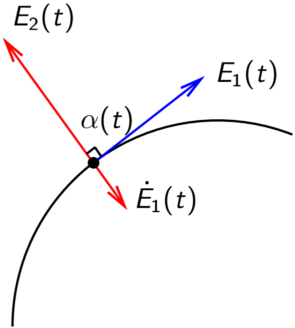
Дифференциальная геометрия
Тема 4
Репер Френе плоской кривой. Кривизна кривой

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Компьютерная математика
(7 семестр)

Пусть задана плоская регулярная кривая $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$.
Обозначим $E_1(t) = \frac{\dot\alpha(t)}{|\dot\alpha(t)|}$; $E_2(t) = J(E_1(t))$,
где $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот плоскости на $\frac{\pi}{2}$.



Определение

Базисом Френе называется ОНБ,
образованный векторами $(E_1(t), E_2(t))$; $(\alpha(t), E_1(t), E_2(t))$ — *репер Френе*.

Вектор-функции $E_1(t), E_2(t)$ — гладкие, причем
$|E_1(t)| \equiv 1 \Rightarrow E_1^2 \equiv 1 \Rightarrow 2\langle E_1, \dot{E_2}\rangle \equiv 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow E_1(t) \perp \dot{E_1}(t) \Rightarrow \dot{E_1}(t) \parallel E_2(t) \Rightarrow \dot{E_1}(t) = \lambda(t)E_2(t) \Rightarrow$
$\lambda(t) = \langle \dot{E_1}(t), E_2(t)\rangle$ — гладкая функция.

Определение

.
Кривизной кривой α в момент времени t (в точке $\alpha(t)$) называется:

$$k(t) = \frac{\lambda(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} = \frac{\langle \dot{E_1}, E_2\rangle}{|\dot{\alpha}|}$$

Теорема (уравнения Френе)

Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ — плоская регулярная кривая и $(E_1(t), E_2(t))$ — её базис Френе. Тогда:

1. $\dot{E}_1(t) = |\dot{\alpha}(t)| \cdot k(t) \cdot E_2(t)$
2. $\dot{E}_2(t) = -|\dot{\alpha}(t)| \cdot k(t) \cdot E_1(t)$
3. $k(t) = \frac{\det[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)]}{|\dot{\alpha}(t)|^3}$

Уравнения 1 и 2 называются *уравнениями Френе*.

Доказательство.

1. $\dot{E}_1 = \lambda E_2 = |\dot{\alpha}| \; k \, E_2$ (по определению).
2. $E_2 = J(E_1) = [J] \, E_1 \Rightarrow \dot{E}_2 = [J] \, |\dot{\alpha}| \; k \, E_2 = |\dot{\alpha}| \; k \; [J] \; E_2 = |\dot{\alpha}| \; k \, J(E_2) = -|\dot{\alpha}| \; k \, E_1$.
3. $\dot{\alpha} = |\dot{\alpha}| \; E_1 \Rightarrow \ddot{\alpha} = |\dot{\alpha}|^{\cdot} \; E_1 + |\dot{\alpha}|^2 \; k \, E_2 \Rightarrow \det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}] = |\dot{\alpha}|^3 \; k$.

Утверждение(об инвариантности базиса Френе и кривизны относительно положительной эквивалентности)

Базис Френе и кривизна инвариантна относительно положительной эквивалентности.
А именно, пусть $\beta(\theta) = \alpha(\varphi(\theta))$, где $t = \varphi(\theta)$ — строгая замена параметра ($\dot\varphi(\theta) > 0$). Тогда: если $\left(\tilde{E}_1(\theta), \tilde{E}_2(\theta)\right)$ — базис Френе кривой $\beta : J \to \mathbb{R}^2$; $\varphi(\theta) : J \to I$, то

$$\begin{gathered}\tilde{E}_1(\theta) = E_1(\varphi(\theta))\\ \tilde{E}_2(\theta) = E_2(\varphi(\theta))\\ k_\beta(\theta) = k_\alpha(\varphi(\theta))\end{gathered}$$

Доказательство. Очевидно, $\dot\beta(\theta) = \dot\alpha(\varphi(\theta)) \cdot \dot\varphi(\theta)$. Следовательно,

$$\tilde{E}_1(\theta) = \frac{\dot\beta(\theta)}{|\dot\beta(\theta)|} = \frac{\dot\alpha(\varphi(\theta)) \cdot \dot\varphi(\theta)}{|\dot\alpha(\varphi(\theta))| \cdot |\dot\varphi(\theta)|} = \frac{\dot\alpha(\varphi(\theta))}{|\dot\alpha(\varphi(\theta))|} = E_1(\varphi(\theta))$$

Из очевидного равенства $\ddot\beta(\theta) = \ddot\alpha(\theta)\dot\varphi(\theta)^2 + \dot\alpha(\theta)\ddot\varphi(\theta)$ и формулы 3 из теоремы (уравнения Френе) легко можно получить равенство $k_\beta(\theta) = k_\alpha(\varphi(\theta))$ (упражнение, 1б)

Утверждение(об инвариантности базиса Френе и кривизны относительно движения).

