Дифференциальная геометрия
Лекция 1
Аффинные простанства и аффинные преобразования

Ю. В. Нагребецкая

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Компьютерная математика
(7 семестр)

Литература

1. Сизый С.В. Лекции по дифференциальной геометрии. М. Физматлит 2007. 376 с.

2. Нагребецкая Ю.В., Перминова О.Е. Дифференциальная геометрия. Практикум. Екатеринбург, Изд-во УрФУ, 2017. 72 с.

3. Лекции-презентации Овсянникова А.Я. по курсу Дифференциальная геометрия и топология. **Ссылка здесь.**

Пусть $\mathbb{R}^n = \left\{ \left(x^1, \ldots, x^n \right)^T \mid x^i \in \mathbb{R} \right\}$ и $\overrightarrow{V}$ — векторное пространство, $\dim \overrightarrow{V} = n$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — базис в $\overrightarrow{V}$. Пространства $\overrightarrow{V}$ и $\mathbb{R}^n$ изоморфны; изоморфизм осуществляется посредством отображения $x \mapsto [x]_b$, где $[x]_b$ — столбец координат вектора x в базисе b, $x = b\,[x]_b = x^1 b_1 + \cdots + x^n b_n$.

Если $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — базисы, то $b = a\,T_{a \to b}$, где $T_{a \to b}$ — (невырожденная) матрица перехода, при этом $[x]_a = T_{a \to b}[x]_b$, $T_{b \to a} = T^{-1}_{a \to b}$.

Если $\mathcal{A}$ — линейный оператор, то $[\mathcal{A}]_b = ([\mathcal{A}b_1]_b, [\mathcal{A}b_2]_b, \ldots, [\mathcal{A}b_n]_b)$ — матрица этого оператора и тогда для любого $x \in \overrightarrow{V}$ выполняется

$$[\mathcal{A}x]_b = [\mathcal{A}]_b [x]_b.$$

При этом $[\mathcal{A}]_a = T_{a \to b}[\mathcal{A}]_b T^{-1}_{a \to b}$.

Определение

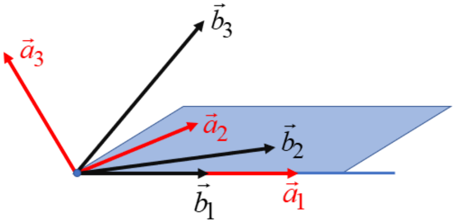
Если $\det T_{a\to b} > 0$, то говорят, что базисы a и b имеют *одинаковую ориентацию*.

Базис, b, имеющий со стандартным базисом $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, где e_i — строка, состоящая из нулей, кроме i-го места, где стоит 1, одну и ту же ориентацию, имеет *стандартную* ориентацию.

%pause
$\left(\overrightarrow{V},\ \langle,\rangle\right)$ — евклидово пространство, если $\langle,\rangle$ — скалярное произведение.
Если $b = (b_1, \dots, b_n)$ — базис в пространстве $\overrightarrow{V}$, то
$G_b = Gr(b_1, \dots, b_n) = (\langle b_i, b_j\rangle)$ — матрица Грама и
$\forall x, y \in \overrightarrow{V} \quad \langle x, y\rangle = [x]^T\ G_b\ [y]\,,\ |x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Если $a = (a_1, \dots, a_n)$ — другой базис пространства $\overrightarrow{V}$, то $G_a = T_{a\to b} G_b T_{b\to a} = T_{b\to a}^{-1} G_b T_{b\to a}$.

Определение

$\overrightarrow{V_1} < \overrightarrow{V_2} < \cdots < \overrightarrow{V_k}$ — *орфлаг, порожденный линейно независимой (ЛН) системой* $a = (a_1, \ldots, a_k)$, $a_j \in \overrightarrow{V}$, если $\overrightarrow{V_i} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_i \rangle$. ЛН системы $a = (a_1, \ldots, a_k)$, $b = (b_1, \ldots, b_k)$ порождают один и тот же орфлаг, если $\overrightarrow{V_i} = \langle a_1, \ldots, a_i \rangle = \langle b_1, \ldots, b_i \rangle$ и $(a_1, \ldots, a_i), (b_1, \ldots, b_i)$ имеют одну и ту же ориентацию для любого i

