Основы дифференциальной геометрии и топологии
Лекция 1
Аффинные простанства и аффинные преобразования

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика
(4 семестр)

Литература

1. Сизый С.В. Лекции по дифференциальной геометрии. М. Физматлит 2007. 376 с.

2. Нагребецкая Ю.В., Перминова О.Е. Дифференциальная геометрия. Практикум. Екатеринбург, Изд-во УрФУ, 2017. 72 с.

3. Лекции-презентации Овсянникова А.Я. по курсу Дифференциальная геометрия и топология. **Ссылка здесь.**

Пусть $\mathbb{R}^n = \left\{ \left(x^1, \ldots, x^n\right)^T \mid x^i \in \mathbb{R} \right\}$ и $\overrightarrow{V}$ — векторное пространство, $\dim \overrightarrow{V} = n$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — базис в $\overrightarrow{V}$. Пространства $\overrightarrow{V}$ и $\mathbb{R}^n$ изоморфны; изоморфизм осуществляется посредством отображения $x \mapsto [x]_b$, где $[x]_b$ — столбец координат вектора x в базисе b, $x = b\,[x]_b = x^1 b_1 + \cdots + x^n b_n$.

Если $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — базисы, то $b = a\,T_{a \to b}$, где $T_{a \to b}$ — (невырожденная) матрица перехода, при этом $[x]_a = T_{a \to b}[x]_b$, $T_{b \to a} = T^{-1}_{a \to b}$.

Если $\mathcal{A}$ — линейный оператор, то $[\mathcal{A}]_b = ([\mathcal{A}b_1]_b,\ [\mathcal{A}b_2]_b, \ldots, [\mathcal{A}b_n]_b)$ — матрица этого оператора и тогда для любого $x \in \overrightarrow{V}$ выполняется

$$[\mathcal{A}x]_b = [\mathcal{A}]_b[x]_b.$$

При этом $[\mathcal{A}]_a = T_{a \to b}[\mathcal{A}]_b T^{-1}_{a \to b}$.

Определение

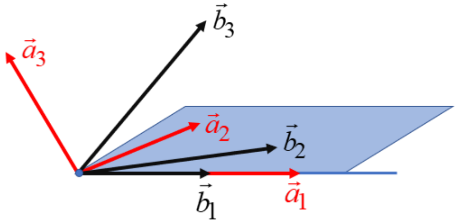
Если $\det T_{a\to b} > 0$, то говорят, что базисы a и b имеют *одинаковую ориентацию*.

Базис, b, имеющий со стандартным базисом $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, где e_i — строка, состоящая из нулей, кроме i-го места, где стоит 1, одну и ту же ориентацию, имеет *стандартную* ориентацию.

$\left(\overrightarrow{V},\ \langle,\rangle\right)$ — евклидово пространство, если $\langle,\rangle$ — скалярное произведение.
Если $b = (b_1, \dots, b_n)$ — базис в пространстве $\overrightarrow{V}$, то
$G_b = Gr(b_1, \dots, b_n) = (\langle b_i, b_j\rangle)$ — матрица Грама и
$\forall x, y \in \overrightarrow{V} \quad \langle x, y\rangle = [x]^T\ G_b\ [y]$, $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Если $a = (a_1, \dots, a_n)$ — другой базис пространства $\overrightarrow{V}$, то $G_a = T_{a\to b} G_b T_{b\to a} = T^{-1}_{b\to a} G_b T_{b\to a}$.

Определение

$\overrightarrow{V_1} < \overrightarrow{V_2} < \dots < \overrightarrow{V_k}$ — *орфлаг, порожденный линейно независимой (ЛН) системой* $a = (a_1, \dots, a_k)$, $a_j \in \overrightarrow{V}$, если $\overrightarrow{V_i} = \langle a_1, a_2, \dots, a_i \rangle$. ЛН системы $a = (a_1, \dots, a_k)$, $b = (b_1, \dots, b_k)$ порождают один и тот же орфлаг, если $\overrightarrow{V_i} = \langle a_1, \dots, a_i \rangle = \langle b_1, \dots, b_i \rangle$ и $(a_1, \dots, a_i), (b_1, \dots, b_i)$ имеют одну и ту же ориентацию для любого i

