Дифференциальная геометрия
Тема 6
Поверхности. Первая фундаментальная форма поверхности
Внутренняя геометрия поверхности

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Компьютерная математика
(7 семестр)

Определение гладкого отображения

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $f(u) = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \\ \dots \\ f_m(u) \end{pmatrix}$, $u \in U$, $\quad u = (u^1, ..., u^n)^T$, $m \geq n$. Вектор-функция $f(u)$ называется *гладкой*, если каждая скалярная функция $f_i(u)$ имеет сколь угодно много непрерывных частных производных.

Определение гладкого отображения

Пусть

$$f'(p) = [f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}] = \begin{pmatrix} {f_1}'_{u^1} & {f_1}'_{u^2} & \dots & {f_1}'_{u^n} \\ {f_2}'_{u^1} & {f_2}'_{u^2} & \dots & {f_2}'_{u^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {f_m}'_{u^1} & {f_m}'_{u^2} & \dots & {f_m}'_{u^n} \end{pmatrix}$$

Матрицу $f'(p)$ *называют матрицей Якоби* гладкого отображения f.

Пусть $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n, v \in \vec{\mathbb{R}}^n, v = (v^1, \ldots, v^n)^T$.

Теорема Тейлора (разложение первого порядка):
$f(p+v) = f(p) + f'(p)v + o(v)$

Определение дифференциала гладкого отображения

Линейное отображение $d_p f : \vec{\mathbb{R}}^n \to \vec{\mathbb{R}}^m$, определяемое формулой $d_p f(v) = f'(p)v$ называется *дифференциалом гладкого отображения* f в точке p.

$$f(p+v) \approx f(p) + d_p f(v)$$

Значит, можно считать, что значение $f(p+v)$ можно приблизить значением аффинного отображения.

Утверждение(о значении дифференциала от касательного вектора кривой)

Пусть U — область из $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, $\alpha : I \to U$ — гладкая кривая, $\beta = f \circ \alpha$. Тогда $d_p f(\dot\alpha) = \dot\beta$.

<u>Доказательство</u> следует из правила дифференцирования сложной функции от нескольких переменных: $\dot\beta(t) = (f(\alpha(t)))^{\cdot} =$

$$\begin{pmatrix} (f_1(u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t)))' \\ (f_2(u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t)))' \\ \dots \\ (f_m(u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t)))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i f'_{1\,u^i} \cdot \dot u^i \\ \sum_i f'_{2\,u^i} \cdot \dot u^i \\ \dots \\ \sum_i f'_{m\,u^i} \cdot \dot u^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_{1\,u^1} & \dots & f'_{1\,u^n} \\ f'_{2\,u^1} & \dots & f'_{2\,u^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f'_{m\,u^1} & \dots & f'_{m\,u^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot u^1 \\ \dot u^2 \\ \dots \\ \dot u^n \end{pmatrix}$$

$$= [f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}]\dot\alpha = f'(p)\dot\alpha = d_p f[\dot\alpha]$$

Вектор $\dot\beta$ называется *касательным вектором поверхности* f в точке p (см.рис.1).

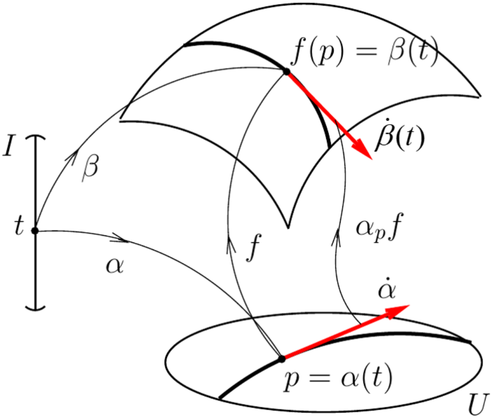

$f(p) = \beta(t)$
$\dot{\beta}(t)$
I
β
t
α
f
$\alpha_p f$
$\dot{\alpha}$
$p = \alpha(t)$
U

Рис.: 1

Определение условия регулярности

Говорят, что в точке $p \in U$ для гладкого отображения $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant n$ выполняется условие *регулярности*, если $\operatorname{rg} f'(p) = n$, $f'(p) = [f'_{u^1}(p), \dots, f'_{u^n}(p)]$, т.е. частные производные $f_{u^1}, \dots, f_{u^n}$ линейно независимы в этой точке.
Точки, в которых нарушается условие регулярности, называются *особыми*

Определение поверхности

Поверхностью называется гладкое отображение $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant n$, если в каждой точке $p \in U$ выполняется условие регулярности.