Базис Френе и кривизна инвариантна относительно движения.
А именно, пусть $\beta(t) = \mathcal{A}(\alpha(t))$, где $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$; $t \in I$ - регулярная кривая, $\mathcal{A}(p) = p_0 + A(\overrightarrow{Op})$ — движение, A — ортогональный оператор. Тогда если $(\tilde{E}_1(t), \tilde{E}_2(t)$ — базис Френе кривой β, то

$$\tilde{E}_1(t) = A(E_1(t))$$
$$\tilde{E}_2(t) = A(E_(t))$$
$$k_\beta(t) = k_\alpha(t)$$

<u>Доказательство.</u> Очевидно, $\beta(t) = p_0 + A(\alpha(t))$, $\dot{\beta}(t) = A(\dot{\alpha}(t))$. Без ограничения общности, можно считать, что α — К1С. Следовательно, $|\dot{\alpha}(t)| = 1$ для любого $t \in I$ и $E_1(t) = \dot{\alpha}(t)$. Кроме того $|\dot{\beta}(t)| = |A(\dot{\alpha}(t))| = 1$ для любого $t \in I$ и $E_1(t) = \dot{\alpha}(t)$ (оператор A ортогональный и сохраняет длину векторов). Значит, $\tilde{E}_1(t) = \dot{\beta}(t) = A(\dot{\alpha}(t)) = A(E_1)$, $\tilde{E}_2(t) = J(\tilde{E}_1) = JA(E_1) = AJ(E_1) = A(E_2)$ (операторы A и J — операторы поворота).
Формулу $k_\beta(t) = k_\alpha(t)$ доказать самостоятельно (упражнение, 1б). При этом использовать то, что ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение.

Теорема (о натуральных уравнениях плоской кривой)

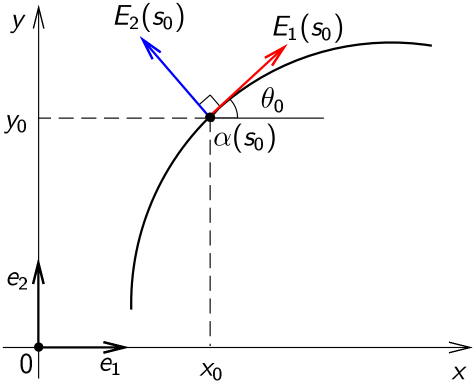
.
Пусть $k : I \to \mathbb{R}$ - некоторая гладкая функция. Тогда для любой точки $M(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ существует единственная К1С $\alpha = \alpha(s)$, $s \in I$ ($\widehat{\ }$ обозначает величину угла):

1. $k(s)$ — кривизна $\alpha(s)$;
2. $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$;
3. $\widehat{\dot{\alpha}(s_0)\, Ox} = \theta_0$ для $s_0 \in I$.

Доказательство.

Существование. По уравнениям Френе $\dot{E}_1 = k \cdot E_2 = k \cdot J E_1$, где J — матрица поворота на $\dfrac{\pi}{2}$. Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{E}_1 = k(s) J E_1 \\ E_1(0) = (\cos\theta_0, \sin\theta_0) \end{cases}$$

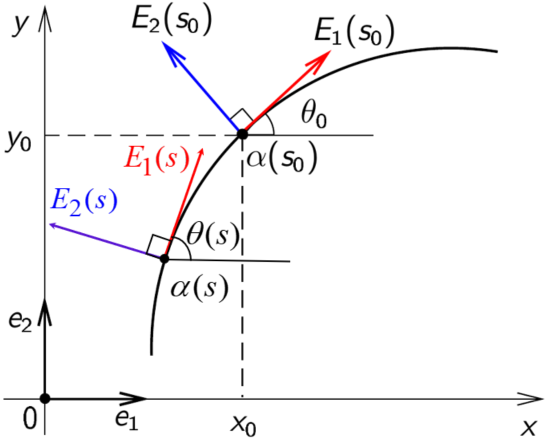


y
$E_2(s_0)$
$E_1(s_0)$
θ_0
y_0
$\alpha(s_0)$
e_2
0
e_1
x_0
x

Так как это система ЛДУ с непрерывными коэффициентами, то она имеет единственное решение при заданных начальных условиях. Следовательно, из равенства $\dot{\alpha}(s) = E_1(s)$ получаем, что существует и единственна кривая $\alpha(s) = \int\limits_{s_0}^{s} E_1(\xi)\, d\xi + \alpha(s_0)$.

