Указание к решению теоретических упражнений по курсу «Дифференциальная геометрия и топология»

1) Использовать, что аффинное преобразование $A(p+x) = Ap + Ax$ для $p \in W, x \in \overrightarrow{W}$ и использовать параметрическое задание прямой и плоскости. Использовать, что $Ap = p_0 + \vec{A}(\overrightarrow{O_p})$, где $p, p_0 \in W$, и $\vec{A}$ – линейный оператор.

2) Вершины куба имеют координаты $B(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. Зафиксировать большую диагональ $[OA]$, где $O(0,0,\dots,0), A(1,1\dots,1)$ и использовать формулы $pr_{\overrightarrow{OA}}\overrightarrow{OB}$

3) Комбинаторная задача, сложная

4) Доказывается по определению

5) Использовать определение кривой единичной скорости и инвариантность длины при замене параметра

6) $f(s) = F(\alpha(s)); F(p) = 0$ – это уравнение окружности $(p - p_0)^2 = R^2$. Доказать, что $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = 0$

7) Доказать, что если $\dot{k}(s_0) = 0$, то $f'''(s_0) = 0$

8) Продифференцировать $(p_0 - \alpha(t))^2$ и доказать, что это $(p_0 - \alpha(t))^2 \equiv 0$. $p_0$ – это точка пересечения нормалей, т.е. $(p_0 - \alpha(t))^2 \equiv const$

9) Использовать эквивалентное определение касание линий k-го порядка (К1С $\alpha(s), \beta(s)$ имеют касание в точке $M_0$ k-го порядка, если $M_0 = \alpha(s_0) = \beta(s_0), \dot{\alpha}(s_0) = \dot{\beta}(s_0), \ddot{\alpha}(s_0) = \ddot{\beta}(s_0), \dots,$ $\alpha^{(k)}(s_0) = \beta^{(k)}(s_0), \alpha^{(k+1)}(s_0) \neq \beta^{(k+1)}(s_0)$). Показать, что кривая имеет со своей соприкасающейся окружностью общей общий репер Френе и одинаковую кривизну в точке касания. Отсюда следует требуемое.

10) Пусть $\alpha(s)$ - К1С. Воспользоваться эквивалентным определением из задачи (9) и использовать то, что $\dot{k}(s_0) = 0$

11) Запараметризовать кривую.

12) Запараметризовать кривую.

13)

1. Доказать либо по определению, либо то, что $\beta(s)$ - огибающая нормали к $\alpha(s)$.
2. Доказать, что $\dot{\alpha}(s)$
3. Доказать, что $\dot{\alpha}(c) = \vec{0}$ и $\ddot{\alpha}(c) \neq \vec{0}$, $\dddot{\alpha}(c) \nparallel \ddot{\alpha}(c)$

14) Если $\beta(s)$ - эволюта для $\alpha(s)$ – К1С и $\dot{k}(s_0) = 0$, то доказать, что $\dot{\beta}(s_0) = 0$ и $\ddot{\beta}(s_0) \neq 0$ и $\dddot{\beta}(s_0) \nparallel \ddot{\beta}(s_0)$.

15) Из определения эволюты.

16)

1. Найти $\alpha_\varepsilon'(s)$ и использовать $l_\varepsilon = \int_{s_1}^{s_2} |\alpha_\varepsilon(s)| ds$
2. Использовать 1) и теорему о среднем
3. Использовать инвариантность при замене параметра.

17) Смотреть леммы п. 9 и п. 19 учебника С.В. Сизого

18) Доказывается аналогично (8)

19) Смотреть (8) и (18)

20) Показать, что $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}$ – компланарны

21) Без ограничения общности, $\alpha(s), \beta(s)$ - К1С и существует $S = \varphi(s)$ – гладкая; $\dot{\varphi(s)} \neq 0$ т.ч. $\dot{\alpha}(s) = \dot{\beta}(s) = \dot{\beta}(\varphi(s)) \Rightarrow E_1^{\alpha}(s) = E_1^{\beta}(s)$. Дифференцируем по s, делаем вывод, что $E_2^{\alpha}(s) = \pm E_2^{\beta}(s)$ и $k_1^{\alpha}(s) = \pm k_1^{\beta}(s)\dot{\varphi}(s)$. Дифференцируем последнее равенство, делаем вывод, что надо брать знак «+»,$E_3^{\alpha}(s) = E_3^{\beta}(s)$, $k_2^{\alpha}(s) = k_2^{\beta}(s)\dot{\varphi}(s)$, откуда имеем требуемое.

