Дифференциальная геометрия
Тема 9
Нормальная кривизна гиперповерхности

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Направление: Компьютерная математика
(7 семестр)

Теорема Менье

Пусть $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ - гиперповерхность, k — кривизна плоской кривой $\beta = f \circ \alpha$, $\alpha : I \to U$, в момент времени t и θ — угол между $E_2(t)$ и $N(p)$, $p = \alpha(t)$, где $(E_1(t), E_2(t))$ — базис Френе кривой $\beta(t)$. Тогда

$$k \cos\theta = \frac{\mathrm{II}_p(\dot\beta(t), \dot\beta(t))}{\mathrm{I}_p(\dot\beta(t), \dot\beta(t))}$$

(см. рис. 1)

Без доказательства.

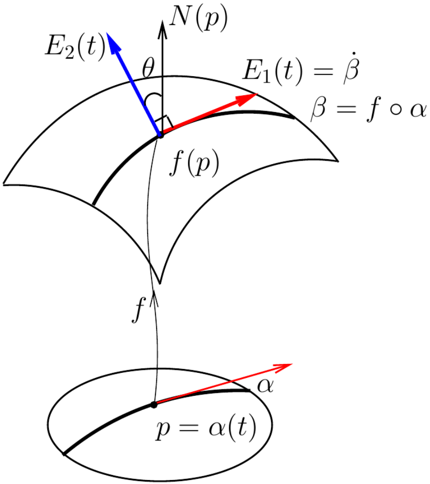


Рис.: 1

Определение нормальной кривизны

Нормальной кривизной $k_N(X)$ поверхности f в точке p в направлении $X \in T_p f$ называется отношение $\dfrac{\mathrm{II}_p(X,X)}{\mathrm{I}_p(X,X)}$.

Определение нормального сечения

Нормальным сечением гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ в точке p вдоль вектора $X \in T_p f$ называется кривая, полученная при сечении образа гиперповерхности f плоскостью, проходящей через точку p, нормальный вектор к поверхности в этой точке и вектор X.

Наблюдения

(1) Из теоремы Мёнье следует, что нормальная кривизна вдоль вектора X равна кривизне нормального сечения $(\theta = 0)$ (см. рис.2-3).
(2) Из определения следует, что нормальное сечение не зависит от длины касательного вектора X, а зависит только от направления.

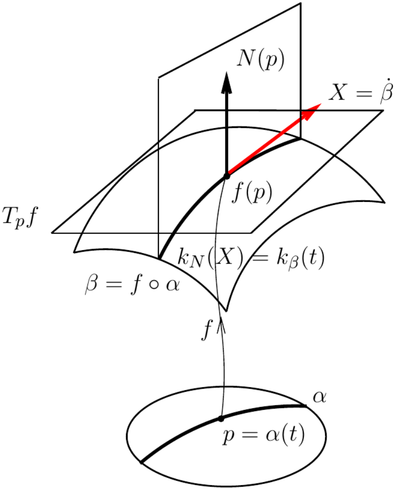

$N(p)$
$X = \dot{\beta}$
$f(p)$
$T_p f$
$k_N(X) = k_\beta(t)$
$\beta = f \circ \alpha$
f
α
$p = \alpha(t)$

Рис.: 2

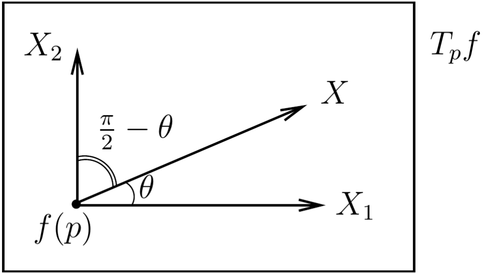


Рис.: 3

Геометрический смысл IIФФ

Вторая фундаментальная форма от единичного касательного вектора равна кривизне нормального сечения вдоль этого вектора (см. рис.4).

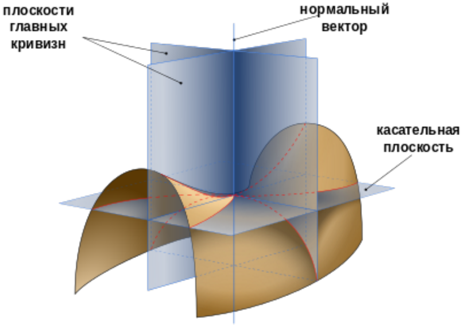


Рис.: 4

Изображение взято с **сайта**

Теорема Эйлера для произвольного n

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — ОНБ в $T_p f$, состоящий из главных направлений, отвечающих главным кривизнам $k_1, k_2, \ldots, k_n$, $X \in T_p f$, $\theta_i = \widehat{X\, X_i}$. Тогда

$$k_N(X) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cos^2 \theta_i$$

Теорема Эйлера для $n = 2$

$k_N(X) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что $|X| = 1$, т.е. $I_p(X, X) = \langle X, X\rangle = 1$ и $X = \sum\limits_i \cos\theta_i X_i$.

Тогда

$$\mathrm{II}_p(X, X) = \langle L_p(X), X\rangle = \langle \sum_i \cos\theta_i L_p(X_i), \sum_j \cos\theta_j X_j\rangle =$$

$$\langle \sum_i \cos\theta_i k_i X_i, \sum_j \cos\theta_j X_j\rangle = \sum_i \sum_j k_i \langle X_i, X_j\rangle \cos\theta_i \cos\theta_j = \sum_i k_i \cos^2\theta_i$$

Следствие из теоремы Эйлера

Главные кривизны k_1 *и* k_2 являются экстремальными значениями нормальной кривизны (см. рис.4).

