Дифференциальная геометрия
Тема 7
Основной оператор гиперповерхности
Вторая фундаментальная форма гиперповерхности

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Компьютерная математика
(7 семестр)

Определение нормального Гауссового поля

Пусть
$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, $f_{u^1}, \dots, f_{u^n}$ — стандартный базис в $T_p f$. Векторное поле

$$N(p) = \frac{f_{u^1} \times \dots \times f_{u^n}}{|f_{u^1} \times \dots \times f_{u^n}|}, \quad p \in U$$

называется *нормальным Гауссовым полем* гиперповерхности f.

$N(p)$ — гладкое отображение $N : U \to \vec{\mathbb{R}}^{n+1}$, $|N| \equiv 1$, $N \perp T_p f$.

Утверждение (о дифференциале нормального Гауссова поля)

$d_pN(\vec{\mathbb{R}}^n) \subseteq T_pf$, т.е. $N_{u^1}, N_{u^2}, \dots, N_{u^n} \in T_pf$ (см.рис.1).

$N_{u^i} = dN_{u^i}(e_i) = N'(p)e_i$.

$\langle N, N\rangle \equiv 1$. Дифференцируем это тождество по u^i :

$2\langle N, N_{u^i}\rangle \equiv 0 \Rightarrow N_{u^i} \in T_pf$.

$$d_pN(\vec{\mathbb{R}}^n) = d_pN(\langle e_1, \dots, e_n\rangle) =$$
$$= \langle d_pN(e_1), \dots, d_pN(e_n)\rangle = \langle N_{u^1}, \dots, N_{u^n}\rangle \subseteq T_pf.$$

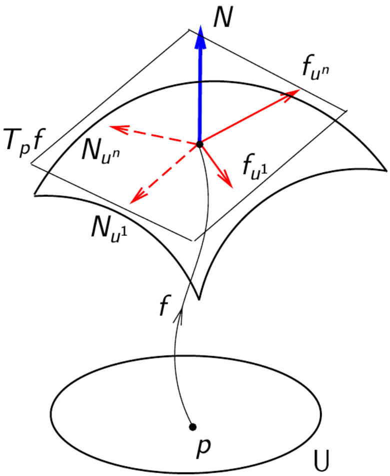

Рис.: 1

Пусть $f : U \subseteq \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^{n+1}$ — гиперповерхность,

$N : U \to \vec{\mathbb{R}}^{n+1}$ — нормальное Гауссово поле.

Рассмотрим гладкую регулярную кривую $\alpha : I \to U$, а также кривые $\beta = f \circ \alpha$, $\gamma = N \circ \alpha$.

Очевидно, кривая γ лежит на сфере S^n.

Тогда по утверждению о значении дифференциала от касательного вектора имеет место равенство

$d_p N(\dot{\alpha}(t)) = \dot{\gamma}(t) = (N(\alpha(t)))^{\bullet} = \frac{\partial N}{\partial \dot{\alpha}} \in T_p f$ — производная N по направлению вектора $\dot{\alpha}$. (см.рис.2,3).

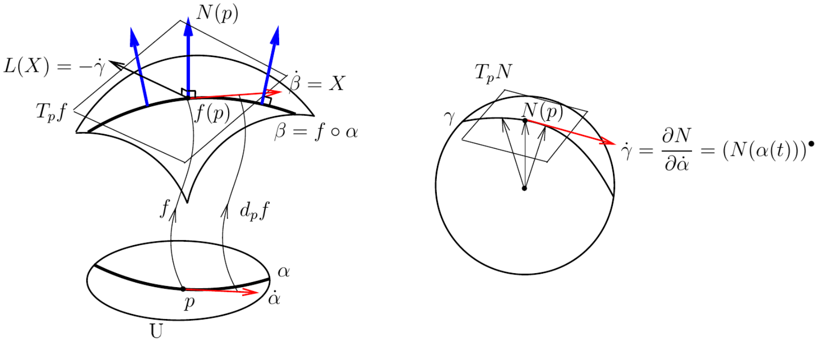

Рис.: 2

Касательные пространства T_pf и T_pN параллельны и их отождествляют.