22) Прямую $l$ можно задать как $< \vec{n}, p - \beta(s_0) >= 0, |\vec{n}| = 1, \vec{n} \perp l$. Найти $d = d_l(\beta(s_0 + \Delta s)) = |np_{\vec{n}}[\beta(s_0 + \Delta s) - \beta(s_0)]|$ и показать, что $\frac{d(\Delta s)}{\Delta s} \xrightarrow[\Delta s \to 0]{} 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \dot{\beta}(s_0)$

23)

2. Доказывается аналогично (22)

3. Записать уравнение плоскости $F(p) = 0$ в виде $< p - \beta(s_0), \vec{n} >= 0$ и рассмотреть функцию $f(s) =< p(s) - \beta(s_0), \vec{n} >= F(\beta(s))$. Показать, что $f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = 0 \Leftrightarrow$ плоскость соприкасающаяся.

24) Пусть $\alpha$ - К1С. Доказать, использовать формулу Тейлора, что $\Delta\alpha = \Delta s E_1 + \frac{k_1}{2}\Delta s^2 E_2 + \cdots$. Пусть $\alpha^*$ - проекция $\alpha$ на соприкасающаяся плоскость. Тогда $+o(\Delta s^2)$. $\Delta\alpha^* = |\dot{\alpha^*}|\Delta s E_1 + \frac{1}{2}\Delta s^2(|\dot{\alpha^*}|E_1 + k|\dot{\alpha^*}|E_2) + o(\Delta s^2)$. Отсюда доказать, что $k|\dot{\alpha^*}| \equiv k_1, |\dot{\alpha^*}| \equiv 1 \Rightarrow$ дифференцируем $|\dot{\alpha^*}|^{\cdot} \equiv 0$. Здесь $k_1, k_2$ - кривизна и кручение $\alpha$, $k$ – кривизна $\alpha^* \Rightarrow k = k_1$. Еще необходимо объяснить, что если $(E_1, E_2, E_3)$ - базис Френе кривой $\alpha$, то $(E_1, E_2)$ - базис Френе кривой $\alpha^*$.

25) Использовать эквивалентное определение касания линий в пространстве k-го порядка. Линии $\alpha(s), \beta(s)$ имеют касание k-го порядка в т. $M_0 = \alpha(s_0) = \beta(s_0)$, если $\alpha(s_0) = \beta(s_0), \dot{\alpha}(s_0) = \dot{\beta}(s_0), \ldots, \alpha^{(k)}(s_0) = \beta^{(k)}(s_0), \alpha^{(k+1)}(s_0) \neq \beta^{(k+1)}(s_0)$. Объяснять, почему неверно обратное из кручение и кривизны.

26) Пусть $\alpha(s)$ - К1С, тогда расстояние $|\alpha(s + \Delta s) - \alpha(s)|$ – эквивалентно $\Delta = l[\alpha]|_s^{s+\Delta s}$ ввиду гладкости, т.е. $\Delta s \to 0 \Leftrightarrow |\alpha(s + \Delta s) - \alpha(s)| \to 0$. Написать параметрическое уравнение касательной к $\alpha(s)$ в точке $\alpha(s)$ *и в точке* $\alpha(s + \Delta s)$ и найти между ними расстояние. Использовать, что для любой вектор-функции $r(s)$. $r(s) \times r(s + \Delta s) = r(s) \times \Delta r(s)$ $(\Delta r = r(s + \Delta s) - r(s))$ в силу билинейности $\times$. Для $\Delta\alpha = \alpha(s + \Delta s) - \alpha(s)$ использовать формулу на стр. 145 учебника С.В.Сизого. Аналогично для бинормалей и нормалей.