Единственность. Можно доказать единственность и непосредственно используя формулы Френе. Пусть $\alpha(s)$ — описанная в теореме K1C, существование которой только что доказано, $(E_1(s), E_2(s))$ — базис Френе на этой кривой.

Введем функцию $\theta(s) = \widehat{E_1(s)\, Ox} = \widehat{\dot{\alpha}(s)\, Ox}$.
Тогда $E_1(s) = \dot{\alpha}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)), E_2(s) = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s))$
$\dot{E}_1(s) = (-\sin\theta(s)\cdot\dot{\theta}(s), \cos\theta(s)\cdot\dot{\theta}(s)) = \dot{\theta}(s)\cdot E_2(s)$
$\dot{E}_1(s) = |\dot{\alpha}(s)|\cdot k(s)\cdot E_2(s) = k(s)\cdot E_2(s) \Rightarrow k(s) = \dot{\theta}(s),\ E_1 = \dot{\alpha} = (\cos\theta, \sin\theta);\ \dot{\alpha} = (\dot{x}, \dot{y})$


y
$E_2(s_0)$
$E_1(s_0)$
θ_0
y_0
$\alpha(s_0)$
$E_1(s)$
$E_2(s)$
$\theta(s)$
$\alpha(s)$
e_2
0
e_1
x_0
x

Следствия.

Следовательно, получаем следующие равенства (натуральные уравнения кривой):

Натуральные уравнения кривой

1. $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(s)\, ds + \theta_0$
2. $x(s) = \int_{s_0}^{s} \cos\theta(s)\, ds + x_0$
3. $y(s) = \int_{s_0}^{s} \sin\theta(s)\, ds + y_0$,

которые определяют кривую однозначно.

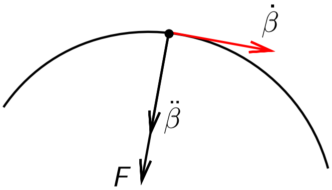


Рис.: 1

1) Геометрический смысл кривизны. Кривизна К1С — это угловая скорость поворота касательной: $k(s) = \dot{\theta}(s)$, где $\theta(s) = \widehat{E_1(s)\,Ox}$.

2) Механический смысл кривизны. Абсолютное значение кривизны К1С равно модулю центростремительного ускорения: $|k(s)| = |\ddot{\beta}(s)|$. (см. рис.1)
$\dot{E}_1 = \ddot{\beta} \Rightarrow \left|\dot{E}_1\right| = |k\,E_2| = |k| = |\ddot{\beta}|$.

Чем больше значение центростремительной силы, которая действует на материальную точку, движущуюся по кривой с единичной скоростью, тем больше значение центростремительного ускорения и тем больше кривизна кривой (траектории движения точки).

Пример 1. Найдем кривую с постоянной ненулевой кривизной.

$k \equiv k_0 \neq 0,\ M_0(x_0, y_0) = O(0,0),\ \theta_0 = 0,\ t_0 = 0.$
$\theta(s) = \int_0^s k\, ds + 0 = k \cdot s.$

$$\binom{x(s)}{y(s)} = \begin{pmatrix} \int\limits_0^s \cos(k\xi)\, d(\xi) \\ \int\limits_0^s \sin(k\xi)\, d(\xi) \end{pmatrix} = \frac{1}{k}\binom{\sin(ks)}{1-\cos(ks)}$$

$\sin(ks) = k \cdot x(s)$
$\cos(ks) = 1 - k \cdot y(s)$

$1 = \sin^2(ks) + \cos^2(ks) = k^2 \cdot x^2(s) + (1 - k \cdot y(s))^2 \quad \left(:\ k^2\right)$

$x^2 + \left(y - \frac{1}{k}\right)^2 = \dfrac{1}{k^2};\ r = \dfrac{1}{k} \Rightarrow x^2 + (y - r)^2 = r^2$ — окружность радиуса