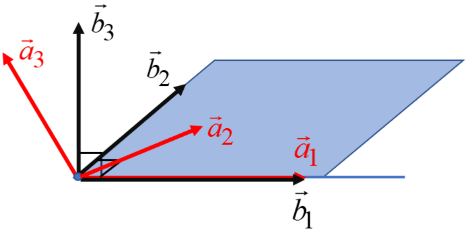


Упражнение

Системы $a = (a_1, \ldots, a_k)$, $a_j \in \overrightarrow{V}$, $b = (b_1, \ldots, b_k)$, $b_j \in \overrightarrow{V}$ порождают один и тот же орфлаг тогда и только тогда, когда если матрица перехода $T_{a \to b}$ является верхнетреугольной с положительными элементами на главной диагонали.

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта

$\vec{b}_1 = \vec{a}_1$
$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \lambda_1 \vec{b}_1 \quad (\cdot \vec{b}_1)$
$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \mu_1 \vec{b}_1 - \mu_2 \vec{b}_2 \quad (\cdot \vec{b}_1, \cdot \vec{b}_2), \qquad \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ - ОНБ



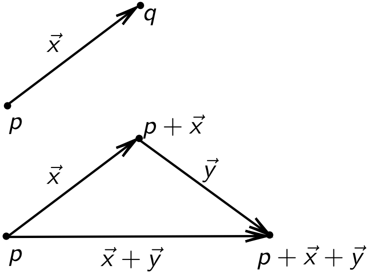
В процессе ортогонализации Грамма-Шмидта получается ОНБ (ОБ), порождающий тот же орфлаг, что и исходный базис (почему ?).

Определение

$\left(V, \overrightarrow{V}, +\right)$ — *аффинное пространство*, если

1. $\forall p \in V\ \forall \vec{x} \in \overrightarrow{V}\ \exists! q \in V \quad p + \vec{x} = q$
2. $\forall p, q \in V\ \exists! \vec{x} \in \overrightarrow{V} \quad p + \vec{x} = q \quad (\vec{x} = \overrightarrow{pq} = q - p)$
3. $\forall p \in V\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \overrightarrow{V} \quad (p + \vec{x}) + \vec{y} = p + (\vec{x} + \vec{y})$

V — множество точек, $\overrightarrow{V}$ — множество векторов.



Если $\overrightarrow{V}$ — евклидово, то $\left(V, \overrightarrow{V}, +\right)$ — *евклидово аффинное пространство.*

Расстояние между точками p и q — это $|p-q| = |\overrightarrow{p\,q}|$.

Определение

Пусть $(W; \overrightarrow{W}; +)$ — аффинное пространство, где $W \subset V$, $\overrightarrow{W} \leq \overrightarrow{V}$. Тогда W — *аффинное подпространство* аффинного пространства V.

Утверждение

$(W; \overrightarrow{W}; +)$ — аффинное подпространство пространства V тогда и только тогда, когда $W = p_0 + \vec{W}$ для некоторой точки $p_0 \in V$.

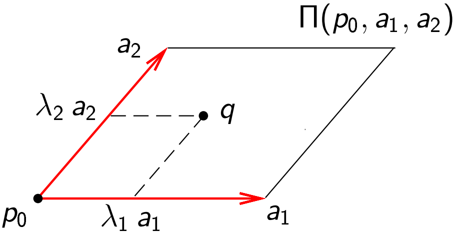
Пусть $\dim \overrightarrow{W} = k$, тогда $p_0 + \overrightarrow{W}$ — аффинное подпространство размерности k.

Определение

Множество

$$\Pi(p_0, a_1, \ldots, a_k) = \; = \{p_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k \mid \lambda_i \in [0,1]\}$$

— k-мерный *параллелотоп*, построенный на векторах $a_1, \ldots, a_k \in \overrightarrow{V}$, отложенный от точки $p_0 \in V$.



Его *объем* — это $\mathrm{Vol}(\Pi) = \sqrt{Gr(a_1, \ldots, a_k)}$.

