Дифференциальная геометрия
Тема 3
Гладкие линии на плоскости

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Компьютерная математика
(7 семестр)

Определение

Гладкая линия — образ некоторой гладкой регулярной кривой.

Обоснование.
1) График любой гладкой функции $y = f(x), x \in (a, b)$ — регулярная кривая.
2) Пусть $\alpha(I)$ — гладкая линия на плоскости: для любого $t \in I$
$\alpha(t) = (x(t), y(t)),\ \ t \in I;\ \ \dot{\alpha} = (\dot{x}, \dot{y}) \neq \vec{0}$.
Значит, для любой точки $t = t_0$ справедливо $\dot{x}(t_0) \neq 0$ или $\dot{y}(t_0) \neq 0$. Без ограничений общности будем считать, что
$\dot{y}(t_0) \neq 0 \Rightarrow \exists\, O(t_0) : \dot{y}(t) \neq 0,\ \forall t \in O(t_0) \Rightarrow y(t)$ строго монотонна в $O(t_0)$, т.е. существует обратная функция
$t = t(y) \Rightarrow x = x(t) = x(t(y)) = x(y)$. Таким образом, в $O(\alpha(t_0))$ линия — это график некоторой гладкой функции (без самопересечений)(см. рис.1).

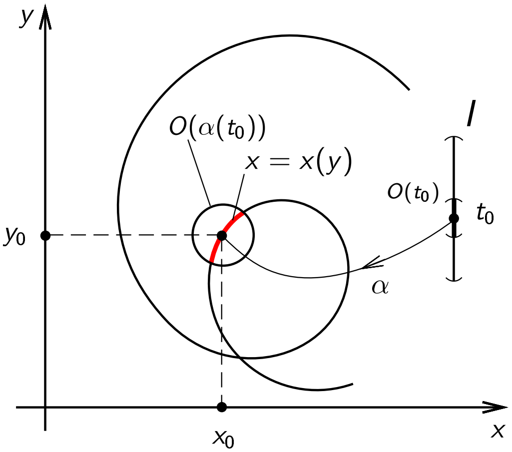


Рис.: 1

3) Любую регулярную кривую l можно задать уравнением $F(x,y)=0$, где F — гладкая функция, удовлетворяющая условию $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F \Big|_l \neq 0$, $l = F^{-1}(0)$. При этих условиях $\forall M_0 \in l \; \exists O(M_0)$: $F^{-1}(0) \cap O(M_0)$ — образ гладкой регулярной кривой.
Пусть $M_0 \in L$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F \Big|_{M_0} \neq \vec{0}$. Без ограничения общности будем считать, что $F'_y \neq 0$ в точке $M_0 = (x_0, y_0)$. Тогда по теореме о неявной функции существует такая окрестность $O(x_0)$, что для некоторой гладкой функции $y = y(x)$, определенной в $O(x_0)$, выполняется условие $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x)$. Пусть $\alpha(t) = (t, y(t))$, $t \in I = O(x_0)$ — гладкая регулярная кривая. Тогда $\exists O(M_0) : \; O(M_0) \cap F^{-1} = \alpha(I)$. (см.рис.2)

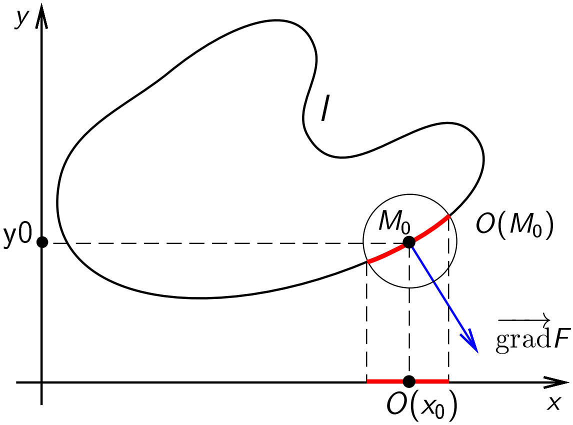


Рис.: 2

Явное задание кривой

$\alpha : I \to R^n$ - гладкая регулярная кривая, $l = \alpha(I)$ — линия,
$t_0 \in I$, $M_0 = \alpha(t_0)$ — точка на кривой l.

Уравнение касательной: $p = \alpha(t_0) + \dot{\alpha}(t_0)u$, $u \in \mathbb{R}$;

Уравнение нормали: $\langle q - \alpha(t_0), \dot{\alpha}(t_0) \rangle = 0$. (рис.3)

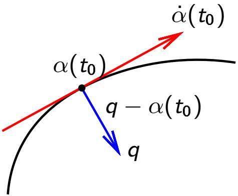


Рис.: 3

Пусть $l = F^{-1}(0)$ — гладкая кривая, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, где F — гладкая функция, $\vec{\mathrm{grad}} F \Big|_l \neq 0$.
Как показано выше, существует $O(M_0)$ т.ч. $l \cap O(M_0) = \alpha(I), \alpha : I \to \mathbb{R}^n$ — гладкая регулярная кривая.

