Дифференциальная геометрия
Тема 5
Кривые общего вида

А. Я. Овсянников, Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Компьютерная математика
(7 семестр)

Определение

Гладкая кривая $\alpha : I \to \mathbb{R}^m$ называется *кривой общего вида* (*кривой общего положения, сокр. КОП*), если все её производные $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)}$ линейно независимы на I.

При $m = 2$ плоская кривая общего вида является регулярной, при $m = 3$ пространственная кривая общего вида является *бирегулярной*.

Лемма

Пусть α — кривая общего вида и кривая β получается из кривой α заменой параметра или изометрией. Тогда β — кривая общего вида.

Пусть $\beta(t) = \alpha(\varphi(t))$, где $\dot\varphi(t) \neq 0$ для любого $t \in I$. Подсчитаем производные кривой β: $\dot\beta = \dot\alpha(\varphi)\dot\varphi$, $\ddot\beta = \ddot\alpha\dot\varphi^2 + \dot\alpha(\varphi)\ddot\varphi$, $\beta^{(3)} = \alpha^{(3)}\dot\varphi^3 + \dots$, $\beta^{(k)} = \alpha^{(k)}\dot\varphi^k + \dots$, $(k = 4, \dots, m-1)$. Следовательно, $(\dot\beta, \ddot\beta, \dots, \beta^{(m-1)}) = (\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m-1)})\boldsymbol{T}$, где

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \dot\varphi & \ddot\varphi & \dots & * \\ 0 & \dot\varphi^2 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dot\varphi^{m-1} \end{pmatrix}$$

.

Так как $\dot\varphi \neq 0$, матрица $\boldsymbol{T}$ невырожденная ($\det(T) = \dot\varphi^{\frac{m(m-1)}{2}}$) и потому векторы $(\dot\beta, \ddot\beta, \dots, \beta^{m-1})$ линейно независимы.

Заметим, что если $\dot\varphi > 0$ (кривые положительно эквивалентны), то система $(\dot\beta, \ddot\beta, \dots, \beta^{(m-1)})$ порождает один и тот же орфлаг, что и система $(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m-1)})$.

Пусть $\mathcal{A}$ — изометрия аффинного пространства $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{A}p = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\boldsymbol{x}$, где $x = p - p_0$, $\vec{\mathcal{A}}$ — ортогональный оператор. Пусть $\beta(t) = \mathcal{A}\alpha(t)$. Тогда $\dot\beta = \vec{\mathcal{A}}\dot\alpha$, и аналогично $\ddot\beta = \vec{\mathcal{A}}\ddot\alpha$, ..., $\beta^{(m-1)} = \vec{\mathcal{A}}\alpha^{(m-1)}$. Так как $\vec{\mathcal{A}}$ — ортогональный оператор (а значит, невырожденный, с нулевым ядром) и векторы $\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m-1)}$ линейно независимы, векторы $\dot\beta, \ddot\beta, \dots, \beta^{(m-1)}$ также линейно независимы.

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида.

Определение

Репером Френе кривой $\alpha(t)$ называется подвижный репер $\{(\alpha(t); \boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \ldots, \boldsymbol{E}_m)(t) | t \in I\}$ вдоль α такой, что
1) в любой момент $t \in I$ векторы $\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \ldots, \boldsymbol{E}_m(t)$ образуют ортонормированный базис;
2) в любой момент $t \in I$ векторы $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(m-1)}$ и $\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \ldots, \boldsymbol{E}_{m-1}(t)$ порождают один и тот же орфлаг;
3) в любой момент $t \in I$ базис $\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \ldots, \boldsymbol{E}_m(t)$ положительно ориентирован.

Теорема Френе

Для любой кривой общего вида $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ существует единственный репер Френе.

Доказательство следует из процесса ортогонализации Грама-Шмидта и того, что $E_n = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_{n-1}$

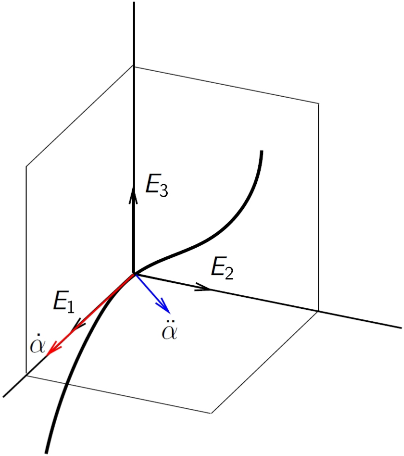


Рис.: 4

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — кривая общего вида, т.е. бирегулярная. Векторы репера Френе традиционно обозначаются так: $\boldsymbol{E}_1 = \vec{\tau}$ (*вектор касательной*), $\boldsymbol{E}_2 = \vec{\nu}$ (*вектор нормали*), $\boldsymbol{E}_3 = \vec{\beta}$ (*вектор бинормали*).