Определение

Пусть $c_1, \dots, c_{n-1} \in V$., $\dim V = n$. *Обобщенным векторным произведением* векторов $c_1, \dots, c_{n-1}$ называется вектор b, такой что

1. $b \perp c_i$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$
2. система $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, b)$ имеет стандартную ориентацию
3. $|b| = \mathrm{Vol}\,(\Pi\,(c_1, \dots, c_{n-1})) = \sqrt{Gr\,(c_1, \dots, c_{n-1})}$

Утверждение

Вектор b существует и единственен, он обозначается $b = c_1 \times \dots \times c_{n-1}$ и вычисляется по формуле $b = \det\left([c_1], [c_2], \dots, [c_{n-1}], e\right)$, где $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ — стандартный базис.

Существование

Пусть $b = \det([c_1], [c_2], \dots, [c_{n-1}], e) = (b^1, b^2, \dots, b^n_n)^T$.

1) Покажем, что $\langle b, c_j \rangle = 0$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, т.е. $b \perp c_j$.
По формуле разложения определителя по n-му столбцу

$$b = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} M_{in} e_i = ((-1)^{1+n} M_{1n}, (-1)^{2+n} M_{2n}, \dots, (-1)^{2n} M_{nn}),$$

где M_{ij}— соответствующий минор.
Поскольку e — ОНБ, имеем $\langle b, c_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} b^i c^i_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} M_{in} c^i_j$.
Снова используем формулу разложения определителя по n-му столбцу, но уже в другую сторону:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} M_{in} b^i = \det([c_1], [c_2], \dots, [c_{n-1}], [c_j])$$

Последний определитель равен нулю ввиду того, что у него j-й и n-й столбцы равны столбцу $[c_j]$. Значит, $\langle b, c_j \rangle = 0$.

2) Покажем, что $\det([c_1], [c_2], \ldots, [c_{n-1}], [b]) > 0$, т.е. система $(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, b)$ имеет стандартную ориентацию.

По формуле разложения определителя по n-му столбцу

$$\det([c_1], [c_2], \ldots, [c_{n-1}], [b]) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} M_{in} b^i = \sum_{i=1}^{n} (b^i)^2 = b^2 > 0$$

3) Наконец, покажем, что $b^2 = Gr(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})$, т.е. $|b| = \sqrt{Gr(c_1, c_2, \ldots, c_{n-1})} = \mathrm{Vol}\,(\Pi\,(c_1, \ldots, c_{n-1}))$.
Из доказанного в 2)

$$b^4 = (\det([c_1], [c_2], \ldots, [c_{n-1}], [b]))^2 = \det \begin{bmatrix} [c_1]^T \\ [c_2]^T \\ \ldots \\ [c_{n-1}]^T \\ [b]^T \end{bmatrix} \cdot \det[c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, b] =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} [c_1]^T \\ [c_2]^T \\ \dots \\ [c_{n-1}]^T \\ [b]^T \end{bmatrix} \cdot [c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, b]\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \langle c_1, c_1\rangle & \langle c_1, c_2\rangle & \dots & \langle c_1, c_{n-1}\rangle & \langle c_1, b\rangle \\ \langle c_2, c_1\rangle & \langle c_2, c_2\rangle & \dots & \langle c_2, c_{n-1}\rangle & \langle c_2, b\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle c_{n-1}, c_{n-1}\rangle & \langle c_{n-1}, c_2\rangle & \dots & \langle c_{n-1}, c_{n-1}\rangle & \langle c_{n-1}, b\rangle \\ \langle b, c_1\rangle & \langle b, c_2\rangle & \dots & \langle b, c_{n-1}\rangle & \langle b, b\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \langle c_1, c_1 \rangle & \langle c_1, c_2 \rangle & \dots & \langle c_1, c_{n-1} \rangle & 0 \\ \langle c_2, c_1 \rangle & \langle c_2, c_2 \rangle & \dots & \langle c_2, c_{n-1} \rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle c_{n-1}, c_{n-1} \rangle & \langle c_{n-1}, c_2 \rangle & \dots & \langle c_{n-1}, c_{n-1} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \langle b, b \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= b^2 \cdot \det \begin{pmatrix} \langle c_1, c_1 \rangle & \langle c_1, c_2 \rangle & \dots & \langle c_1, c_{n-1} \rangle \\ \langle c_2, c_1 \rangle & \langle c_2, c_2 \rangle & \dots & \langle c_2, c_{n-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle c_{n-1}, c_{n-1} \rangle & \langle c_{n-1}, c_2 \rangle & \dots & \langle c_{n-1}, c_{n-1} \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= b^2 \cdot Gr(c_1, c_2 \dots, c_{n-1})$$

Значит, $b^2 = Gr(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$.
Существование доказано.