$r = \dfrac{1}{k_0}$. (см.рис.2)

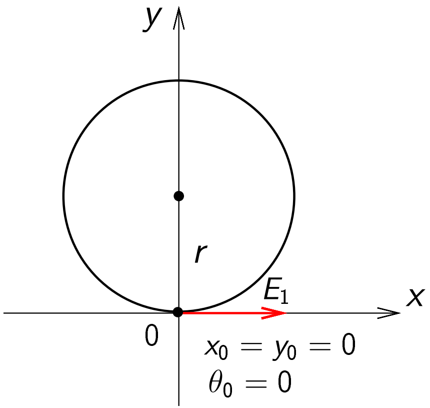


Рис.: 2

Теорема (о кривых с постоянной кривизной)

Пусть у кривой $\alpha(t)$ кривизна $k(t) \equiv k_0$.
Тогда

(1) если $k_0 = 0$, то $\alpha(I)$ лежит на прямой;

(2) если $k_0 \neq 0$, то $\alpha(I)$ лежит на окружности радиуса $R = \frac{1}{|k_0|}$ с центром $p_0 = \alpha(t) + \frac{1}{k_0} \cdot E_2(t)$

Справедливо и обратное: прямая имеет постоянную нулевую кривизну, а окружность — постоянную ненулевую.

1. Доказательство для прямой.

(1) $(\Rightarrow)$ $k(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{E}_1 = |\dot{\alpha}| \cdot k \cdot E_2 \equiv 0 \Rightarrow E_1 = \vec{a} = const \Rightarrow \alpha$ — кривая постоянного направления.
$(\Leftarrow)$ Пусть α — прямая. Тогда можно считать, что $O \in \alpha(I)$ и поэтому $\alpha \parallel \dot{\alpha} \Rightarrow \dot{\alpha} = \lambda(t)\alpha(t) \Rightarrow \ddot{\alpha} = \dot{\lambda} \cdot \alpha + \lambda \cdot \dot{\alpha} \parallel \alpha \Rightarrow k = \frac{\det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3} \equiv 0.$

2. Доказательство для окружности ($\Rightarrow$) — см. пример 1. Для доказательства обратного утверждения ($\Leftarrow$) перейдите к натуральной параметризации окружности и докажите во формуле вычисления кривизны, что кривизна окружности постоянна и обратно ее радиусу (упражнение, 16).

Определение

Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ - гладкая бирегулярная кривая. *Радиусом кривизны* в момент времени t (в точке $\alpha(t)$) называется число $R(t) = \frac{1}{|k(t)|}$, а *центром кривизны* — точка $p(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot E_2(t)$.

Определение

Окружность с центром в центре кривизны кривой и радиусом равным радиусу кривизны называется *соприкасающейся окружностью* (см.рис. 3)

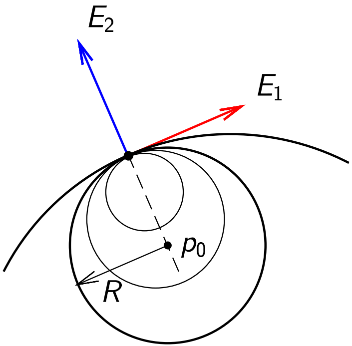


Рис.: 3

Теорема (о соприкасающейся окружности

Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ — бирегулярная кривая. Тогда

(1) соприкасающаяся окружность имеет в точке $\alpha(t)$ с кривой α касание не менее II порядка;

(2) среди всех окружностей касающихся кривой в точке $\alpha(t)$ соприкасающаяся имеет самый высокий порядок касания;

(3) в точке, где кривизна имеет локальный экстремум, соприкасающаяся окружность имеет с кривой порядок касания не менее, чем 3.

Таким образом, мы получаем ещё одну геометрическую интерпретацию кривизны. Величина, обратная к абсолютному значению кривизны в точке, — это радиус окружности, самой «близкой» к данной кривой в некоторой окрестности данной точки.

Пусть $\alpha(s), s \in (s_0, s_0 + \Delta s)$ — K1C,

$\alpha_\varepsilon(s)$ — кривая, полученная параллельным переносом точек образа кривой $\alpha(s)$ вдоль ее нормального вектора $E_2(s)$ на ε, т.е.

$$\alpha_\varepsilon(s) = \alpha(s) + \varepsilon E_2(s)$$

Пусть далее $l = l[\alpha]$, $l_\varepsilon = l[\alpha_\varepsilon]$. Поскольку α — K1C, $l = \Delta s$.