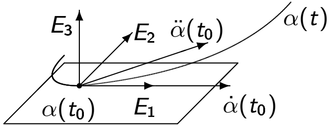


Рис. 1

Сначала заметим, что $E_1 = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}$. Для построения репера Френе заметим, что $\mathcal{L}(E_1, E_2) = \mathcal{L}(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ и в этом подпространстве базисы (E_1, E_2) и $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ имеют одинаковую ориентацию (см. рис. 1). Поэтому можно применить процесс ортогонализации Грама–Шмидта к системе $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$. Однако проще оказывается поступить следующим образом. Из условия $E_3 \perp \mathcal{L}(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ следует, что в качестве E_3 можно взять орт векторного произведения $\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}$, т.е. $\vec{E_3} = \dfrac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}$. Положим $\vec{E_2} = \vec{E_3} \times \vec{E_1}$. Тогда тройка E_1, E_2, E_3 будет положительно ориентированной, как и тройка $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, E_3$.

I способ

$$E_1 = \frac{\dot\alpha}{|\dot\alpha|}$$

$$E_2 = \frac{b_2}{|b_2|};\ \ b_2 = \ddot\alpha - \lambda E_1;\ \ \lambda = \langle \ddot\alpha, E_1 \rangle$$

$$E_3 = E_1 \times E_2$$

II способ

$$E_1 = \frac{\dot\alpha}{|\dot\alpha|}$$

$$E_3 = \frac{\dot\alpha \times \ddot\alpha}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}$$

$$E_2 = E_3 \times E_1$$

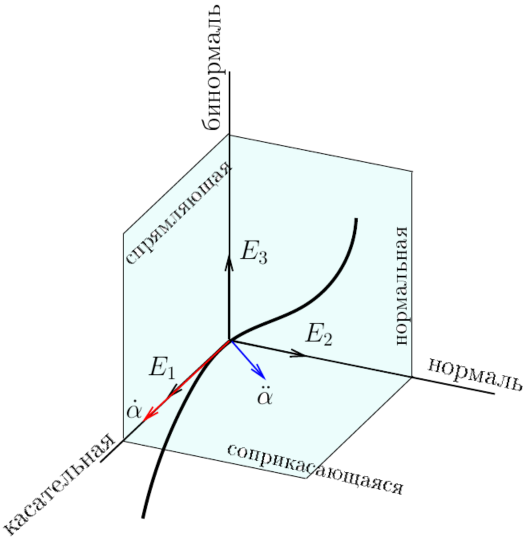
Определения

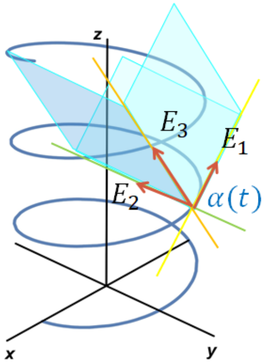
Сам репер Френе бирегулярной кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ часто называют *подвижным трехгранником* кривой $\alpha(t)$ или *естественным трехгранником*. Координатные плоскости репера Френе, проходящие через точку $\alpha(t)$, называются соответственно *соприкасающейся* (определяется векторами E_1 и E_2), *нормальной* (определяется векторами E_2 и E_3) и *спрямляющей* (определяется векторами E_1 и E_3).

Упражнение

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — бирегулярная кривая, $t_0, t_1, t_2 \in I$. Через три точки $\alpha(t_0)$, $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$ проведем “секущую"плоскость. Докажите, что соприкасающаяся плоскость в точке $\alpha(t_0)$ есть предельное положение этой секущей плоскости при $t_1 \to t_0$ и $t_2 \to t_0$.

Трехгранник Френе (иллюстация)





Параметризация винтовой линии: $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$

Каковы скорости базисных векторов репера Френе при движении репера вдоль кривой?