Определение u^i-линии

u^i-линией (*координатной линией*) поверхности f называется кривая $f(u_0^1, \dots, u_0^{i-1}, u_0^i + t, u_0^{i+1}, \dots, u_0^n)$, $t \in I$, т.е. кривая $f(p + e_i t)$.

Утверждение

Частная производная $f_{u^i} = (f_{1u^i}, \dots, f_{mu^i})^T$ является вектором-касательным к u^i-линии.

Доказательство.

Пусть $\beta = f(p + e_i t)$ — u^i-линия. Далее, $f_{u^i} = d_p f(e_i)$. При этом $e_i = \dot{\alpha}$ для $\alpha = p + e_i t$, а $d_p f(\dot{\alpha}) = \dot{\beta}$ по предыдущему утверждению. Следовательно, $f_{u^i} = d_p f(e_i) = \dot{\beta}$ — вектор касательной к u^i -линии (см. рис.2).

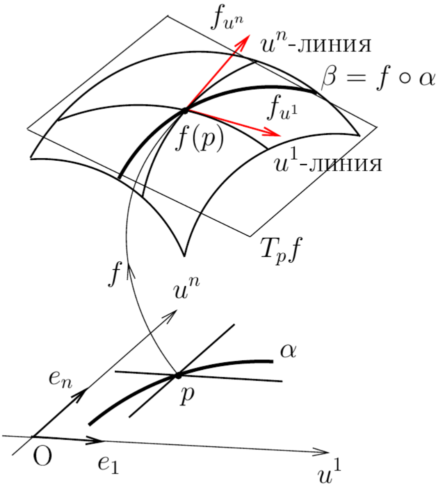

f_{u^n}
u^n-линия
$\beta = f \circ \alpha$
f_{u^1}
$f(p)$
u^1-линия
$T_p f$
f
u^n
α
e_n
p
O
e_1
u^1

Рис.: 2

Определение касательного пространства

Касательным пространством $T_p(f)$ к поверхности f в точке p называется множество всех касательных векторов $\dot\beta(t)$ кривых $\beta(t)$ на поверхности f в точке p (см рис.1).

Теорема о касательном пространстве

Пусть f — поверхность. Тогда

$$T_pf = d_pf(\mathbb{R}^n) = \langle f_{u^1}, \dots, f_{u^n} \rangle$$

Доказательство.

Пусть $\alpha : I \to U$ — гладкая кривая, $\alpha(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^n(t))$.
Тогда $\dot{\alpha}(t) = (\dot{u}^1, \dot{u}^2, \dots, \dot{u}^n) = \dot{u}^1 e_1 + \dot{u}^2 e_2 + \dots + \dot{u}^n e_n$.

Пусть также $\beta = f \circ \alpha$. Тогда $\dot{\beta} \in T_p f$ и
$\dot{\beta} = d_p f(\dot{\alpha}) = \dot{u}^1 d_p f(e_1) + \dot{u}^2 d_p f(e_2) + \dots + \dot{u}^n d_p f(e_n) =$
$\dot{u}^1 f_{u_1} + \dot{u}^2 f_{u_2} + \dots + \dot{u}^n f_{u_n}$.

Следовательно, $\dot{\beta} \in \langle f_{\dot{u}^1}, \dots, f_{\dot{u}^n} \rangle = d_p f(\mathbb{R}^n)$.

Значит, $T_p f \subseteq d_p f(\mathbb{R}^n)$

Обратно, пусть $v \in d_p f(\mathbb{R}^n)$, т.е. $v = d_p f(u)$ для некоторого $u \in \mathbb{R}^n$.
Рассмотрим $\alpha(t) = p_0 + t \cdot u$. Тогда $\dot{\alpha} = u$ и
$v = \dot{\beta} = d_p f(\dot{\alpha}) = d_p f(u) \in d_p f(\mathbb{R}^n)$.