Единственность

Пусть c - обобщенное векторное произведение векторов $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$. Тогда и b, и c принадлежат ортогональному дополнению $\langle c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\rangle^{\perp}$. Но

$$\dim(\langle c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\rangle^{\perp}) = n - \dim(\langle c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\rangle) = n - (n-1) = 1$$

Значит, b и c коллинеарны. Так как $|b| = |c|$, отсюда следует, что $c = \pm b$. Следовательно,

$$\det([c_1], [c_2], \dots, [c_{n-1}], [c]) = \pm \det([c_1], [c_2], \dots, [c_{n-1}], [b])$$

Система $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$, имеет стандартную ориентацию, значит, $\det([c_1], [c_2], \dots, [c_{n-1}], [c]) > 0$. Следовательно, $c \neq -b$ и $c = b$.

Единственность доказана.

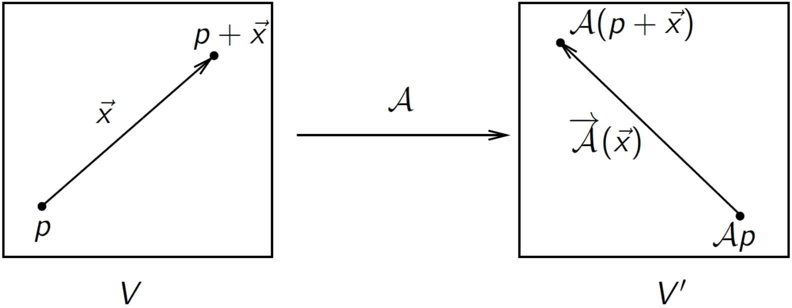
Определение

Пусть $\left(V, \overrightarrow{V}, +\right)$, $\left(V', \overrightarrow{V'}, +\right)$ — аффинные пространства. Отображение $\mathcal{A} : V \to V'$ называется *аффинным*, если

$$\forall p \in V \ \forall \vec{x} \in \overrightarrow{V} \quad \mathcal{A}\left(p + \vec{x}\right) = \mathcal{A}(p) + \overrightarrow{\mathcal{A}}\left(\vec{x}\right)$$

для некоторого линейного отображения $\overrightarrow{\mathcal{A}} : \overrightarrow{V} \to \overrightarrow{V'}$.

$\mathcal{A}$ — *аффинный оператор*, если $V = V'$, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V'}$. Линейное отображение $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ в этом случае является линейным оператором.


$p+\vec{x}$
$\vec{x}$
p
V
$\mathcal{A}$
$\mathcal{A}(p+\vec{x})$
$\overrightarrow{\mathcal{A}}(\vec{x})$
$\mathcal{A}p$
V'

Пусть $\mathcal{A}$ — аффинный оператор. Везде далее мы будем предполагать, что оператор $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ обратим.

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — стандартный базис векторного пространства $\overrightarrow{V}$, $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0), (O, e_1, \ldots, e_n)$ — стандартный репер аффинного пространства V. Координаты $[p]$ точки $p \in V$ в репере — это координаты вектора $[\overrightarrow{Op}]_e$ в базисе e. Тогда

$$[\mathcal{A}p] = [p_0] + [\overrightarrow{\mathcal{A}}]\,[p],$$

где $p_0 = \mathcal{A}(O)$ и $[\overrightarrow{\mathcal{A}}]$ — матрица линейного оператора $\overrightarrow{\mathcal{A}} : \overrightarrow{V} \to \overrightarrow{V}$ в базисе e. Действительно, $\mathcal{A}p = \mathcal{A}\left(O + \overrightarrow{Op}\right) = \mathcal{A}(O) + \overrightarrow{\mathcal{A}}\left(\overrightarrow{Op}\right)$

Упражнение (6б.)