27) Дифференцировать равенство $\dot{\alpha} = |\dot{\alpha}|E_1$ и использовать уравнения Френе.

28) Доказать аналогично (8)

29) Использовать формулу $\iint_U \sqrt{g}dudv$, где $U = I \times [0; 2\pi], f(u, v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u)), \alpha(u) = (x(u), 0, z(u)): I \to R^2$ – профиль.

30) Использовать формулу $V = \int_I \ S(u)du$, где $S(u)$ - площадь круга, ограниченного экватором, проходящим через точку $f(u,v)$

31) Решить аналогично примеру 32.1 стр. 244 учебника С.В.Сизого.

32) Использовать ответ из примера 32.1 стр. 244 учебника С.В.Сизого.

33) Стереографическая проекция сферы на плоскость – это отображение, сопоставляющее точке сферы – точку пересечения касательной плоскости к одному полюсу с прямой, проходящей через другой полюс и данную точку.

34) $F(x,y,z) = 0$ - поверхность II-го порядка. $\begin{cases} x = p_0^1 + a_1 t \\ y = p_0^2 + a_2 t. \\ z = p_0^3 + a_3 t \end{cases}$

$f(t) = F(p_0^1 + a_1 t, p_0^2 + a_2 t, p_0^3 + a_3 t)$. Без ограничения общности можем считать, что касание происходит в точке $p = (p_0^1, p_0^2, p_0^3)$. Далее использовать определение касания плоскости кривой II-го порядка.

35) Пусть $X, Y \in Tr_f, [x]_{fu,fv} = (du, dv)$, $[Y]_{fu,fv} = (dU, dV)$, причем $Adu + Bdv = 0$ и $(Bg_{11} - Ag_{12})dU + (Bg_{12} - Ag_{22})dV = 0$. Доказать, что $I_p(X,Y) = 0$.

36) Доказать, что $ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$ совпадает для диффеоморных поверхностей, если длины любых кривых соответствующих одинаковы. Использовать $l[\alpha] = \int_x \ |\dot{\alpha}(t)|dt$

37) Использовать формулу на стр. 255 учебника С.В.Сизого. Подобрать $[d\phi]$ – матрицу такую, что $g_{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} |\dot{\alpha}(u)|^2 & 0 \\ 0 & z^2(u) \end{pmatrix}$, $\widetilde{g_{ij}}(\tilde{u},\tilde{v}) = \begin{pmatrix} z^2(u) & 0 \\ 0 & z^2(u) \end{pmatrix}$, $[d\phi] = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Построить по нему $\phi(u,v) = (\tilde{u},\tilde{v})$ и показать, что $\tilde{u} = \psi(u)$

38) Использовать формулу на стр. 255 учебника С.В.Сизого. Рассмотреть такой диффеоморфизм φ, что для его матрицы $[d\phi] = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$. $[d\phi]^T \widetilde{g_{ij}}(\tilde{u},\tilde{v})[d\phi] = g_{ij}(u,v)$, где $g_{ij}(u,v)$ - ??? поверхности, $\tilde{g}_{ij}(\tilde{u},\tilde{v})$ - ??? плоскости.

39) Рассмотреть $(\tilde{u},\tilde{v}) = \phi(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$ - полярную замену координат, которая переводит плоскость в прямой круговой цилиндр.

40) Стр. 294 учебника С.В.Сизого

41) Найти $[I_\varphi], [II_\varphi], [L_\varphi]$ поверхности вращения

42) Без ограничения общности линии кривизны - это координатная сеть $\Rightarrow g_{12} \equiv g_{11} \equiv h_{12} \equiv h_{11} \equiv 0$ (задача 43). Показать, что $T_\varphi f = T_\varphi f_\varepsilon \Rightarrow N = N_\varepsilon$. И доказать, что $g_{12}{}^* = g_{11}{}^* = h_{12}{}^* = h_{11}{}^* = 0$

43) По определению: X – главное направление $\Leftrightarrow L_\varphi(X) \parallel X$. Координатные линии – линии кривизны $\Leftrightarrow$ $f_u, f_v$ - главные направления.