Следовательно, $d_p f(\mathbb{R}^n) \subseteq T_p f$.

Координаты касательного вектора в стандартном базисе касательного пространства

Определение

Векторы $f_{u^1}, f_{u^2}, \ldots, f_{u^n}$ образуют *стандартный базис* касательного пространства $T_p f$ в точке p (см.рис. 2).

Утверждение (о совпадении координинат касательного вектора в стандартном базисе касательного пространства и координат его прообраза в стандартном базисе)

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — поверхность, $\alpha : I \to U$, $\beta = f \circ \alpha$. Тогда

$$[\dot{\beta}]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = [\dot{\alpha}]_{e_1,\ldots,e_n}$$

(*Координаты касательного вектора в стандартном базисе касательного пространства совпадают с координатами его прообраза в стандартном базисе.*)

Доказательство

Пусть $\alpha : I \to U$ — гладкая кривая, $\alpha(t) = (u^1(t), u^2(t), \ldots, u^n(t))$. Тогда $\dot{\alpha}(t) = (\dot{u}^1, \dot{u}^2, \ldots, \dot{u}^n) = \dot{u}^1 e_1 + \dot{u}^2 e_2 + \ldots + \dot{u}^n e_n$.

Пусть также $\beta = f \circ \alpha$. Тогда $\dot{\beta} = d_p f(\dot{\alpha}) =$ [по утверждению о значении дифференциала от касательного вектора]$=$
$= \dot{u}^1 d_p f(e_1) + \dot{u}^2 d_p f(e_2) + \ldots + \dot{u}^n d_p f(e_n) = \dot{u}^1 f_{u_1} + \dot{u}^2 f_{u_2} + \ldots + \dot{u}^n f_{u_n}$.

Следовательно,
$$[\dot{\beta}]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = [\dot{\alpha}]_{e_1,\ldots,e_n}$$

Чтобы определить геометрию на поверхности (*внутреннюю геометрию на поверхности*), нужно в каждом касательном пространстве задать скалярное произведение.

Определение IФФ

Первой фундаментальной формой (IФФ) поверхности называется билинейная форма, определяемая равенством
$\mathrm{I}_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle\,;\ X, Y \in T_p f\,.$
Значение IФФ от касательных векторов — это скалярное произведение этих векторов в «объемлющем» поверхность пространстве.

Пусть $X = \dot{\beta},\ \beta = f \circ \alpha;\quad Y = \dot{\gamma},\ \gamma = f \circ \delta;\quad \alpha : I \to U;\ \delta : I \to U;$
$\alpha(t) = \left(u^1(t), \dots, u^n(t)\right),\ \dot{\alpha}(t) = (\dot{u}^1(t), \dots, \dot{u}^n(t));$
$\delta(t) = \left(v^1(t), \dots, v^n(t)\right);\ \dot{\delta}(t) = (\dot{v}^1(t), \dots, \dot{v}^n(t)).$

Получим явное представление IФФ.

По предыдущему утверждению
$X = \left[\dot{\beta}\right]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = [\dot{\alpha}]_{e_1,\ldots,e_n} = \left(\dot{u}^1, \ldots, \dot{u}^n\right)^T;$
$Y = [\dot{\gamma}]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = \left[\dot{\delta}\right]_{e_1,\ldots,e_n} = \left(\dot{v}^1, \ldots, \dot{v}^n\right)^T.$
Следовательно,
$\mathrm{I}_p(X, Y) = \langle X, Y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \dot{u}^i f_{u^i}, \sum_{j=1}^n \dot{v}^j f_{u^j} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \dot{u}^i \dot{v}^j \langle f_{u^i}, f_{u^j}\rangle =$
$\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\dot{u}^i\dot{v}^j$, где $g_{ij} = \langle f_{u^i}, f_{u^j}\rangle$.
Если обозначить $X = \dot{\beta}dt = d\beta$, $Y = \dot{\gamma}dt = d\gamma$,
то получим следующее представление IФФ

Формула вычисления IФФ

$\mathrm{I}_p(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}du^i dv^j = [X]^T(g_{ij})[Y]$ для
$X = [d\beta]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = [d\alpha]_{e_1,\ldots,e_n} = \left(du^1, \ldots, du^n\right)^T$
$Y = [d\gamma]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}} = [d\delta]_{e_1,\ldots,e_n} = \left(dv^1, \ldots, dv^n\right)^T$

Определение матрицы IФФ

Матрицей первой фундаментальной формы называется матрица $[\mathrm{I}_p] = (g_{ij})$. Матрица $[\mathrm{I}_p]$ есть матрица Грамма стандартного базиса касательного пространства в точке p.