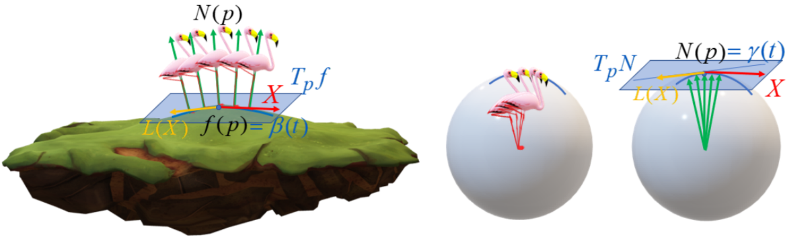

Рис.: 3

Определение

Пусть $X \in T_pf$ и $X = \dot{\beta}, \ \beta = f \circ \alpha, \ X = \dot{\beta} = d_pf(\dot{\alpha})$.

Обозначим через $L_p(X) = -\frac{\partial N}{\partial \dot{\alpha}} = -\left(N(\alpha(t))\right)^{\bullet} = -d_pN(\dot{\alpha})$

— производная нормального Гауссового поля N по направлению

вектора $\dot{\alpha}$ — прообраза вектора X при отображении d_pf с отрицательным знаком.

Отображение $L_p : T_pf \to T_pf$ называется *основным оператором гиперповерхности* f.

Утверждение (об основном операторе как композиции двух дифференциалов)

$$L_p = -d_pN \circ [d_pf]^{-1}$$

Отсюда, в частности, следует, что $L_p : T_pf \to T_pf$ — линейный оператор.

И еще следует, что образ $L_p(X) = -\frac{\partial N}{\partial \dot{\alpha}}$ не зависит от параметризации кривой $\alpha(t)$.

Доказательство

$X \in T_pf,\ L_p(X) = -d_pN(\dot{\alpha}),\ d_pf(\dot{\alpha}) = \dot{\beta} = X \Rightarrow$
$\dot{\alpha} = d_pf^{-1}(X) \Rightarrow L_p(X) = -d_pN(d_pf^{-1}(X)).$

Утверждение (о действии основного оператора на стандартный базис касательного пространства)

$$L(f_{u^i}) = -N_{u^i}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

Доказательство

$$L(f_{u^i}) = -d_p N(d_p f^{-1}(f_{u^i})) = -d_p N(e_i) = -N_{u^i}$$

$$f_{u^i} = d_p f(e_i)$$

Определение

Пусть $X,\ Y \in T_pf$. Тогда билинейная форма $\mathrm{I\!I}_p(X,Y)$, определенная на T_pf равенством

$$\mathrm{I\!I}_p(X,Y) = \langle L_p(X), Y \rangle$$

называется *второй фундаментальной формой* поверхности ($\mathrm{I\!I}$ФФ).

Коэффициенты матрицы $\mathrm{I\!I}$ФФ в стандартном базисе поверхности в точке p равны $((h_{ij}) = [\mathrm{I\!I}_p])$

$$h_{ij} = \mathrm{I\!I}_p(f_{u^i}, f_{u^j}) = \langle L_p(f_{u^i}), f_{u^j} \rangle = -\langle N_{u^i}, f_{u^j} \rangle$$

Теорема (о самосопряженности основного оператора)

Имеют место следующие свойства основного оператора

1. $h_{ij} = -\langle \vec{N}_{u^i}, f_{u^j} \rangle = \left\langle N, f_{u^i, u^j} \right\rangle$
2. IIФФ симметрична
3. L_p — самосопряжён.

Доказательство

(1) См. след. слайд.

(2) $h_{ij} = \left\langle N, f_{u^i, u^j} \right\rangle = \left\langle N, f_{u^j, u^i} \right\rangle = h_{ji} \Rightarrow \mathrm{II}$ФФ симметрична.