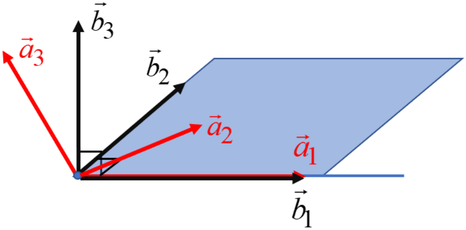


Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта

$\vec{b}_1 = \vec{b}_1$

$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \lambda_1 \vec{b}_1 \quad (\cdot \vec{b}_1)$

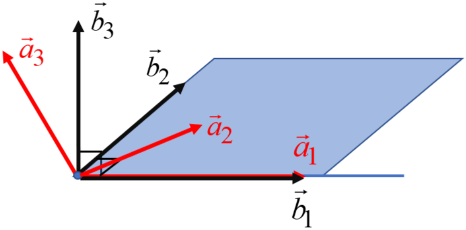
$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \mu_1 \vec{b}_1 - \mu_2 \vec{b}_2 \quad (\cdot \vec{b}_1, \cdot \vec{b}_2), \qquad \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ - ОНБ



В процессе ортогонализации Грамма-Шмидта получается ОНБ (ОБ), порождающий тот же орфлаг, что и исходный базис.

Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта

$\vec{b}_1 = \vec{b}_1$
$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \lambda_1 \vec{b}_1 \quad (\cdot \vec{b}_1)$
$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \mu_1 \vec{b}_1 - \mu_2 \vec{b}_2 \quad (\cdot \vec{b}_1, \cdot \vec{b}_2), \qquad \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ - ОНБ



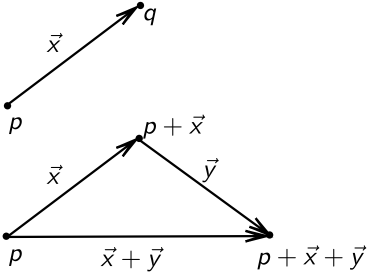
В процессе ортогонализации Грамма-Шмидта получается ОНБ (ОБ), порождающий тот же орфлаг, что и исходный базис.

Определение

$\left(V, \overrightarrow{V}, +\right)$ — *аффинное пространство*, если

1. $\forall p \in V\ \forall \vec{x} \in \overrightarrow{V}\ \exists! q \in V \quad p + \vec{x} = q$
2. $\forall p, q \in V\ \exists! \vec{x} \in \overrightarrow{V} \quad p + \vec{x} = q \quad (\vec{x} = \overrightarrow{pq} = q - p)$
3. $\forall p \in V\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \overrightarrow{V} \quad (p + \vec{x}) + \vec{y} = p + (\vec{x} + \vec{y})$

V — множество точек, $\overrightarrow{V}$ — множество векторов.



Аффинное подпространство

Если $\overrightarrow{V}$ — евклидово, то $\left(V, \overrightarrow{V}, +\right)$ — *евклидово аффинное пространство.*

Расстояние между точками p и q — это $|p - q| = |\overrightarrow{p\,q}|$.

Определение

Пусть $(W; \overrightarrow{W}; +)$ — аффинное пространство, где $W \subset V$, $\overrightarrow{W} \leq \overrightarrow{V}$. Тогда W — *аффинное подпространство* аффинного пространства V.

Утверждение

$(W; \overrightarrow{W}; +)$ — аффинное подпространство пространства V тогда и только тогда, когда $W = p_0 + \vec{W}$ для некоторой точки $p_0 \in V$.

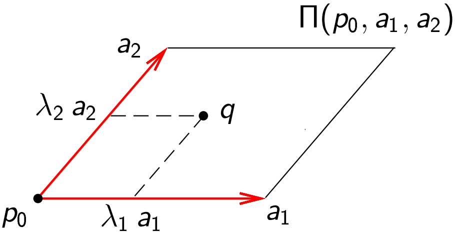
Пусть $\dim \overrightarrow{W} = k$, тогда $p_0 + \overrightarrow{W}$ — аффинное подпространство размерности k.