44) Использовать, что $L(X) = -\frac{\partial N}{\partial X} = -d\delta(x)$, где $\delta$ - сферическое отображение Гаусса

45)

46) Воспользоваться определением асимптотического направления $u$ коэффициентов $h_{ij}$

47) Аналогично (44)

48) Доказать, что $h_{ij}=0 \Leftrightarrow N = const$, т.е. $f$ - плоскость. Использовать формулу Эйлера и использовать задачу (50)

49) Использовать определение $L(x) = -\frac{\partial N(\alpha(t))}{\partial t}$, где $X = \dot{\alpha}(t), \alpha(t)$ - это прямая на поверхности, а также то, что $\forall t{:}\ < N\big(\alpha(t)\big), \vec{\alpha} > \equiv 0$ для направляющего вектора этой прямой.

50) Использовать уравнение Эйлера и определить асимптотичность направления

51) Использовать уравнение Эйлера и определить асимптотичность направления

52) Использовать параметризация $f(u,v) = \alpha(u) + vE_2(u)$, где $\alpha(u)$ - К1С, $\alpha{:}\,I \to R^3, (E_1, E_2, E_3)$ - ее базис Френе. Доказать, что $h_{11} \equiv h_{22} \equiv 0$ в точках кривой $\alpha(u)$, т.е. при $v = 0$. Показать, что $\alpha(u)$ – u-линия (при $v = 0$)

53) Найти $[I_b]$ (??? матрицу) поверхности вращения и составить Д.У. $h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 = 0$. Использовать параметризацию $f(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v\,, z(u))$, где ), $\alpha(u) = \big(x(u), 0, z(u)\big)$ – профиль.

54) БОО $\alpha$ – к1с. При помощи уравнения Эйлера показать, что $L(E_1) = \pm E_2, E_3 = \pm N$, где $(E_1, E_2, E_3)$ – базис Френе кривой $=\alpha$. Из равенства $E_3 = N$ следует, что $x^2 = \langle \frac{dN}{dS}, \frac{dN}{dS} \rangle$ .Используя, что $\alpha = E_1 = (du, dv) \in T_p f$, $dN = N_u du + N_v dv$, $dS = \sqrt{I_p(E_1, E_1)}$, выразить $\langle \frac{dN}{dS}, \frac{dN}{dS} \rangle$ через $III_3(E_1, E_1) = \langle L(E_1), L(E_1) \rangle = \langle \frac{\partial N}{\partial E_1}, \frac{\partial N}{\partial E_1} \rangle$ и $I_p(E_1, E_1) = \langle E_1, E_1 \rangle$. Используя равенство $III_p = 2II_p - KI_p$ (упражнение в учебнике Сизого), получить $\langle \frac{dN}{dS}, \frac{dN}{dS} \rangle$.

55) Рассмотреть ОНБ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ из главных направлений в $T_p f$ и доказать равенство $III_p(X,Y) = 2H \cdot II_p - K \cdot I_p$(X,Y) для $X = X_i, Y = X_j$. Тогда оно будет доказано для любых $X, Y$ (Почему?)

56) Использовать определение омбилической точки и написать это определение на языке матриц $[L_p], [I_p], [II_p]$.

57) Использовать выражение полной кривизны и средней кривизны через главные нормальные кривизны.

58) $(\Longrightarrow)$вытекает из задачи 60.$(\Leftarrow)$Доказать по определению, учитывая, что $g_{11} = \varphi(u), g_{22} = \psi(v)$, т.е. $|f_u|$ не зависит от $v$, $|f_v|$ не зависит от $u$.

59) Пользуясь формулой $|K| = \left|\frac{N_u \times N_v}{f_u \times f_v}\right|$показать, что $|f_u| \cdot |f_v| = K = const$. Далее ввести диффеоморфизм T -? $[d\Phi] = \begin{pmatrix} 1/f_u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

60) Рассмотрим натуральную параметризацию координатных линий и ввести диффеоморфизм, нормирующий $f_u$ и $f_v$.