Пусть β — кривая на поверхности f, т.е. $\beta = f \circ \alpha$, $\alpha : I \to U$ (см. рис.3).
Вычислим длину кривой β:

$$l[\beta] = \int_I |\dot{\beta}|\, dt = \int_I |d\beta| = \int_I \sqrt{\mathrm{I}_p\,(X, X)}$$

$[|d\beta| = |X| = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{\mathrm{I}_p(X, X)}]$.

Таким образом,

Вычисление длины кривой на поверхности

$l[\beta] = \int\limits_I \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, du^i du^j}$ где

$\alpha(t) = \left(u^1(t), \ldots, u^n(t)\right)^T, [d\alpha]_{e_1,\ldots,e_n} = \left(du^1, \ldots, du^n\right)^T = [d\beta]_{f_{u^1},\ldots,f_{u^n}}$

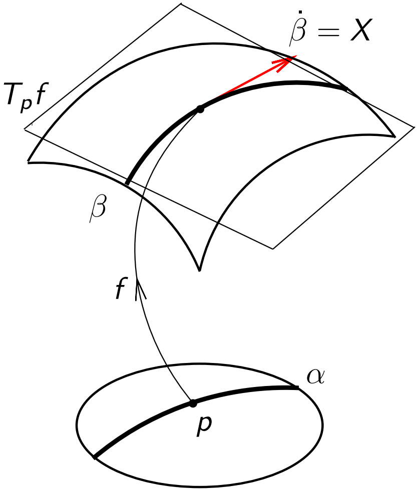


Рис.: 3

Пусть $X,\ Y \in T_p f$, т.е.
$X = d\beta_1,\ \beta_1 = f \circ \alpha_1;\quad Y = d\beta_2,\ \beta_2 = f \circ \alpha_2;\quad \alpha_1 : I \to U;\ \alpha_2 : I \to U;$

Тогда если φ — угол между касательными векторами X и Y, т.е. угол между кривыми β_1 и β_2 в точке $f(p)$, то

$$cos\varphi = \frac{\langle X, Y\rangle}{|X| \cdot |Y|}$$

В «координатном» представлении формула для вычисления угла между кривыми имеет вид

Формула для вычисления угла между кривыми на поверхности

$$\cos\varphi = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}du^i\, dv^j}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}du^i\, du^j}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}dv^i\, dv^j}},$$

где $[d\alpha_1]_{e_1,\dots,e_n} = [d\beta_1]_{f_{u^1},\dots,f_{u^n}} = (du^1,\dots,du^n)^T$
$[d\alpha_2]_{e_1,\dots,e_n} = [d\beta_2]_{f_{u^1},\dots,f_{u^n}} = (dv^1,\dots,dv^n)^T$

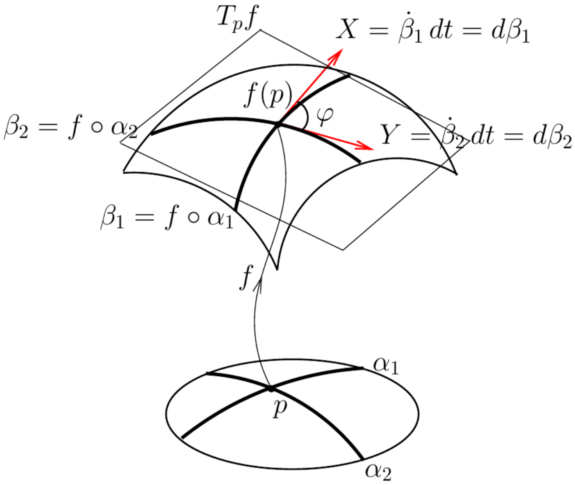

$T_p f$
$X = \dot\beta_1\,dt = d\beta_1$
$f(p)$
φ
$\beta_2 = f \circ \alpha_2$
$Y = \dot\beta_2\,dt = d\beta_2$
$\beta_1 = f \circ \alpha_1$
f
α_1
p
α_2

Рис.: 4

Формула для вычисления "объема"поверхности

Пусть $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — поверхность. Тогда её объем вычисляется по формуле

$$Vol(U) = \int\limits_U \sqrt{g(p)}\, du^1 \dots du^n,$$

где $g(p) = \det(g_{ij}(p))$.