Определение

Множество

$$\Pi\,(p_0, a_1, \ldots, a_k) = \; = \{p_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k \mid \lambda_i \in [0,1]\}$$

— k-мерный *параллелотоп*, построенный на векторах $a_1, \ldots, a_k \in \overrightarrow{V}$, отложенный от точки $p_0 \in V$.



Его *объем* — это $\mathrm{Vol}\,(\Pi) = \sqrt{Gr\,(a_1, \ldots, a_k)}$.

Определение

Пусть $c_1, \dots, c_{n-1} \in V.$, $\dim V = n$. *Обобщенным векторным произведением* векторов $c_1, \dots, c_{n-1}$ называется вектор b, такой что

1. $b \perp c_i, \ i \in \{1, \dots, n-1\}$
2. $|b| = \mathrm{Vol}\,(\Pi\,(c_1, \dots, c_{n-1})) = \sqrt{Gr\,(c_1, \dots, c_{n-1})}$
3. $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, b)$ имеет стандартную ориентацию.

Вектор b существует и единственен, он обозначается $b = c_1 \times \dots \times c_{n-1}$ и вычисляется по формуле $b = \det\left([c_1], [c_2], \dots, [c_{n-1}], e\right)$, где $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$ — стандартный базис.

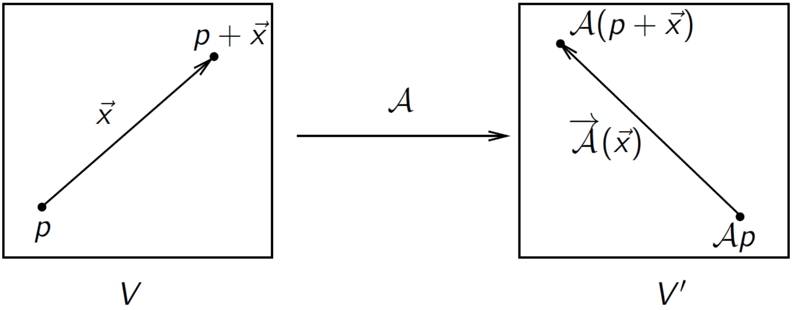
Определение

Пусть $\left(V, \overrightarrow{V}, +\right)$, $\left(V', \overrightarrow{V'}, +\right)$ — аффинные пространства. Отображение $\mathcal{A} : V \to V'$ называется *аффинным*, если

$$\forall p \in V \ \forall \vec{x} \in \overrightarrow{V} \quad \mathcal{A}\,(p + \vec{x}) = \mathcal{A}(p) + \overrightarrow{\mathcal{A}}\,(\vec{x})$$

для некоторого линейного отображения $\overrightarrow{\mathcal{A}} : \overrightarrow{V} \to \overrightarrow{V'}$.

$\mathcal{A}$ — *аффинный оператор*, если $V = V'$, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V'}$. Линейное отображение $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ в этом случае является линейным оператором.


$p + \vec{x}$
$\vec{x}$
p
V
$\mathcal{A}$
$\mathcal{A}(p + \vec{x})$
$\overrightarrow{\mathcal{A}}(\vec{x})$
$\mathcal{A}p$
V'

Пусть $\mathcal{A}$ — аффинный оператор. Везде далее мы будем предполагать, что оператор $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ обратим.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ — стандартный базис векторного пространства $\overrightarrow{V}$, $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0), (O, e_1, \dots, e_n)$ — стандартный репер аффинного пространства V. Координаты $[p]$ точки $p \in V$ в репере — это координаты вектора $[\overrightarrow{Op}]_e$ в базисе e. Тогда

$$[\mathcal{A}p] = [p_0] + [\overrightarrow{\mathcal{A}}]\,[p],$$

где $p_0 = \mathcal{A}(O)$ и $[\overrightarrow{\mathcal{A}}]$ — матрица линейного оператора $\overrightarrow{\mathcal{A}} : \overrightarrow{V} \to \overrightarrow{V}$ в базисе e. Действительно, $\mathcal{A}p = \mathcal{A}\left(O + \overrightarrow{Op}\right) = \mathcal{A}(O) + \overrightarrow{\mathcal{A}}\left(\overrightarrow{Op}\right)$

Упражнение (6б.)