(3) Следует из (2): С одной стороны,
$\langle L_p(X), Y \rangle = \mathrm{II}_p(X, Y) = \mathrm{II}_p(Y, X) = \langle L_p(Y), X \rangle = \langle X, L_p(Y) \rangle$.
С другой стороны, по определению сопряженного оператора имеем:
$\langle L_p(X), Y \rangle = \left\langle X, L_p^*(Y) \right\rangle = \langle X, L_p(Y) \rangle \Rightarrow L = L^*$.

В силу Утверждения о действии основного оператора на стандартный базис касательного пространства имеем

$h_{ij} = \mathrm{II}_p(f_{u^i}, f_{u^j}) = \langle L_p(f_{u^i}), f_{u^j} \rangle = \langle -\vec{N}_{u^i}, f_{u^j} \rangle.$

Из $\vec{N} \perp T_p f$ выводим $\langle \vec{N}, f_{u^j} \rangle \equiv 0.$

Дифференцируя последнее тождество по u^i, получаем

$\langle \vec{N}_{u^i}, f_{u^j} \rangle + \langle \vec{N}, f_{u^j u^i} \rangle \equiv 0.$

Значит,
$h_{ij} = -\langle \vec{N}_{u^i}, f_{u^j} \rangle = \langle \vec{N}, f_{u^j u^i} \rangle.$

Следствие

Все собственные значения $k_1, \dots, k_n$ основного оператора вещественны, т.е. в $T_p f$ существует ОНБ из собственных векторов основного оператора.

Определение

Собственные числа $k_1, \dots, k_n$ основного оператора называются *главными кривизнами*, а соответствующие им собственные векторы — *главными направлениями* на данной поверхности в данной точке.

Теорема (о матрице основного оператора)

Пусть $(a_i^j) = [L_p]$ — матрица основного оператора в стандартном базисе $f_{u^1}, \dots, f_{u^n}$ касательного пространства $T_p f$. Тогда $[L_p] = [\mathrm{I}_p]^{-1}[\mathrm{II}_p]$.

Обозначим в данном базисе через через g и h определители матриц $[\mathrm{I}_p]$ и $[\mathrm{II}_p]$ соответственно.

Через $[L_f] = (a_j^i)$ (вверху номер строки) обозначим матрицу основного оператора гиперповерхности.

По определению матрицы линейного оператора $L_p f_{u^i} = \sum_{k=1}^{n} a_i^k f_{u^k}$.

Далее,

$$h_{ij} = \langle L_p(f_{u^i}), f_{u^j} \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_i^k f_{u^k}, f_{u^j} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_i^k \langle f_{u^k}, f_{u^j} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_i^k g_{kj}$$

Следовательно, в силу симметричности матриц $[\mathrm{I}_p]$ и $[\mathrm{II}_p]$ имеем $h_{ji} = h_{ij} = \sum_{k=1}^{n} g_{kj} a_i^k = \sum_{k=1}^{n} g_{jk} a_i^k$, откуда следуют матричные равенства

$$[\mathrm{II}_p] = [\mathrm{I}_p][L_p], \quad [L_p] = [\mathrm{I}_p]^{-1}[\mathrm{II}_p]$$

Утверждение (о вычислении главных кривизн и главных направлений гиперповерхности точке)

1. k — главная кривизна $\Leftrightarrow$ k — корень уравнения $\det\left([\mathrm{II}_p] - k[\mathrm{I}_p]\right) = 0$;
2. X — главное направление, соответствующее главной кривизне k $\Leftrightarrow$ координаты $[X]$ вектора X в стандартном базисе T_pf удовлетворяют ОСЛУ $\left([\mathrm{II}_p] - k[\mathrm{I}_p]\right)[X] = (0)$.

Доказательство

(1) k — главная кривизна $\Leftrightarrow$ k — корень уравнения $\det\left([L_p] - k\,E\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left([\mathrm{I}_p]^{-1}[\mathrm{II}_p] - k\,E\right) = 0$ $\left(\times \det\left([\mathrm{I}_p]\right)\right) \Leftrightarrow$ $\det\left([\mathrm{II}_p] - k[\mathrm{I}_p]\right) = 0$

(2) Аналогично.