Приведем некоторые рассуждения в обоснование определения объема поверхности.

Пусть множество U разбито гиперплоскостями на параллелотопы U_j на векторах $\Delta u^1 \mathbf{e}_1$, $\Delta u^2 \mathbf{e}_2$, $\Delta u^n \mathbf{e}_n$ (см. рис.5).

Тогда $f(U_j)$ — кусок поверхности, который мы (в соответствии с общей идеей дифференциальной геометрии) заменяем на параллелотоп в касательном пространстве $T_{p_j} f$, построенный на векторах

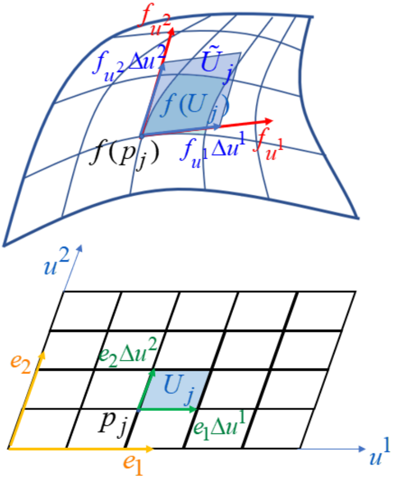
$$df_{p_j}(\Delta u^1 \mathbf{e}_1) = \Delta u^1 f_{u^1}(p_j),\ df_{p_j}(\Delta u^2 \mathbf{e}_2) = \Delta u^2 f_{u^2}(p_j), \ldots,$$
$$df_{p_j}(\Delta u^n \mathbf{e}_n) = \Delta u^n f_{u^n}(p_j).$$

Обозначим этот параллелотоп через $\tilde{U}_j$. Его объем $Vol[\tilde{U}_j] = \sqrt{g(p_j)}\Delta u^1 \ldots \Delta u^n$. Объем куска поверхности $Vol[f(U_j)]$ заменяем на $Vol[\tilde{U}_j]$.

Тогда объем всей поверхности

$Vol[f] \approx \sum\limits_j \sqrt{g(p_j)}\Delta u^1 \ldots \Delta u^n$ — интегральная сумма для

$$\int\limits_U \sqrt{g(u^1, u^2, \ldots, u^n)}du^1 du^2 \cdots du^n.$$



f_{u^2}
$f_{u^2}\Delta u^2$
$\tilde{U}_j$
$f(U_j)$
$f(p_j)$
$f_{u^1}\Delta u^1$
f_{u^1}
u^2
$e_2\Delta u^2$
e_2
U_j
p_j
$e_1\Delta u^1$
e_1
u^1

Рис.: 5

Пример. Сфера с центром в нуле радиуса R задается уравнением
$f(u,v) = (R\cos u\cos v,\ R\cos u\sin v,\ R\sin u)^T$, u — широта, v — долгота,
$U = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \times [0; 2\pi]$, (см. рис.6).

Частные производные (касательные векторы) и их векторное произведение (нормаль к поверхности):
$f_u = (-R\sin u\cos v,\ -R\sin u\sin v,\ R\cos u)$
$f_v = (-R\cos u\sin v,\ R\cos u\cos v,\ 0)$

$f_u \times f_v = \left(-R^2\cos^2 u\cos v,\ -R^2\cos^2 u\sin v,\ -R^2\sin u\cos u\right) =$
$= -R^2\cos u\,(\cos u\cos v,\ \cos u\sin v,\ \sin v) = -R^2\cos u\ = N.$

$f_u \parallel f_v \Leftrightarrow f_u \times f_v = \vec{0} \Leftrightarrow \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow f$ определяет гладкую поверхность везде, кроме полюсов.

