Дифференциальная геометрия
Тема 2
Кривые в аффинном пространстве
Предварительные сведения

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Компьютерная математика
(7 семестр)

Определение

Кривой в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$ называется отображение $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, где I — интервал, т.е. $\alpha(t) = v + x(t)$; $v \in \mathbb{R}^n$, $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функция. $\alpha(I)$ называется *образом кривой*, или *линией*.

$$\dot{\alpha}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t)$$

$\dot{\alpha}(t) \parallel$ касательной к кривой в данной точке.

Определение

Кривая $\alpha(t)$ называется *регулярной в точке* $t = t_0$, если $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$. Кривая называется *регулярной на* I, если она регулярна в каждой точке интервала I.

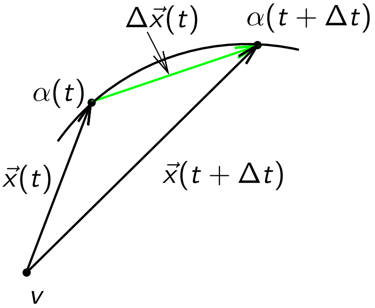

Рис. 1

Формула Тейлора

$$\alpha(t) = \alpha(t_0) + \frac{\dot{\alpha}(t_0)}{1!}(t - t_0) + \ldots + \frac{\alpha^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + o((t - t_0)^k)$$

$[\alpha(t) - \alpha(t_0) = x(t)]$

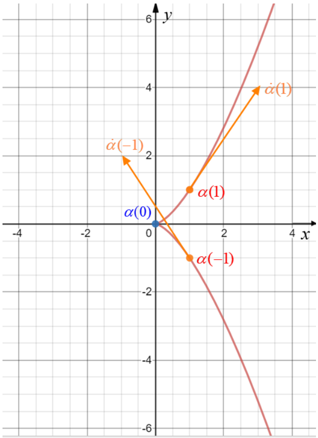

Рис.: 2

Рассмотрим пример. Пусть $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ — *полукубическая парабола* ($x^3 = y^2$, см. рис.2). Имеем $\dot\alpha(t) = (2t, 3t^2)$ и $\dot\alpha(0) = (0, 0)$. $\dot\alpha(\pm 1) = (\pm 2, 3)^T$, $\dot\alpha(0) = (0, 0)$.

Кривая регулярна везде, кроме точки $O(0, 0)$.

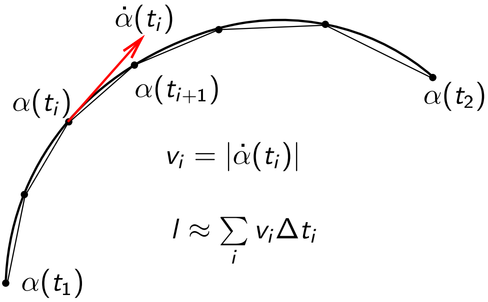

Рис.: 3

Длиной кривой $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, где $I = (a; b)$ называется число

$$l[\alpha]|_a^b = \int\limits_a^b |\dot\alpha(t)| dt$$

Действительно, тот факт, что длину кривой естественно определять именно так, можно проиллюстрировать следующими “наводящими соображениями". Рассмотрим разбиение σ отрезка $[a, b]$ диаметра $d(\sigma)$ и заменим кривую ломаной, составленной из отрезков в m с концами в точках $\alpha(t_i)$, $t_i \in \sigma$. Длина ломаной будет равна

$$\sum_{t_i \in \sigma} |\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)| = \sum_{t_i \in \sigma} \frac{|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)|}{\Delta t_i} \Delta t_i.$$

Последняя сумма может быть преобразована к интегральной сумме для $\displaystyle\int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt$.

В частности, на плоскости получается известная из математического анализа формула: если $\alpha(t) = (x(t), y(t))^T$ на отрезке $[a, b]$, то

Определение (эквивалентность кривых)

Пусть $\alpha(t), \beta(\tau)$ — кривые, $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $\beta : J \to \mathbb{R}^n$, I, J - интервалы. Будем говорить, что α *эквивалентна* (*положительно эквивалентна*) β, если существует такая функция $\varphi : J \xrightarrow{\text{на}} I$, что

1. φ — гладкая, $t = \varphi(\tau)$
2. φ — регулярная, т.е. $\dot{\varphi}(\tau) \neq 0$ $(\dot{\varphi}(\tau) > 0)$
3. $\beta(\tau) = \alpha(\varphi(\tau))$

$t = \varphi(\tau)$ — замена параметра (см.рис 4).

Оказывается, что каждое из введенных отношений является отношением эквивалентности на множестве всех гладких кривых. Рассмотрим пример. Пусть $I = (0, 1)$, $J = (0, 1)$, $= (0, 1)$. Рассмотрим кривые

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \alpha(t) = (t, t)^T;$$
$$\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \beta(\theta) = (\theta^3, \theta^3)^T;\ t = \varphi(\theta) = \theta^3$$
$$\gamma : K \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \gamma(u) = (1 - u, 1 - u)^T;\ t = \varphi(u) = 1 - u.$$

Все кривые регулярны, α положительно эквивалентна β $(t = \theta^3)$ и не является положительно эквивалентной γ $(t = 1 - u)$.