Теорема

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида, $\{(\alpha(t); \boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \dots, \boldsymbol{E}_m)(t) | t \in I\}$ — ее репер Френе. Тогда существует гладкие скалярные функции $k_1, \dots, k_{m-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ такие что при всех $t \in I$ выполнены следующие условия:

$$1) \begin{cases} \dot{\alpha} = |\dot{\alpha}| \boldsymbol{E}_1, \\ \dot{\boldsymbol{E}}_1 = |\dot{\alpha}| k_1 \boldsymbol{E}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\boldsymbol{E}}_i = |\dot{\alpha}|(-k_{i-1}\boldsymbol{E}_{i-1} + k_i \boldsymbol{E}_{i+1}) \ (i = 2, \dots, m-1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\boldsymbol{E}}_m = -|\dot{\alpha}| k_{m-1} \boldsymbol{E}_{m-1}. \end{cases}$$

2) $k_1(t) > 0,\ k_2(t) > 0, \dots, k_{m-2}(t) > 0$ и $k_i(t) = \dfrac{\langle \dot{\boldsymbol{E}}_i, \boldsymbol{E}_{i+1} \rangle}{|\dot{\alpha}(t)|}$

Выписанные только что формулы 1) называются *формулами Френе*. Функции $k_1, \dots, k_{m-1}$ называются *кривизнами* кривой α.

В матричной записи формулы Френе выглядят так:

$$(\dot{\boldsymbol{E}}_1, \dot{\boldsymbol{E}}_2, \dots, \dot{\boldsymbol{E}}_m) = \qquad (1)$$

$$= |\dot{\alpha}|(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \dots, \boldsymbol{E}_m) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{m-1} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \dots, \boldsymbol{E}_m)\overline{\boldsymbol{\omega}}(t).$$

Определение

Матрица $\overline{\boldsymbol{\omega}}(t)$ называется *матрицей кривизн*.

Матрица кривизн является матрицей перехода от ортонормированного базиса $(\boldsymbol{E}_1(t), \boldsymbol{E}_2(t), \dots, \boldsymbol{E}_m(t))$ к системе векторов производных $(\dot{E}_1(t), \dot{E}_2(t), \dots, \dot{E}_m(t))$ (которая не обязана быть базисом). Матрица кривизн является кососимметрической матрицей.

Теорема об инвариантности б.Френе и кривизн отн. замены параметра

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида, $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, ..., $\boldsymbol{E}_m$ — базис Френе, k_1, k_2, ..., k_m — кривизны α. Если $\varphi : J \longrightarrow I$ — замена параметра, сохраняющая ориентацию ($\dot\varphi(\theta) > 0$ при всех $\theta \in J$), то $\beta = \alpha(\varphi(\theta))$ — кривая общего вида и базис Френе кривой β имеет вид $\tilde{\boldsymbol{E}}_1 = \boldsymbol{E}_1(\varphi(\theta))$, $\tilde{\boldsymbol{E}}_2 = \boldsymbol{E}_2(\varphi(\theta))$, ..., $\tilde{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{E}_m(\varphi(\theta))$, а ее кривизны равны соответственно $\tilde{k}_1 = k_1(\varphi(\theta))$, $\tilde{k}_2 = k_2(\varphi(\theta))$,..., $\tilde{k}_m = k_m(\varphi(\theta))$.

Так как $[\dot\beta, \ddot\beta, \dots, \beta^{(m-1)}] = [\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m-1)}] \begin{pmatrix} \dot\varphi & & & * \\ & \dot\varphi^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \dot\varphi^{m-1} \end{pmatrix}$,

векторы $[\dot\beta, \ddot\beta, \dots, \beta^{(m-1)}]$ в момент θ и $[\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m-1)}]$ в момент $t = \varphi(\theta)$ определяют один и тот же орфлаг. Поскольку первые $m-1$ векторов базиса Френе представляют собой ортонормированную систему, порождающую этот орфлаг, и такая система единственна, заключаем, что $\tilde{\boldsymbol{E}}_1 = \boldsymbol{E}_1(\varphi(\theta))$, $\tilde{\boldsymbol{E}}_2 = \boldsymbol{E}_2(\varphi(\theta))$, ..., $\tilde{\boldsymbol{E}}_{m-1} = \boldsymbol{E}_{m-1}(\varphi(\theta))$. Следовательно, $\tilde{\boldsymbol{E}}_m = \boldsymbol{E}_m(\varphi(\theta))$.