Доказать, что любой аффинный оператор аффинного пространства $\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$

а) переводит прямую в прямую;

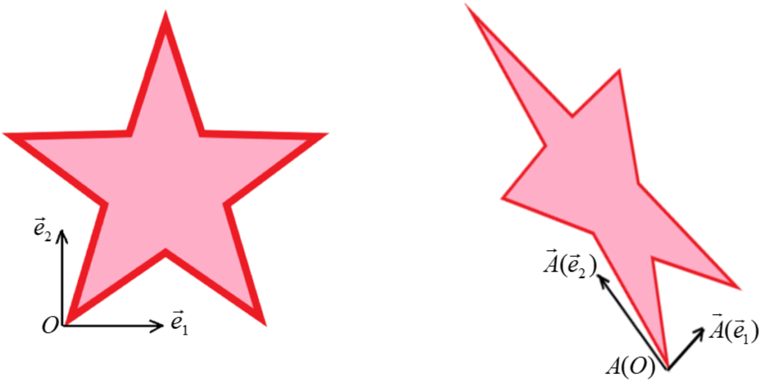
б) плоскость в плоскость;

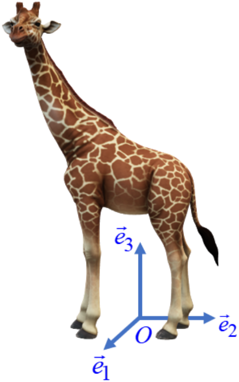
в) сохраняет параллельность прямых и плоскостей;

г) сохраняет отношение отрезков;

д) переводит регулярную кривую в регулярную кривую;

е) переводит поверхность в поверхность;


$\vec{e}_2$
O
$\vec{e}_1$
$\vec{A}(\vec{e}_2)$
$\vec{A}(\vec{e}_1)$
$A(O)$


$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
O
$\vec{e}_1$


$\vec{A}(\vec{e}_2)$
$\vec{A}(\vec{e}_3)$
$A(O)$
$\vec{A}(\vec{e}_1)$

Определение.

Отображение $\mathcal{A} : V \to V$ аффинного евклидова пространства V в себя называется *изометрией*, если $\forall p, q \in V \ |\mathcal{A}p - \mathcal{A}q| = |p - q|$.

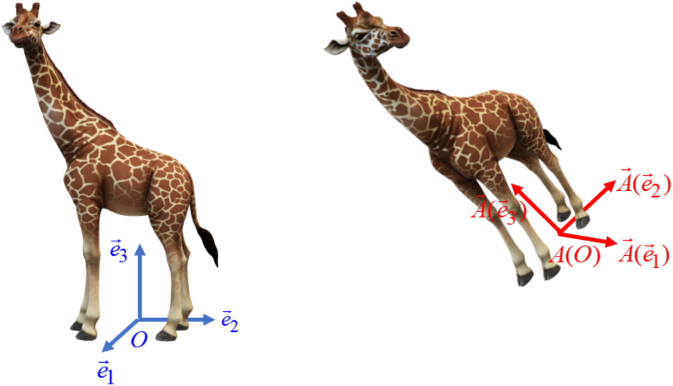
Теорема

$\mathcal{A}$ — изометрия $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ — аффинный оператор и $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ — ортогональный линейный оператор, т.е. $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ переводит ОНБ в ОНБ.

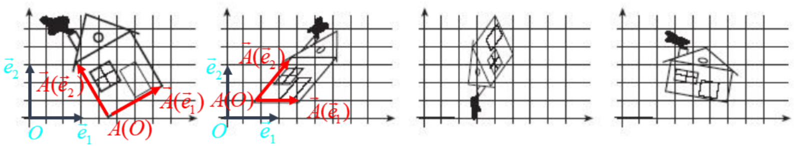
(Без доказательства).