Утверждение.

$\overrightarrow{\mathrm{grad} F}$ перпендикулярен касательной в любой точке линии $l = F^{-1}(0)$ (см.рис.4).

Доказательство. В обозначениях второго примера предыдущего пункта имеем:
$\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Вектор $\dot{\alpha}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0))$ параллелен касательной в точке $\alpha(t_0)$; $F(x(t), y(t)) \equiv 0$. Дифференцируем это равенство: $F_x \dot{x} + F_y' \dot{y} \equiv 0$. Значит, $\langle \mathrm{grad} F, \dot{\alpha} \rangle \Big|_{t=t_0} = 0$

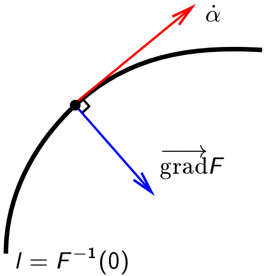
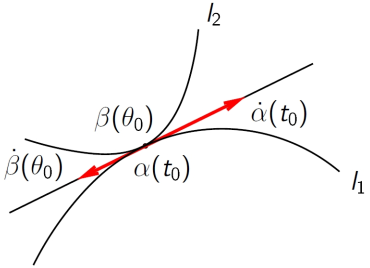


Рис.: 4

Определение.

Две гладкие линии *касаются* в точке пересечения, если в этой точке они имеют общую касательную.

Случай 1. *Явное задание обеих кривых.*
Пусть l_1 — образ кривой $\alpha(t)$; l_2 — образ кривой $\beta(\theta)$;
α, β — гладкие регулярные кривые.



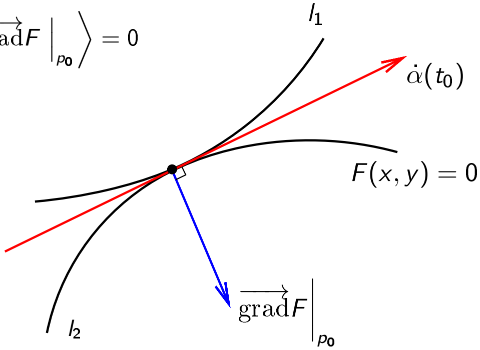
Условие касания:

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = \beta(\theta_0) \\ \dot\alpha(t_0) \parallel \dot\beta(\theta_0) \end{cases}$$

Случай 2. *Явное задание одной кривой и неявное задание другой.*
l_1 — образ гладкой регулярной кривой α,
F — гладкая функция, $l_2 = F^{-1}(0)$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} F \Big|_{l_2} \neq \vec{0}$.

Условия касания:

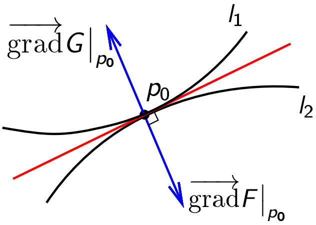
$$\begin{cases} \alpha(t_0) = p_0 \\ F(p_0) = 0 \\ \left\langle \dot{\alpha}(t_0), \overrightarrow{\mathrm{grad}} F \Big|_{p_0} \right\rangle = 0 \end{cases}$$



Случай 3. *Неявное задание обеих кривых.*
$l_1 = F^{-1}(0)$, $l_2 = G^{-1}(0)$, F, G — гладкие функции,
$\overrightarrow{\mathrm{grad}} F\big|_{l_1} \neq 0$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}} G\big|_{l_2} \neq 0$.

Условия касания:

$$\begin{cases} F(p_0) = G(p_0) = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}} F\ \Big|_{p_0} \parallel \overrightarrow{\mathrm{grad}} G\ \Big|_{p_0} \end{cases}$$