61) Считать, что сеть линий кривизны – координатная сеть и $|f_u| = |f_v| = 1$. Ввести систему прямоугольных координат $xOy$ так, что $f_u = e_1,\ f_v = e_2$ в касательной плоскости. Тогда $\rho = \frac{1}{\sqrt{K_N(X)}}$, $X \in T_p f$ – индикатриса Дюпена. $K_N(X) = \frac{II_p(X,X)}{I_p(X,X)}$, $[X]_{f_u f_v} = (du, dv)$. Ввести полярную систему координат $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, где $\varphi = X\hat{}f_u$. Отсюда найти $x, y$ и доказать, что это кривая II-ого порядка.

62) Использовать определение $K_N(X) = \frac{II_p(X,X)}{I_p(X,X)}$, $X \in T_p f$ и формулу Эйлера.

63) Провести плоскость через вектора $N_1, N_2$- нормали и поверхностями точку $f(p) = \alpha(t)$. И доказать, что $E_2(t), N_1(p), N_2(p)$ – компланарны. Рассмотреть $E_2\hat{}N_1 = \varphi_1$, $E_2\hat{}N_2 = \varphi_2 \to |\varphi_1 - \varphi_2| = \theta$. Далее использовать теорему Менье.

64) Воспользоваться определением эллиптических, гиперболических и параболических точек и тем фантом, что для поворота вращения меридианы и параллели являются линиями кривизны. Либо решить задачу аналитически, параметризируя профиль $\alpha(u) = \big(u, 0, z(u)\big)$ и исследую знак $\dot{z}(u)$ для полной кривизны $K(u,v) = K(u)$.

65) Использовать функции Эйлера. Сначала считать, что одна из прямых направляется вектором-главным направлением. Использовать формулы $\cos^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ и формулы $1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos(n-1)\varphi = Re\sum_{k=0}^{n-1} e^{(i\varphi)k}$, где $i$ –минимальная единица. Затем рассмотреть общий случай.

66) Поверхность $f(u,v) = \alpha(u) + vb(u)$, $\alpha: I \to R^3, b: I \to \vec{R}$-развертывающаяся $\Leftrightarrow$ $\vec{N}(u_0, 0) = \vec{N}(u_0, v),\ \forall v$ $\Leftrightarrow$вектора $\vec{a} = f_u|_{(u_0,0)} \times f_v|_{(u_0,0)}$ и $\vec{c} = f_u|_{(u_0,v)} \times f_v|_{(u_0,v)}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$"бац" – "цаб" $\Leftrightarrow$ $\big(\dot{\alpha}, b, \dot{b}\big)\big|_{u=u_0} \equiv 0$

67) БОО $|b(u)| \equiv 1$ и $\alpha(u)$-к1с. Если в $\nparallel \dot{\alpha}$ то из задачи 1 $T_p f = \langle f_u, f_v\rangle = \langle\dot{\alpha}, b\rangle = \langle\dot{\alpha}, \dot{b}, b\rangle \Rightarrow \dot{b} \in T_p f$. Продифференцировать тождество $\langle N(u), b(u)\rangle \equiv 0$ $(f_v = b \perp N)$ и отсюда показать, что $\dot{N} \perp b$ и отсюда показать, что $\dot{N} \perp b$ и следовательно, $\dot{N} \parallel b \Rightarrow L(f_u) = -\frac{\partial N}{\partial u} \parallel \dot{b}(u)$ и $b(u)$ главные направления $\Rightarrow L(f_v) = \vec{0} \Rightarrow$ получаем требуемое $\Rightarrow K_2 = 0 = K = 0$.