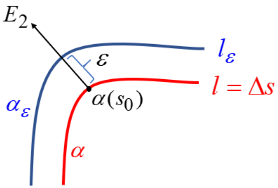
$\Delta l_\varepsilon = l - l_\varepsilon$ — абсолютное изменение длины;

$\delta_\varepsilon = \frac{\Delta l_\varepsilon}{l}$ — относительное изменение длины.

Теорема (упражнение, 3б)

$$k(s_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta l_\varepsilon}{\Delta\varepsilon\Delta s} = \frac{d\delta_\varepsilon}{d\varepsilon}$$

Абсолютное значение кривизны равно скорости относительного изменения длины кривой при параллельном перенесении ее вдоль нормали.



Определение

Пусть α - бирегулярная кривая. Множество центров кривизны этой кривой называется *эволютой* (от лат. evolvere развертывать) этой кривой.

Теорема (об эволюте) (рис. 4)

Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ — бирегулярная кривая с кривизной $k(t)$ и $\dot{k}(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. Тогда

(1) эволюта $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot E_2(t)$ является бирегулярной кривой;

(2) $\beta(t)$ — огибающая нормалей кривой $\alpha(t)$;

(3) длина отрезка эволюты равна модулю разности касательных к ней между ней и исходной кривой в соответствующих точках.

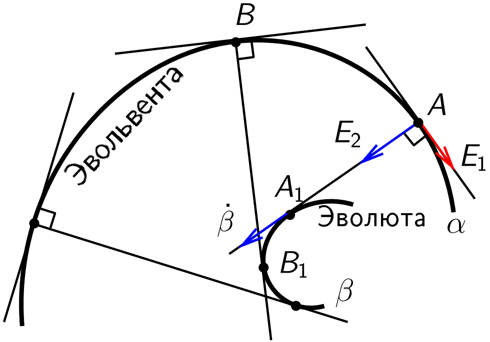


Рис.: 4

$$l[\smile A_1B_1] = BB_1 - AA_1 = R_1 - R_2$$
$$R_1 = |BB_1|, \ R_2 = |AA_1|$$

Доказательство.

1) $\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \cdot E_2(t)$; $(k(t) \neq 0)$ — гладкая;

$\dot{\beta} = \dot{\alpha} + \left(-\frac{\dot{k}}{k^2}\right) E_2 + \frac{1}{k}\left(-|\dot{\alpha}| k E_1\right) = -\frac{\dot{k}}{k^2} E_2$, $|\dot{\beta}| = \left|\frac{\dot{k}}{k^2}\right|$, $\dot{\beta} \parallel E_2$;

$\ddot{\beta} = \left(-\frac{\dot{k}}{k^2}\right)^{\bullet} E_2 + \left(-\frac{\dot{k}}{k^2}\right)(-k\dot{\alpha})\, E_1 \Rightarrow \ddot{\beta}$ не параллельна $\dot{\beta}$; $\dot{\beta} \neq \vec{0} \Rightarrow \beta$ — бирегулярная.

2) Нормаль к $\alpha(t)$ в момент времени t является касательной к $\beta(t)$. Следовательно, $\beta(t)$ — огибающая для нормали.

3)

$$l[\beta]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\beta}(t)|\, dt = \left[\dot{k} > 0\right] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\dot{k}}{k^2}\, dt = -\frac{1}{k}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{k(t_1)} - \frac{1}{k(t_2)} = R_1 - R_2.$$

Определение

Кривая α называется *эвольвентой* (от лат. evolvens — разворачивающий) для бирегулярной кривой β, если β — эволюта для α.

Теорема (об эвольвенте)

Пусть β — бирегулярная К1С. Тогда множество эвольвент для кривой β описывается следующим образом:

$$\alpha_C(s) = \beta(s) + (C - s)E_1^{\beta}(s)$$

Формулу для семейства эвольвент для данной кривой β демонстрирует рис.5.

$$\alpha_C(s) = \beta(s) - (s - C)E_1^\beta(s)$$

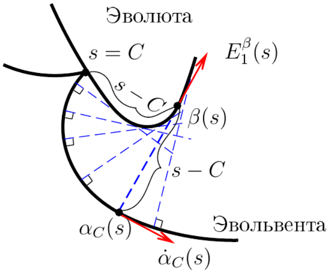


Рис.: 5

$\alpha_C(s)$ — регулярная кривая всюду, кроме точки $s = C$ (точка отрыва).