Таким образом, для изометрии $\mathcal{A}$ имеем: $[\mathcal{A}p] = [p_0] + A[p]$, где $A = [\overrightarrow{\mathcal{A}}]$ — ортогональная матрица, т.е. $A^{-1} = A^T$. Если $\det A > 0$, то $\mathcal{A}$ называется движением аффинного пространства. Если $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ — тождественный оператор, то $\mathcal{A}$ является параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{Op_0}$.

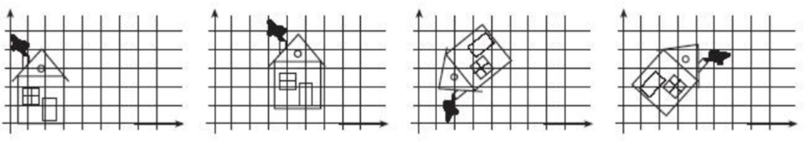
Пример изометрии



Примеры аффинных операторов и изометрий



Примеры аффинных операторов на плоскости



Примеры изометрий (движений) на плоскости

Теорема

Любое движение, не являющееся параллельным переносом, имеет неподвижную точку, т.е. существует такая точка $q \in V$, что $\mathcal{A}(q) = q$.

Доказательство. Проиллюстрируем доказательство для $V = \mathbb{R}^2$. Нужно найти точку $q \in \mathbb{R}^2$ такую, что

$$\mathcal{A}(q) = p_0 + \overrightarrow{A}(\overrightarrow{Oq}) = p = O + \overrightarrow{Oq},$$

$$(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{E})(\overrightarrow{Oq}) = \overrightarrow{p_0 O}$$

Докажите самостоятельно (упражнение, 16.), что оператор $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{E}$ невырожденный. При этом надо учесть, что оператор $\overrightarrow{A}$ — ортогональный и сохраняет ориентацию. Тогда

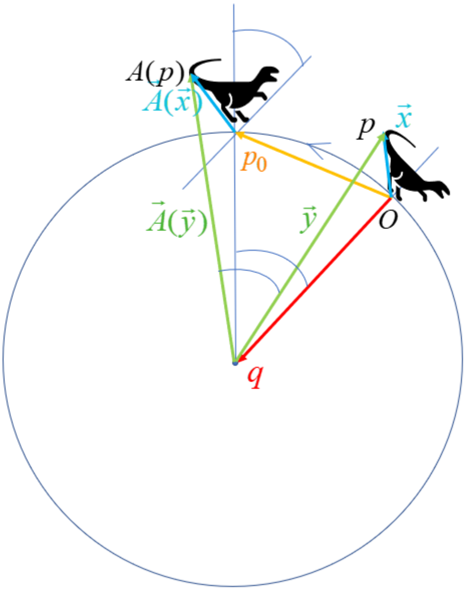
$$\overrightarrow{Oq} = -(\vec{A} - \vec{E})^{-1}(\overrightarrow{Op_0})$$

А значит,

$$q = O + \overrightarrow{Oq} = O - (\vec{A} - \vec{E})^{-1}(\overrightarrow{Op_0})$$

Таким образом, координаты точки q можно найти по формуле

$$[q] = -[(\vec{A} - \vec{E})]^{-1}[p_0]$$



$A(p)$
$\vec{A}(\vec{x})$
p
$\vec{x}$
p_0
$\vec{A}(\vec{y})$
$\vec{y}$
O
q

Более того, оператор $\mathcal{A}$ поворачивает плоскость вокруг неподвижной точки q. Пусть r — репер, полученный из стандартного параллельным переносом из точки O в точку q, тогда для координат $[\cdot]_r$ в этом репере для любой точки p имеем

$$[\mathcal{A}(p)]_r = [\overrightarrow{A}]_r[p]_r$$

Пусть $\vec{x} = \overrightarrow{Op}$. Тогда $\overrightarrow{qp} = \vec{x} - \overrightarrow{Oq}$. Покажите, что

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{qp}) = \mathcal{A}(p) - q$$

(упражнение, 1 б.), т.е. $\overrightarrow{A}(\vec{y}) = \mathcal{A}(p) - q$ для $\vec{y} = \overrightarrow{qp}$ (см. рис. на предыдущем слайде).