Так как $\dot{\varphi}(\theta) > 0$, на основании формул Френе имеем $\tilde{k}_i(\theta) = \dfrac{\langle \dot{\tilde{\boldsymbol{E}}}_i, \tilde{\boldsymbol{E}}_{i+1} \rangle}{|\dot{\beta}(\theta)|} =$
$\dfrac{\langle \dot{\boldsymbol{E}}_i(\varphi(\theta))\dot{\varphi}(\theta), \boldsymbol{E}_{i+1}(\varphi(\theta)) \rangle}{|\dot{\alpha}(\varphi(\theta))\dot{\varphi}(\theta)|} = \dfrac{\dot{\varphi}(\theta)}{\dot{\varphi}(\theta)} \dfrac{\langle \dot{\boldsymbol{E}}_i(\varphi(\theta)), \boldsymbol{E}_{i+1}(\varphi(\theta)) \rangle}{|\dot{\alpha}(\varphi(\theta))|} = k_i(\varphi(\theta)).$

Теорема об инвариантности базиса Френе и кривизн относительно движения

Пусть $\mathcal{A}$ — движение в $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{A}p = p_0 + \vec{\mathcal{A}}(p - 0)$, $\det(\vec{\mathcal{A}}) = 1$, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида, $\tilde{\alpha} = \mathcal{A}\alpha$. Доказать, что $\tilde{\alpha}$ также является кривой общего вида, $\tilde{\boldsymbol{E}}_i = \vec{\mathcal{A}}\boldsymbol{E}_i$, $\tilde{k}_i = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Доказательство: упражнение (2б).

Теорема Жордана для плоскости

$$(\dot{E}_1, \dot{E}_2) = |\dot{\alpha}|(E_1, E_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k_1 \\ k_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{E}_1 = |\dot{\alpha}| k_1 E_2, \ \dot{E}_2 = -|\dot{\alpha}| k_1 E_1,$$

Теорема Жордана для трехмерного пространства

$$(\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{E}_3) = |\dot{\alpha}|(E_1, E_2, E_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \dot{E}_1 = |\dot{\alpha}| k_1 E_2, \\ \dot{E}_2 = |\dot{\alpha}|(-k_1 E_1 + k_3 E_3), \\ \dot{E}_3 = -|\dot{\alpha}| k_2 E_2, \end{cases}$$

Теорема

Пусть α — КОП. Тогда
$$k_1 = \frac{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3}$$
$$k_2 = \frac{\det[\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha]}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2}$$

Доказательство.

Поскольку кривизны инвариантны относительно замены параметра, то можно считать, что β — К1С. Тогда
$\dot\alpha = E_1,\ \ddot\alpha = \dot E_1 = k_1\, E_2,\ |\dot\alpha| = 1 \Rightarrow \dot\alpha \times \ddot\alpha = k_1\, E_1 \times E_2 = k_1\, E_3,\ |\dot\alpha \times \ddot\alpha| = k_1.$
$\dddot\alpha = \dot k_1\, E_2 + k_1\, \dot E_2 = \dot k_1\, E_2 + k_1\,(-k_1\, E_1 + k_2\, E_3) = -k_1^2\, E_1 + \dot k_1\, E_2 + k_1\, k_2\, E_3.$
$$(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha) = (\dot\alpha \times \ddot\alpha, \dddot\alpha) = k_1^2\, k_2 \Rightarrow k_2 = \frac{(\dot\alpha \times \ddot\alpha, \dddot\alpha)}{k_1^2} = \frac{(\dot\alpha \times \ddot\alpha, \dddot\alpha)}{(\dot\alpha \times \ddot\alpha)^2} =$$
$$= \frac{\det[\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha]}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2}.$$

Теорема об изометричности кривых с одинаковыми кривизнами и абсолютными скоростями

Пусть $\alpha, \tilde{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — две кривые общего вида, $|\dot{\alpha}| = |\dot{\tilde{\alpha}}|$, $\tilde{k}_i = k_i$, $i = 1, \dots, m-1$. Тогда существует такое движение $\mathcal{A}$ аффинного пространства $\mathbb{R}^m$, что $\tilde{\alpha} = \mathcal{A}\alpha$.

Без доказательства.

Теорема

Пусть I — интервал в $\mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{R}$, $k_1, \dots, k_{m-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, причем $k_1(s) > 0, \dots, k_{m-2}(s) > 0$ для любого $s \in I$. Тогда существует единственная кривая общего вида единичной скорости $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ такая что $\alpha(0) = (0, 0, \dots, 0)$, $(\boldsymbol{E}_1(0), \boldsymbol{E}_2(0), \dots, \boldsymbol{E}_m(0)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_m)$, $k_1, \dots, k_{m-1}$ — кривизны кривой α.