Пример. Доказать касание двух гладких линий (см.рис. 5)

$$l_1: \; y = \cos(x), \; l_2: \; y = 1 - x^2.$$

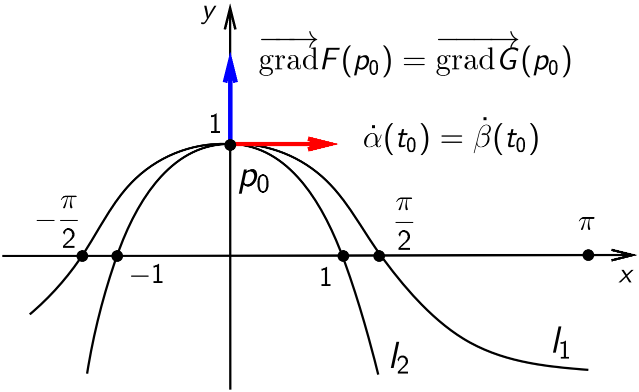


Рис.: 5

1) *Явное задание кривых.*
$\alpha(t)=(t,\cos(t)),\ \ \beta(\theta)=(\theta,1-\theta^2),\ \ p_0=(0,1),\ \ t_0=0,\ \ \theta_0=0,$
$\alpha(t_0)=\beta(\theta_0)=p_0,\ \ \dot\alpha(t_0)=\dot\beta(\theta_0)=(1,0),$
$\dot\alpha(t)=(1,-\sin(t)),\ \ \dot\beta(\theta)=(1,-2\theta),\ \ l_1$ и l_2 *касаются* в точке
$p_0=(0,1); x_0=0, y_0=1.$

2) *Смешанное задание кривых.*
$l_1:\alpha(t)=(t,\cos(t)),\ \ \ t_0=0,\ \ p_0=\alpha(t_0)=(0,1),$
$l_2: F(x,y)=x^2+y-1=0,\ \ F(p_0)=0,\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}F=(2x,1),\ \ \ \dot\alpha(t_0)=$
$(1,-\sin t_0)=(1,0),\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}F\Big|_{p_0}=(0,1).$

3) *Неявное задание кривых.*
$l_1:\ \ G(x,y)=y-\cos(x)=0,$
$l_2:\ \ F(x,y)=x^2+y-1=0,\ \ p_0=(0,1),\ \ G(p_0)=F(p_0)=0,$
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}G=(\sin x,1),\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}F=(2x,1).$
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}G(p_0)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}F(p_0)=(0,1).$

Пусть кривые заданы по случаю 2 (одна явно, другая — неявно) и выполняется условие их касания:

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = p_0, \;\; F(p_0) = 0 \\ \langle \dot{\alpha}(t_0), \overrightarrow{\mathrm{grad}} F \Big|_{p_0} \rangle = 0 \end{cases}$$

Введем функцию: $f(t) = F(\alpha(t)) = F(x(t), y(t))$. Тогда условие касания принимает вид:

$$\begin{cases} f(t_0) = 0 \\ f'(t_0) = F'_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + F'_y(x(t), y(t))\dot{y}(t) \Big|_{t=t_0} = \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} F \Big|_{p_0}, \dot{\alpha}(t_0) \rangle = 0 \end{cases}$$

Функция $f(t)$ характеризует меру отличия образа кривой $\alpha(t)$ от гладкой линии $L = F^{-1}(0), F(x, y) = 0$.

Определение.

Говорят, что линии l_1 и l_2 *имеют порядок касания* k в точке $p_0 \in l_1 \cap l_2$, если

$$0.\ f(t_0) = 0.$$

$$1.\ \dot{f}(t_0) = 0.$$

$$2.\ \ddot{f}(t_0) = 0.$$

$$3.\ \dddot{f}(t_0) = 0.$$

$$\vdots$$

$$k.\ f^{(k)}(t_0) = 0.$$

$$k+1.\ f^{(k+1)}(t_0) \neq 0.$$

Тогда по формуле Тейлора $f(t) = o((t - t_0)^k)$ в окрестности точки t_0.

Пример. Найти порядок касания двух гладких линий
$l_1: \ y = \cos(x), \ l_2: \ y = 1 - x^2$ в их точке касания (см. рис.5).

Решение. Рассмотрим случай *смешанного задания* кривых (слайд "Пример условия касания двух гладких линий")
$l_1: \alpha(t) = (t, \cos(t)), \ \ t_0 = 0, \ p_0 = \alpha(t_0) = (0, 1),$
$l_2: F(x, y) = x^2 + y - 1 = 0, \ \ F(p_0) = 0, \ \overrightarrow{\mathrm{grad}} F = (2x, 1), \quad \dot{\alpha}(t_0) = (1, -\sin t_0) = (1, 0), \ \overrightarrow{\mathrm{grad}} F\Big|_{p_0} = (0, 1).$

Тогда
$f(t) = F(\alpha(t)) = F(x(t), y(t)) = t^2 + \cos t - 1;$
$f(0) = 0;$
$f'(t) = F(\alpha(t)) = 2t - \sin t; \ f'(0) = 0;$
$f"(t) = F(\alpha(t)) = 2 - \cos t; \ f"(0) = 1 \neq 0;$

Следовательно, данные гладкие линии имеют в точке касания (0,1) касание первого порядка.