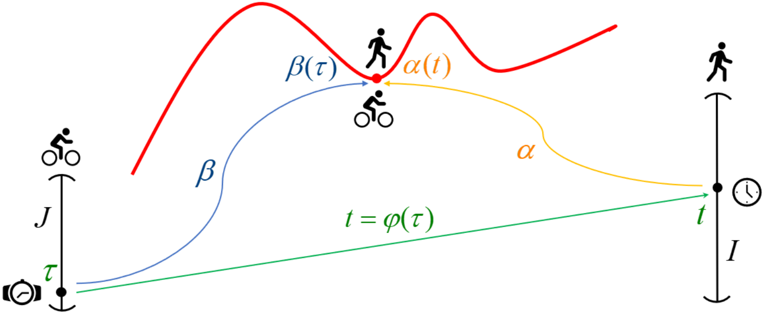

Рис.: 4

Утверждение.

Свойство *регулярности* и величина *длины кривой* инвариантны относительно эквивалентности кривых.

Доказательство

$$\dot{\beta}(t) = \dot{\alpha}(\varphi(\tau)) \cdot \dot{\varphi}(\tau) \Rightarrow \left[\dot{\beta}(\tau) \neq 0 \Leftrightarrow \dot{\alpha}(t) \neq 0\right].$$

$$l_1 = l[\alpha]\Big|_{t_1}^{t_2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\dot{\alpha}(t)|\, dt, \;\; l_2 = l[\beta]\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |\dot{\beta}(\tau)|\, d\tau = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |\dot{\alpha}(\varphi(\tau))| \cdot |\dot{\varphi}(\tau)|\, d\tau.$$

Так как $\dot{\varphi}(\tau)$ не меняет знак на J, без ограничения общности можно считать, что $\dot{\varphi}(\tau) > 0$ на J

$$\Rightarrow l_2 = \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} |\dot{\alpha}(\varphi(\tau))|\, d\varphi(\tau) = \left[\text{замена} \quad t = \varphi(\tau)\right] = l_1.$$

Утверждение.

Образы эквивалентных кривых *совпадают*, т.е. они «представляют» одну и ту же линию.

Определение.

Кривая $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ называется *кривой единичной скорости* (К1С), если $|\dot{\alpha}(t)| \equiv 1$ $(\forall t \in I)$.

Свойства К1С

Пусть $\alpha = \alpha(t)$ — К1С. Тогда

1. α — регулярная $\forall t \in I$;
2. $\ddot{\alpha} \perp \dot{\alpha}$ — ускорение всегда центростремительно;
3. Длина К1С от точки $\alpha(t_0)$ до $\alpha(t)$ равна $t - t_0$ $\left(l[\alpha] \Big|_{t_0}^{t} = t - t_0 \right)$

Доказательство

1. Очевидно.
2. Дифференцируем тождество $\dot{\alpha}^2 \equiv 1$ по t $\Rightarrow 2\langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle \equiv 0$.

Геометрический смысл:

К1С располагает интервал I в R^n как тонкую нерастяжимую нить.

Теорема(о положительной эквивалентности регулярной кривой и К1С).

Всякая регулярная кривая положительно эквивалентна К1С.

Доказательство

$\alpha : I \to \mathbb{R}^n, \alpha$ — регулярна на I, т.е $\dot{\alpha} \neq \vec{0}$, $s = l[\alpha] \Big|_{t_0}^{t} = \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(t)| dt = \psi(t)$ — *натуральная параметризация* (натуральная замена параметра).
$\dot{\psi}(t) = |\dot{\alpha}(t)| \neq \vec{0} \Rightarrow \psi(t) \nearrow$ на I, $\psi(t)$ - гладкая $\Rightarrow$ существует гладкая функция $t = \varphi(s)$, — обратная к $s = \psi(t)$; тогда
$\dot{\varphi}(s) = \frac{1}{\dot{\psi}(t)} = \frac{1}{|\dot{\alpha}(t)|} > 0$; $\varphi : J \to I; J = \psi(I)$ — интервал.
Пусть $\beta(s) = \alpha(t(s)) = \alpha(\varphi(s))$. Тогда $\alpha(t)$ и $\beta(s)$ положительно эквивалентны.
$\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}(\varphi(s)) \cdot \dot{\varphi}(s) = \frac{\dot{\alpha}(\varphi(s))}{|\dot{\alpha}(\varphi(s))|} = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} \Rightarrow |\dot{\beta}(s)| = \left| \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} \right| \equiv 1 \Rightarrow \beta(s)$ — К1С (см.рис.5).

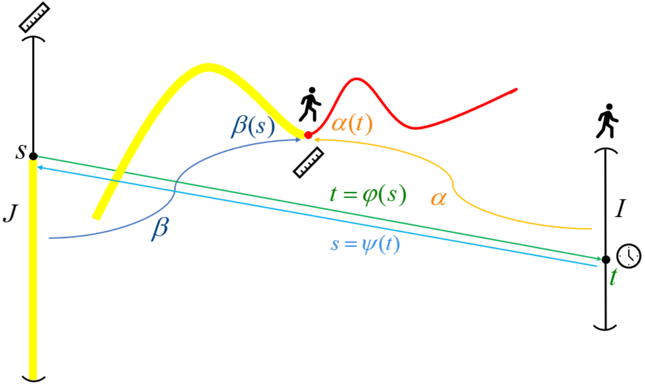

Рис.: 5

Пример.

$$\alpha(t) = p_0 + t \cdot \overrightarrow{v} \text{ — прямая}, \quad v = |\overrightarrow{v}|, \ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(t)|\, dt = \int\limits_{t_0}^{t} |\overrightarrow{v}|\, dt = v \cdot (t - t_0), \ t_0 = 0, \ s = v \cdot t = \psi(t) = s(t)$$

$$t = \frac{s}{v} = \varphi(s) = t(s), \ \beta(s) = \alpha(t(s)) = \alpha\left(\frac{s}{v}\right), \ \beta(s) = p_0 + \frac{s}{v} \cdot \overrightarrow{v}$$