Определение

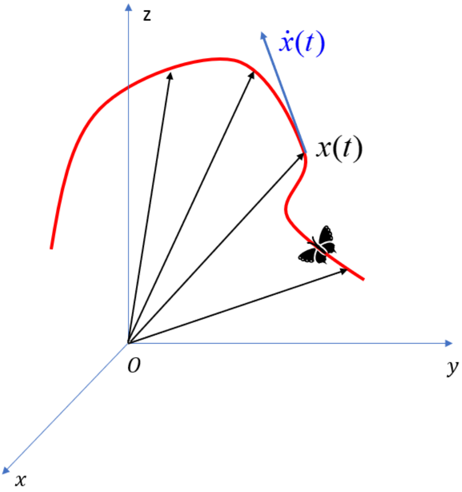
Вектор функция: $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))^T \subset \mathbb{R}^n, \quad x^i(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^n$
Производная вектор-функции:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = (\dot{x}^1(t), \ldots, \dot{x}^n(t))$$

Определение

Вектор-функция $x(t)$ называется *гладкой*, если каждая $\dot{x}^i(t), (i = 1, 2, \ldots, n)$ — гладкая на (a, b), т.е. дифференцируема столько раз, сколько нам нужно.
Разложение вектор-функции $x(t)$ по формуле Тейлора:

$$x(t) = x(t_0) + \frac{\dot{x}(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + o((t - t_0)^k)$$


z
$\dot{x}(t)$
$x(t)$
O
y
x

Для вектор-функции справедливы формулы, аналогичные формулам для скалярной функции.

Вычисление интеграла от вектор-функции, скалярного произведения и произведения на матрицу A

$$\int_a^b \dot{x}(t)\,dt = x(b) - x(a)$$

$$\int_a^b \langle v, x(t)\rangle\,dt = \langle v, \int_a^b x(t)\,dt\rangle,\ \ v \in \mathbb{R}^n$$

$$\int_a^b Ax(t)\,dt = A\int_a^b x(t)\,dt,\ \ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Определение

Отображение $B : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}^m$ называется *полилинейным*, если $B(x_1, \ldots, x_k)$ линейно по каждому аргументу.

Пример. $B(x, y) = [x]^T B_e [y]$ — билинейное отображение, где B_e — фиксированная матрица. При этом в заданном базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$ элементы матрицы B_e определяются равенством $B_{ij} = B(e_i, e_j)$. Если $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — другой базис, то $B_{e'} = T^T_{e \to e'} B_e T_{e \to e'}$.

Теорема (о дифференцировании полилинейных отображений).

Пусть $B : \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}^m$ — полилинейное отображение, $x_1(t), \ldots, x_k(t)$ - вектор функции, $x_i(t) : \ I \to \mathbb{R}^n$; $x(t) \overset{\text{опр}}{=} B(x_1(t), \ldots, x_k(t))$. Тогда

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{k} B(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), \dot{x}_i(t), x_{i+1}(t) \ldots, x_k(t))$$

Следствия.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ — вектор-функции. Тогда

1. $\frac{d\langle x(t), y(t)\rangle}{dt} = \langle \dot{x}(t), y(t)\rangle + \langle x(t), \dot{y}(t)\rangle$
2. $(x \times y)^{\cdot} = \dot{x} \times y + x \times \dot{y}$
3. $\frac{d}{dt}(A(t) \cdot B(t)) = \dot{A}(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot \dot{B}(t)$, $\quad A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$
4. $\frac{d}{dt}(\det[x_1(t), \dots, x_n(t)]) = \sum_{i=1}^{n} \det[x_1, \dots, x_{i-1}, \dot{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n]$, $x_i(t) : I \to \mathbb{R}^n$
5. $|x(t)|^{\cdot} = \frac{\langle x(t), \dot{x}(t)\rangle}{|x(t)|}$

Доказательство (5): $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad |x|^{\cdot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\langle x, x\rangle}} \cdot (\langle \dot{x}, x\rangle + \langle x, \dot{x}\rangle) = \frac{\langle x, \dot{x}\rangle}{|x|}$