Определение.

Пусть C^t - семейство гладких линий, $t \in I$. Говорят, что гладкая линия C является *огибающей* семейства C^t, если

1. $C = \alpha(I), \alpha \ : \ I \to \mathbb{R}^2$ - гладкая регулярная кривая;
2. $\forall t \in I \ \left(C \text{ касается } C^t \text{ в точке } \alpha(t)\right)$ (см.рис.6)

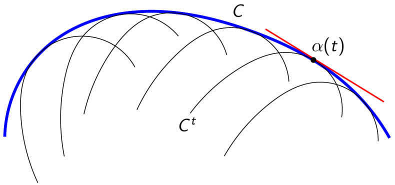


Рис.: 6

Утверждение.

Всякая регулярная гладкая кривая является огибающей для семейства своих касательных (см. рис.7).

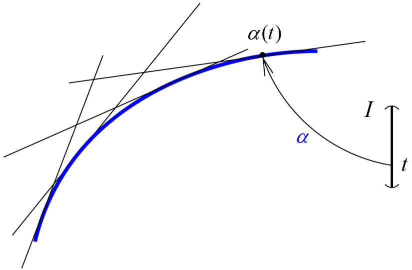


Рис.: 7

Теорема (необходимое условие огибающей)

Пусть C^t задается уравнением $F(x,y,t)=0,\ t\in I,\ F$ — гладкая функция; $\overrightarrow{\mathrm{grad}}F\,\big|_{C^t}\neq\vec{0},\ \forall t\in I$; и линия $C=\alpha(I)$ является огибающей семейства C^t, $\alpha(t)$ — гладкая регулярная линия. Тогда $\forall t\in I\ \forall(x,y)\in C\ [(x,y)=\alpha(t)]$ выполняются равенства

$$F(x,y,t)=0,\quad F_t(x,y,t)=0. \tag{1}$$

Доказательство.

Пусть $M(x,y)=\alpha(t)\in C,\ M\in C^t\Rightarrow$ выполняется первое равенство из (1)
$(*)\ \ F(x(t),y(t),t)\equiv 0$
$(x,y)=\alpha(t)=(x(t),y(t))$

Дифференцируем $(*)$ по t :
$F'_x(x(t),y(t),t)\,\dot{x}(t)+F'_y(x(t),y(t),t)\,\dot{y}(t)+F'_t(x(t),y(t),t)\equiv 0;$
$\langle\overrightarrow{\mathrm{grad}}F\,\big|_{\alpha(t)},\dot{\alpha}(t)\rangle=0\Rightarrow F'_t\,(x(t),y(t),t)\equiv 0.$

Определение

Множество точек (x, y), удовлетворяющих системе (1), называется *дискриминантой* семейства C_t.

Дискриминанта содержит не только точки огибающей, но и особые точки, точки самопересечения линий семейства и т.д.

Упражнение (26) (достаточное условие огибающей)

Если для любого $t \in I$ векторы $\overrightarrow{grad} F$ и $(\overrightarrow{grad} F)_t$ в точках решения системы (1) неколлинеарны, то система (1) определяет только огибающую.

<u>Указание</u> Использовать теорему о неявной функции.

Задача.
Найти огибающую семейства окружностей $(x-t)^2+y^2-R^2=0$, зависящих от одного параметра t.

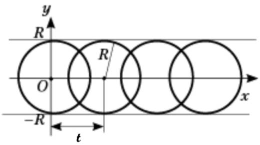


Рис.: 8

Изображение взято с **Сайта**

Решение.

$$F(x,y,t)=(x-t)^2+y^2-R^2=0 \tag{2}$$

$$F'_t(x,y,t)=-2(x-t)=0 \tag{3}$$

Из (3) следует, что $x=t$, подставим в (2), получим $y^2=R^2$, т.е. $y=\pm R$ - дискриминанта, которая, очевидно, является огибающей.

Задача (упражнение, 16). Найти огибающую траекторий снарядов, выпущенных из пушки со скоростью v_0 под различными углами α наклона ствола орудия к горизонту. Считать, что орудие находится в начале координат, а траектории снарядов лежат в плоскости XY (сопротивлением воздуха пренебречь) (см. рис.9).

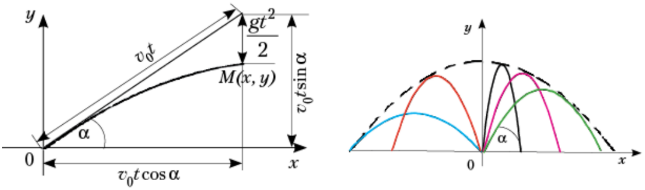


Рис.: 9

Изображение взято с **Сайта**