Сфера, иллюстрация

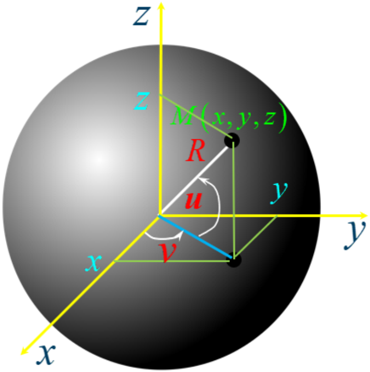


Рис.: 6

Коэффициенты и матрица IФФ:

$g_{11} = f_u^2 = R^2, \ g_{12} = g_{21} = \langle f_u, f_v \rangle = 0, \ g_{22} = f_v^2 = R^2 \cos^2 u$

$$[\mathrm{I}_p] = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u \end{pmatrix}$$

1) Найдем длину экватора, т.е. длину кривой $\beta(t) = f(\alpha(t))$, где $\alpha(t) = (0, t)^T$.

$[d\alpha]_{e_1, e_2} = [d\beta]_{f_u, f_v} = (0, dt)^T = (du, dv)^T$. Следовательно,

$$l[\beta] = \int_0^{2\pi} \sqrt{d\beta^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11} du^2 + 2 g_{12} du\, dv + g_{22} dv^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 dt^2} = 2\pi R.$$

2) Найдем угол между параллелью (β_2) и меридианом (β_1).

$\beta_1(\tau) = f(\alpha_1(\tau)),\ \alpha_1(\tau) = (\tau, v_0)^T$
$\beta_2(t) = f(\alpha_2(t)),\ \alpha_2(t) = (u_0, t)^T$
$[d\alpha_1]_{e_1,e_2} = [d\beta_1]_{f_u,f_v} = (d\tau, 0)^T$
$[d\alpha_2]_{e_1,e_2} = [d\beta_2]_{f_u,f_v} = (0, dt)^T,$
β_1 и β_2 пересекаются в точке $p = (u_0, v_0),\ t = v_0,\ \tau = u_0.$

Угол φ между параллелью и меридианом есть угол между $d\beta_1$ и $d\beta_2$:

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{I}_p(d\beta_1, d\beta_2)}{\sqrt{\mathrm{I}_p(d\beta_1, d\beta_1)}\sqrt{\mathrm{I}_p(d\beta_2, d\beta_2)}} =$$
$$\frac{g_{11}d\tau\cdot 0 + g_{12}(d\tau\cdot\ dt + 0\cdot 0) + g_{22}0\cdot dt}{\sqrt{g_{11}d\tau^2 + 2g_{12}d\tau\cdot 0 + g_{22}0^2}\sqrt{g_{11}0^2 + 2g_{12}\cdot 0\cdot dt + g_{22}dt^2}} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

3) Найдем площадь сферы.

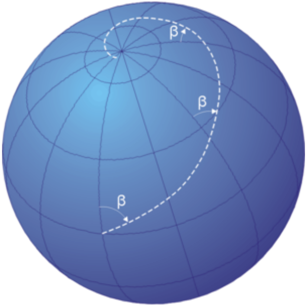
$$g = \det[\mathrm{I}_p] = R^4\cos^2 u, \ \sqrt{g} = R^2\cos u \Rightarrow Vol(f) = \iint\limits_U \sqrt{g}\, du\, dv =$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos u\, du\right) dv = \int\limits_0^{2\pi} 2R^2 du = 4\pi R^2.$$

Определение локсодромы

Локсодромой (от греч. loxos — косой и dromos — бег, путь) называется линия, которая пересекает все меридианы под постоянным углом (который называется локсодромическим, или путевым углом).

Введена в рассмотрение португальским математиком Нониусом в 1529 году.



4) Найдем локсодрому на сфере (см.рис.7).

$\beta_1(\tau) = f(\alpha_1(\tau)),\ \alpha_1(\tau) = (\tau, v_0)^T$ — меридиан.

Локсодрома: $\beta(t) = f(\alpha(t))$, где $\alpha(t) = (u(t), v(t))^T$ — искомая функция.