Без доказательства.

Теорема

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида. Тогда следующие условия эквивалентны:
(1) образ α лежит в некоторой гиперплоскости;
(2) $\det([\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m)}]) \equiv 0$;
(3) $k_{m-1} \equiv 0$.

Теорема в случае трехмерного пространства

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ —бирегулярная кривая. Тогда следующие условия эквивалентны:
(1) образ α лежит в некоторой гиперплоскости;
(2) $\det([\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha]) \equiv 0$;
(3) $k_2 \equiv 0$.

Докажем, что из (1) следует (2). Пусть $\langle q - p_0, \boldsymbol{n}\rangle = 0$ — уравнение плоскости, содержащей образ кривой α. В качестве p_0 может быть взята любая точка плоскости. Пусть $p_0 = \alpha(t_0)$ для некоторого $t_0 \in I$. Имеем $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \boldsymbol{n}\rangle \equiv 0$. Дифференцируем это равенство:
$\langle \dot\alpha, \boldsymbol{n}\rangle \equiv 0$, $\langle \ddot\alpha, \boldsymbol{n}\rangle \equiv 0$, $\langle \dddot\alpha, \boldsymbol{n}\rangle \equiv 0$.
Следовательно, $\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha \in \langle \boldsymbol{n}\rangle^{\perp}$. Так как $\dim\langle \boldsymbol{n}\rangle^{\perp} = 2$, векторы $\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha$ линейно зависимы, и потому $\det([\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha]) \equiv 0$.

Из (2) следует (3) в силу формулы (2) вычисления кривизны k_2 (кручения) для трехмерного пространства (см.рис.3).

Докажем, что из (3) следует (1). Из последнего уравнения Френе $\dot{\boldsymbol{E}}_3 = -|\dot\alpha| k_2 \boldsymbol{E}_2$ в силу условия $k_2 \equiv 0$ получаем $\dot{\boldsymbol{E}}_3 \equiv 0$, т.е. $\boldsymbol{E}_3(t) = \mathrm{const}$.
Имеем $\dot\alpha \parallel \boldsymbol{E}_1$, поэтому $\langle \dot\alpha, \boldsymbol{E}_3\rangle = 0$.
Интегрируя, получаем $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \boldsymbol{E}_3\rangle = \mathrm{const}$. При $t = t_0$ скалярное произведение равно 0. Следовательно, образ кривой α лежит в гиперплоскости $\langle p - \alpha(t_0), \boldsymbol{E}_3\rangle = 0$. (см.рис.4).

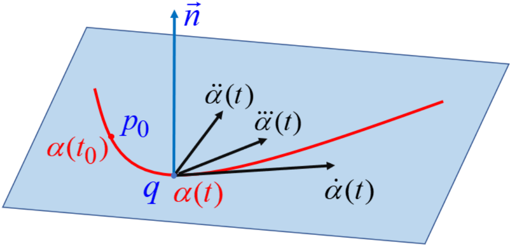

$\vec{n}$
$\ddot{\alpha}(t)$
$\dddot{\alpha}(t)$
p_0
$\alpha(t_0)$
q
$\alpha(t)$
$\dot{\alpha}(t)$

Рис.: 3

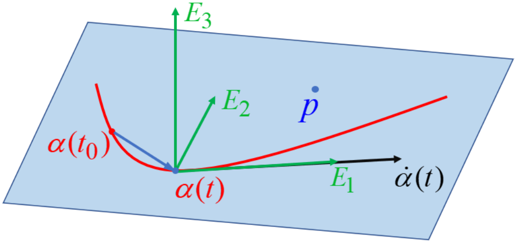
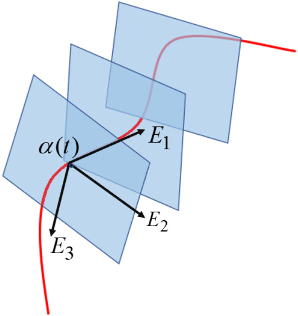


Рис.: 4

Для кривой единичной скорости 1) $\dot{E}_1 = k_1 E_2 \Rightarrow |\dot{E}_1| = |k_1| = k_1$ — скорость вращения вектора E_1, т.е. скорость вращения нормальной плоскости;



2) Аналогично, $|\dot{E}_3| = |k_2|$ — скорость вращения вектора E_3, т.е. скорость вращения соприкасающейся плоскости;