Доказать, что любой аффинный оператор аффинного пространства $\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$

а) переводит прямую в прямую;

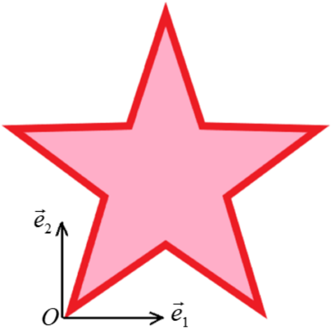
б) плоскость в плоскость;

в) сохраняет параллельность прямых и плоскостей;

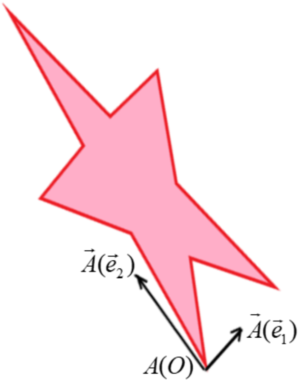
г) сохраняет отношение отрезков;

д) переводит регулярную кривую в регулярную кривую;

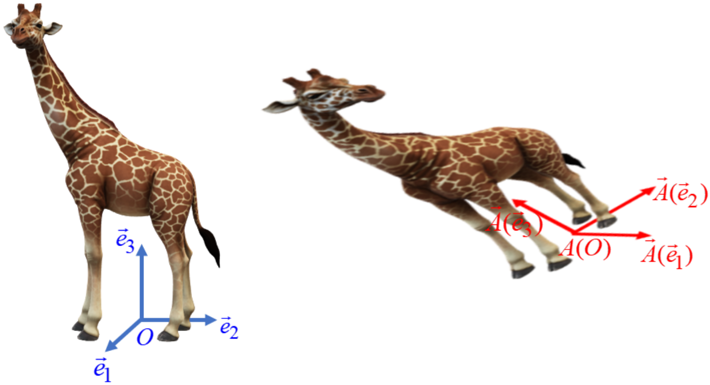
е) переводит поверхность в поверхность;



$\vec{e}_2$
O
$\vec{e}_1$



$\vec{A}(\vec{e}_2)$
$\vec{A}(\vec{e}_1)$
$A(O)$


$\vec{e}_3$
O
$\vec{e}_2$
$\vec{e}_1$
$\vec{A}(\vec{e}_2)$
$\vec{A}(\vec{e}_3)$
$A(O)$
$\vec{A}(\vec{e}_1)$

Определение.

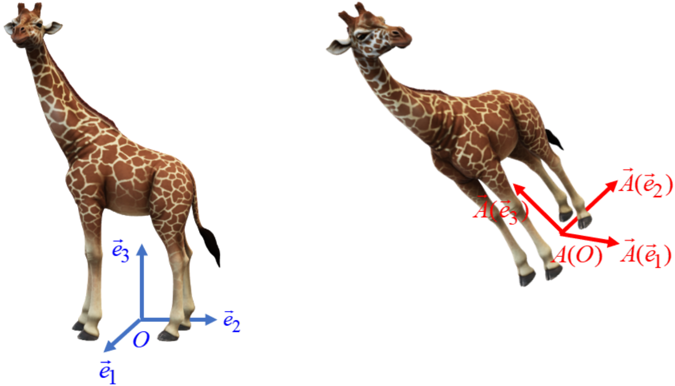
Отображение $\mathcal{A} : V \to V$ аффинного евклидова пространства V в себя называется *изометрией*, если $\forall p, q \in V$ $|\mathcal{A}p - \mathcal{A}q| = |p - q|$.

Теорема

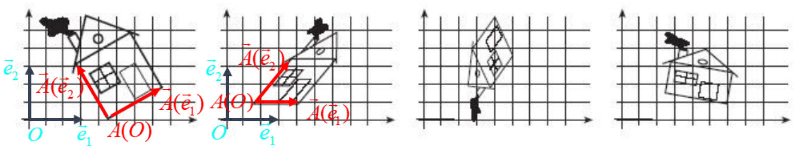
$\mathcal{A}$ — изометрия $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ — аффинный оператор и $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ — ортогональный линейный оператор, т.е. $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ переводит ОНБ в ОНБ.

(Без доказательства).