Имеем:

$$[d\beta_1]_{f_u, f_v} = [d\alpha_1]_{e_1, e_2} = (d\tau, 0)^T$$
$$[d\beta]_{f_u, f_v} = [d\alpha]_{e_1, e_2} = (du, dv)^T,$$

при этом должно выполняться условие $\widehat{d\beta_1,\ d\beta} = const = \varphi_0$.

$$\cos \widehat{d\beta_1,\ d\beta} = \cos\varphi_0 = \frac{\mathrm{I}_p(d\beta_1, d\beta)}{\sqrt{\mathrm{I}_p(d\beta_1, d\beta_1)}\sqrt{\mathrm{I}_p(d\beta, d\beta)}} =$$

$$\frac{R^2\, d\tau\, du}{\sqrt{R^2\, d\tau^2}\sqrt{R^2\, du^2 + R^2 \cos^2 u\, dv^2}} =$$

$$= \frac{du}{\sqrt{du^2 + \cos^2 u dv^2}} = \cos\varphi_0.$$

После возведения в квадрат получаем:

$$\cos^2 u \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\varphi_0}, \text{ или } \frac{dv}{du} = \pm\frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\cos u}.$$

Следовательно, $v = \pm \operatorname{tg}\varphi_0 \ln|\operatorname{tg}(u/2 + \pi/4)| + v_0$

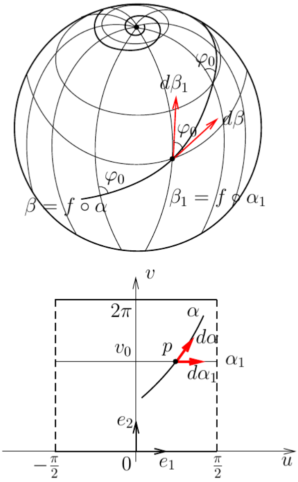

φ_0
$d\beta_1$
$d\beta$
φ_0
φ_0
$\beta = f \circ \alpha$
$\beta_1 = f \circ \alpha_1$
v
2π
α
$d\alpha$
v_0
p
α_1
$d\alpha_1$
e_2
$-\frac{\pi}{2}$
0
e_1
$\frac{\pi}{2}$
u

Рис.: 7

Рассмотрим поверхность вращения $f(u,v) = A[v]\alpha(u)$, где $A[v]$ — матрица поворота вокруг оси Oz на угол v, т.е.

$$A[v] = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))$ — профиль,
т.е. $f(u,v) = (x(u)\cos v,\ x(u)\sin v,\ z(v))$

Область U — открытый прямоугольник $I \times (-\pi, \pi)$.
Проверим, что f — действительно поверхность.

Вычисляем
$f_u = (\dot{x}\cos v, \dot{x}\sin v, \dot{z})$, $f_v = (-x\sin v, x\cos v, 0)$; отсюда
$f_u \times f_v = (-x\dot{z}\cos v, -x\dot{z}\cos v, x\dot{x})$ и $|f_u \times f_v|^2 = x^2(\dot{z}^2 + \dot{x}^2) = x^2|\dot{\alpha}|^2$.

Таким образом, f регулярна, если кривая α регулярна и не пересекает ось Oz. Координатную сеть образуют профили ($v = \mathrm{const}$) и окружности ($u = \mathrm{const}$) (см. рис.8).

Поверхность вращения (иллюстрация)

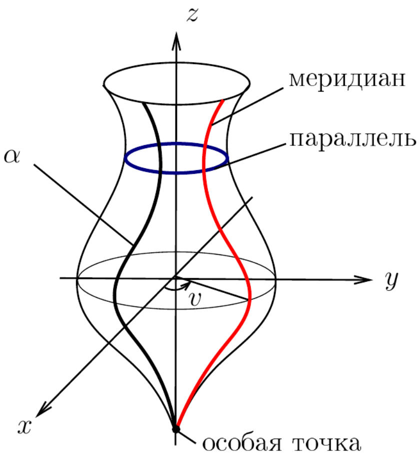


Рис.: 8

Определени

Гладкое отображение $f : U \longrightarrow V$ называется *диффеоморфизмом*, если существует отображение f^{-1}, являющееся гладким.

Наблюдение 1

При $n = m$ поверхность $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ является локальным диффеоморфизмом (f — гладкое и f^{-1} —гладкое в некоторой окрестности) области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ на некоторую область в пространстве $\mathbb{R}^n$. Такое отображение называется *заменой координат* или *заменой параметров*.