Доказательство

Без ограничения общности можно считать, что $k_2 > k_1$. Тогда

$$k_N(X) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = k_1 + (k_2 - k_1)\sin^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\, k_N(X) = 0 \text{ при этом } \min k_N(X) = k_1 \text{ и } X \upuparrows X_1 \\ \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} k_N(X) = \frac{\pi}{2} \text{ при этом } \max k_N(X) = k_2 \text{ и } X \upuparrows X_2 \end{cases}$$

Таким образом, если мысленно вращать секущую нормальную плоскость вокруг нормального вектора $\overrightarrow{N}$, то max и min кривизны нормальных сечений достигаются на двух взаимно перпендикулярных главных направлениях X_1 и X_2.

Упражнение

Средняя кривизна является средним интегральным значением нормальных кривизны

$$H = \int_0^{2\pi} k_N(\theta) d\theta$$

Здесь $k_N(\theta) = k_N(X)$, где θ — угол между касательными векторами X и X_1.

Указание. Использовать теорему Эйлера.

Определение асимптотического вектора

Пусть $X \in T_p f$. Вектор X называется *асимптотическим* на гиперповерхности f в точке p, если $k_N(X) = 0$.

Критерий асимптотического направления

$$k_N(X) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{II}_p(X, X) = 0 \Leftrightarrow L_p(X) \perp X$$

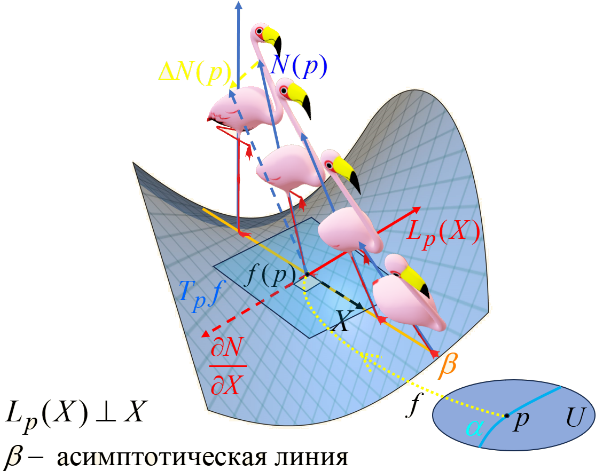
Критерий асимптотического направления для двупараметрической гиперповерхности $n = 2, m = 3$

X — асимптотическое направление $\Leftrightarrow h_{11}\, du^2 + 2h_{12}\, du\, dv + h_{22}\, dv^2 = 0$

Определение асимптотической линии

Образ кривой $\beta(t)$ на гиперповерхности называется **асимптотической линией**, если для любого t вектор $\dot{\beta}(t)$ является асимптотическим.

Таким образом, нормальный вектор вдоль асимптотической линии меняется перпендикулярно этой линии (см. рис 5).



$\Delta N(p)$
$N(p)$
$L_p(X)$
$f(p)$
$T_p f$
X
$\frac{\partial N}{\partial X}$
β
f
α
p
U
$L_p(X) \perp X$
β – асимптотическая линия

Рис.: 5

Упражнение (3б.)

1. В каждой гиперболической точке двупараметрической гиперповерхности есть две асимптотические линии, причем линии кривизны являются биссектрисами углов между этими асимптотическими линиями (см.рис. 6).
2. В каждой параболической точке асимптотическое направление одно и оно является линией нулевой кривизны.
3. В эллиптических точках нет асимптотических линий (см. рис. 7).
4. Прямолинейная образующая является асимптотической линией (см. рис. 8).

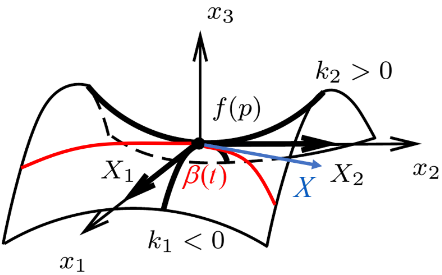


Рис.: 6

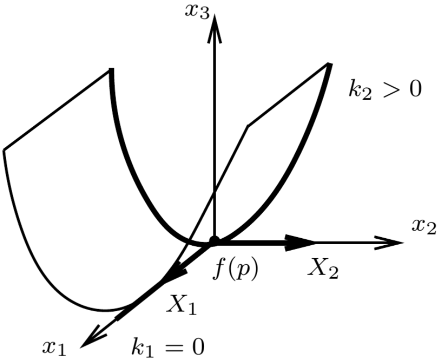
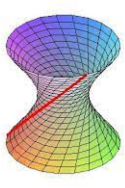
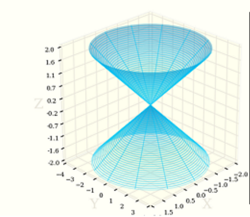


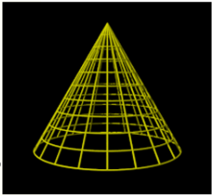
Рис.: 7

Асимптотические линии (прямолинейные образующие) на поверхностях второго порядка

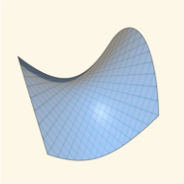


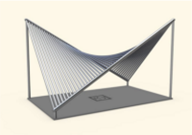
однополостный гиперболоид





конус





гиперболический параболоид

Рис.: 8