, dv)^T$. Следовательно,

$$l[\beta] = \int_0^{2\pi} \sqrt{d\beta^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11} du^2 + 2 g_{12} du\, dv + g_{22} dv^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 dt^2} = 2\pi R.$$

2) Найдем угол между параллелью (β_2) и меридианом (β_1).

$$\beta_1(\tau) = f(\alpha_1(\tau)),\ \ \alpha_1(\tau) = (\tau, v_0)^T$$
$$\beta_2(t) = f(\alpha_2(t)),\ \ \alpha_2(t) = (u_0, t)^T$$
$$[d\alpha_1]_{e_1,e_2} = [d\beta_1]_{f_u,f_v} = (d\tau, 0)^T$$
$$[d\alpha_2]_{e_1,e_2} = [d\beta_2]_{f_u,f_v} = (0, dt)^T,$$

β_1 и β_2 пересекаются в точке $p = (u_0, v_0)$, $t = v_0$, $\tau = u_0$.

Угол φ между параллелью и меридианом есть угол между $d\beta_1$ и $d\beta_2$:

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{I}_p(d\beta_1, d\beta_2)}{\sqrt{\mathrm{I}_p(d\beta_1, d\beta_1)}\sqrt{\mathrm{I}_p(d\beta_2, d\beta_2)}} =$$

$$\frac{g_{11}d\tau\cdot 0 + g_{12}(d\tau\cdot\ dt + 0\cdot 0) + g_{22}0\cdot dt}{\sqrt{g_{11}d\tau^2 + 2g_{12}d\tau\cdot 0 + g_{22}0^2}\sqrt{g_{11}0^2 + 2g_{12}\cdot 0\cdot dt + g_{22}dt^2}} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

3) Найдем площадь сферы.

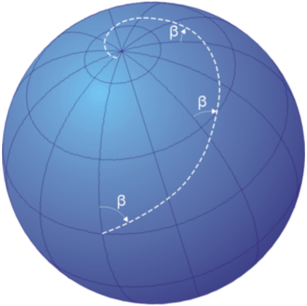
$$g = \det[\mathrm{I}_p] = R^4\cos^2 u,\ \ \sqrt{g} = R^2\cos u \Rightarrow Vol(f) = \iint\limits_U \sqrt{g}\,du\,dv =$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos u\,du\right)dv = \int\limits_0^{2\pi} 2R^2\,du = 4\pi R^2.$$

Определение локсодромы

Локсодромой (от греч. loxos — косой и dromos — бег, путь) называется линия, которая пересекает все меридианы под постоянным углом (который называется локсодромическим, или путевым углом).

Введена в рассмотрение португальским математиком Нониусом в 1529 году.



4) Найдем локсодрому на сфере (см.рис.7).

$\beta_1(\tau) = f(\alpha_1(\tau))$, $\alpha_1(\tau) = (\tau, v_0)^T$ — меридиан.

Локсодрома: $\beta(t) = f(\alpha(t))$, где $\alpha(t) = (u(t), v(t))^T$ — искомая функция. Имеем:

$$[d\beta_1]_{f_u,f_v} = [d\alpha_1]_{e_1,e_2} = (d\tau, 0)^T$$
$$[d\beta]_{f_u,f_v} = [d\alpha]_{e_1,e_2} = (du, dv)^T,$$

при этом должно выполняться условие $\widehat{d\beta_1,\ d\beta} = const = \varphi_0$.

$$\cos \widehat{d\beta_1,\ d\beta} = \cos\varphi_0 = \frac{\mathrm{I}_p(d\beta_1, d\beta)}{\sqrt{\mathrm{I}_p(d\beta_1, d\beta_1)}\sqrt{\mathrm{I}_p(d\beta, d\beta)}} =$$

$$\frac{R^2\, d\tau\, du}{\sqrt{R^2\, d\tau^2}\sqrt{R^2\, du^2 + R^2\cos^2 u\, dv^2}} =$$

$$= \frac{du}{\sqrt{du^2 + \cos^2 u dv^2}} = \cos\varphi_0.$$

После возведения в квадрат получаем:

$$\cos^2 u \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi_0}, \text{ или } \frac{dv}{du} = \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\cos u}.$$

Следовательно, $v = \pm\operatorname{tg}\varphi_0 \ln|\operatorname{tg}(u/2 + \pi/4)| + v_0$

Локсодрома на сфере (иллюстрация)

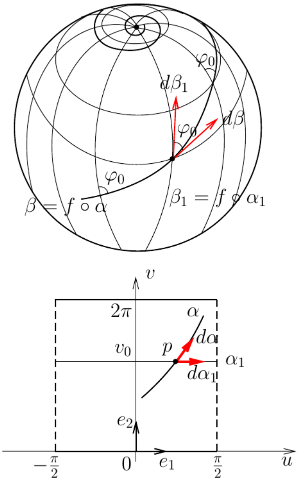


Рис.: 7