Наблюдение 2

При $n = 1$ поверхность $f : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ является гладкой регулярной кривой. Касательным пространством для нее является касательная прямая.

Определение тора

В дифференциальной геометрии *тором* называется декартово произведение двух сфер произвольных размерностей.

Простейший пример тора — декартово произведение двух одномерных окружностей $S_a^1 \times S_b^1$, вложенных в $\mathbb{R}^2$ радиусов $a > 0$ и $b > 0$ соответственно. Других ограничений на радиусы не налагается.

Параметризация этого тора получается из параметризаций сфер-окружностей $S_a^1 : \alpha(u) = (a\cos u, a\sin u)^T$ и $S_b^1 : \beta(v) = (b\cos v, b\sin v)^T$: $f(u, v) = (a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v)^T$, где $(u, v) \in U = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, т.е. область U — открытый квадрат. Таким образом, тор расположен в пространстве $\mathbb{R}^4$ и в пространстве меньшей размерности находиться не может.

Частные производные $f_u = (-a\sin u, a\cos u, 0, 0)^T$ и $f_v = (0, 0, b\sin v, b\cos v)^T$ в любой точке $(u, v) \in U$ отличны от нулевого вектора и ортогональны, так как $\langle f_u, f_v \rangle = 0$. Поэтому в каждой точке области U для f выполняется условие регулярности и тор является двумерной поверхностью, вложенной в четырехмерное пространство.

Тор. Иллюстрация

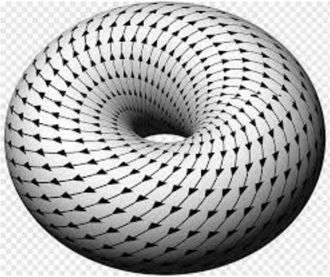


Рис.: 9

Определение тора-"бублика"

Поверхность вращения в трехмерном пространстве, полученная вращением окружности S_b^1 так, что ее центр движется по окружности S_a^1 $(a > b)$ и плоскость окружности S_b^1 всегда перпендикулярна окружности S_a^1, называется также *тор-бублик*.

Окружность S_b^1 в плоскости Oxz имеет параметризацию $\alpha(u) = {}^t(a + b\cos u, 0, b\sin u)$ — это профиль поверхности вращения. Тогда параметризация тора-бублика:

$$f(u, v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)^T$$

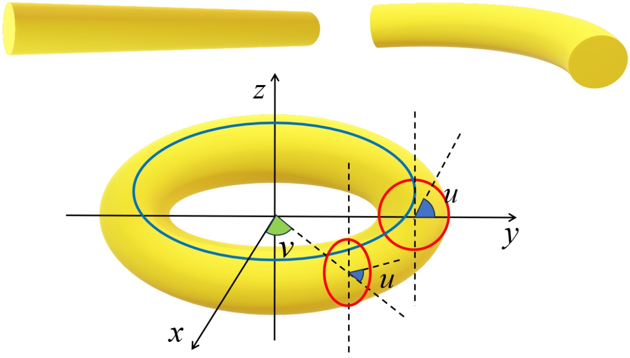


Рис.: 10

Задача

Найти параметризацию поверхности, полученной вращением трактрисы $\alpha(t) = a(\cos t + \ln \operatorname{tg} t/2, \sin t)^T$ вокруг ее асимптоты.

При такой параметризации асимптотой трактрисы является ось Ox. Перепараметризуем трактрису так, чтобы она располагалась в плоскости Oxz и ось Oz была ее асимптотой: $\beta(u) = a^t(\sin u, 0, \ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos u)$, $0 < u < \pi/2$. Вспомним матрицу оператора поворота на угол v относительно оси Oz: $A_v = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Получаем параметризацию псевдосферы:

$f(u, v) = A_v \cdot \beta(u) = a(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos u)^T$,
$0 < u < \pi/2$, $0 < v < 2\pi$.

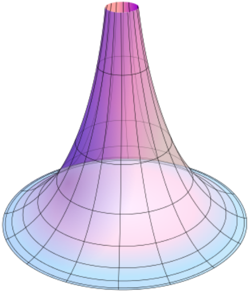


Рис.: 10

Изображение взято с **Сайта**