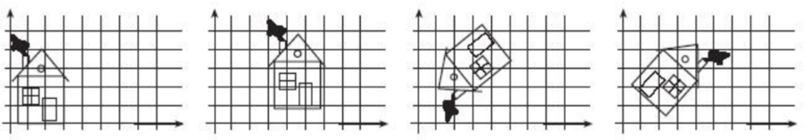
Таким образом, для изометрии $\mathcal{A}$ имеем: $[\mathcal{A}p] = [p_0] + A[p]$, где $A = [\overrightarrow{\mathcal{A}}]$ — ортогональная матрица, т.е. $A^{-1} = A^T$. Если $\det A > 0$, то $\mathcal{A}$ называется движением аффинного пространства. Если $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ — тождественный оператор, то $\mathcal{A}$ является параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{Op_0}$.


$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
O
$\vec{e}_1$
$\vec{A}(\vec{e}_2)$
$\vec{A}(\vec{e}_3)$
$A(O)$
$\vec{A}(\vec{e}_1)$

Примеры аффинных операторов и изометрий



Примеры аффинных операторов на плоскости



Примеры изометрий (движений) на плоскости

Теорема

Любое движение в $\mathbb{R}^2$, не являющееся параллельным переносом, имеет неподвижную точку, т.е. существует такая точка $q \in V$, что $\mathcal{A}(q) = q$.

Доказательство. Нужно найти точку $q \in \mathbb{R}^2$ такую, что

$$\mathcal{A}(q) = p_0 + \vec{A}(\overrightarrow{Oq}) = p = O + \overrightarrow{Oq},$$

$$(\vec{A} - \vec{E})(\overrightarrow{Oq}) = \overrightarrow{p_0 O}$$

Докажите самостоятельно (упражнение, 1б.), что оператор $\vec{A} - \vec{E}$ невырожденный. При этом надо учесть, что оператор $\vec{A}$ — ортогональный и сохраняет ориентацию. Тогда

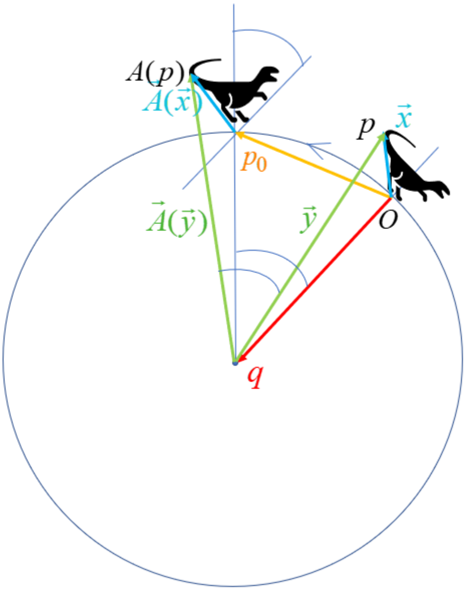
$$\overrightarrow{Oq} = -(\vec{A} - \vec{E})^{-1}(\overrightarrow{Op_0})$$

А значит,

$$q = O + \overrightarrow{Oq} = O - (\vec{A} - \vec{E})^{-1}(\overrightarrow{Op_0})$$

Таким образом, координаты точки q можно найти по формуле

$$[q] = -[(\vec{A} - \vec{E})]^{-1}[p_0]$$


$A(p)$
$\vec{A}(\vec{x})$
p_0
p
$\vec{x}$
$\vec{A}(\vec{y})$
$\vec{y}$
O
q

Более того, оператор $\mathcal{A}$ поворачивает плоскость вокруг неподвижной точки q. Пусть r — репер, полученный из стандартного параллельным переносом из точки O в точку q, тогда для координат $[\cdot]_r$ в этом репере для любой точки p имеем

$$[\mathcal{A}(p)]_r = [\mathcal{A}(q)]_r + [\overrightarrow{A}]_r = [q]_r + [\overrightarrow{A}]_r[p]_r = [\overrightarrow{A}]_r[p]_r$$

Пусть $\vec{x} = \overrightarrow{Op}$. Тогда $\overrightarrow{qp} = \vec{x} - \overrightarrow{Oq}$. Покажите, что

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{qp}) = \mathcal{A}(p) - q$$

(упражнение, 1 б.), т.е. $\overrightarrow{A}(\vec{y}) = \mathcal{A}(p) - q$ для $\vec{y} = \overrightarrow{qp}$ (см. рис. на предыдущем слайде).