68) Считать, что координатная сеть – это сеть линий кривизны. Найти $(f_\varepsilon)_u$, $(f_\varepsilon)_v$ и показать, что $T_p f = T_p f_\varepsilon \Rightarrow N_\varepsilon = N$. Найти $g_{ij}^\varepsilon,\ h_{ij}^\varepsilon$, использую равенства

$(f_\varepsilon)_u = (1-k_1\varepsilon)f_u$, $(f_\varepsilon)_v = (1-k_2\varepsilon)f_v$ (доказать равенства). Кроме того, $g_{12} \equiv g_{21} \equiv h_{12} \equiv h_{21} \equiv 0$. Показать, что $\det(g_{ij}^\varepsilon) = g_\varepsilon = g(1-k_1\varepsilon)^2(1-k_2\varepsilon)^2$, $h_\varepsilon = h(1-k_1\varepsilon)(1-k_2\varepsilon)$. Найти $[I_p^\varepsilon]$, $[II_p^\varepsilon]$, $[L_p^\varepsilon]$. Отсюда получить, что $K_\varepsilon = \frac{K}{1-2H_\varepsilon+k\varepsilon^2}$, $H_\varepsilon = \frac{H-k\varepsilon}{1-2H\varepsilon+\varepsilon^2 k}$.

69) Используя данные для $(f_\varepsilon)_u$, $(f_\varepsilon)_v$ из задачи 68 и того, что $dS = |f_u \times f_v|dudv$, $dS_\varepsilon = |(f_\varepsilon)_u \times (f_\varepsilon)_v|dudv$, доказать, что $dS_\varepsilon = (1-k_1\varepsilon)(1-k_2\varepsilon)dS = (1-2H\varepsilon+k\varepsilon^2)dS$ →отсюда следует выразить H. Отсюда найти $S_\varepsilon = \iint_u dS_\varepsilon$, $S = \iint_u dS$.

70) Для параметризации $f(u,v) = (x, ux, f(u))$, где $u = \frac{y}{x}$, найти H, приравнять к нулю, решить ДУ. Получится $f(u,v) = c_1 atctg(u) + c_2$, а это и есть геликоид.

71) $f(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))$. Если $z(u) \equiv const$, то есть $\dot{z}(u) \equiv 0$ в $O(u_0)$, то это плоскость. Если $\dot{z}(u_0) \neq 0$, то в силу гладкости $\exists\, O(u_0)$ такая, что $\forall u \in O(u_0)\ \dot{z}(u) \neq 0 \Rightarrow$ можно считать, что $\exists u = u(z) \to x = x(z) \Rightarrow$ можно считать, что $f(u,v) = (\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, u)$. Найти $H$ и приравнять к 0. Получится ДУ относительно $\varphi$. Показать, что $\varphi(u) =$ цепной линии.

72) Рассмотреть в случае $H = 0, K < 0$ $(K \leq H^2 = 0)$ координатную сеть, состоящую из асимптоты линий. Использовать, что асимптоты линии ортогональны.

73) Доказать, что $L(\dot{\alpha}) = \frac{\partial N}{\partial \dot{\alpha}} \equiv 0 = 0 \cdot \dot{\alpha} \to$ кривая $\alpha$ и асимптотическая, и состоит из параболических точек.

74) Свести задачу к задаче 73.

75) Использовать, что $[A\dot{\alpha}(t)] = (p_0 + \dot{\mathbf{A}}\,[\alpha(t)]) = \mathbf{A}\,[\dot{\alpha}(t)]$, где $\mathbf{A} = [A]$.

76) Использовать, что $[Af]'_u = \mathbf{A}[f'_u]$, где $\mathbf{A} = [A]$.

76.5) Использовать задачи 1, 75 и 76.

77) Использовать задачи 75 и 76.

78) Использовать, что $p = \alpha(t_0) + t_1\dot{\alpha}(t_0) + t_2\ddot{\alpha}(t_0)$ - уравнение соприкасающейся плоскости к кривой $\alpha(t)$ в точке $t = t_0$ и задачу 75.

79)

а) Плоская кривая – аффинное понятие. $\alpha(t)$ – плоская $\leftrightarrow det[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}] \equiv 0$.

Использовать, что $[Ax, Ay, Az] = A[x,y,z] \Rightarrow det[Ax, Ay, Az] = detA \cdot det[x,y,z]$ для всех

$x, y, z \in R^3$ и матриц $A \in R^{3\times 3}$.

б) Кривизна – не аффинное. Рассмотреть окружность и эллипс.

в) Эволюта – не аффинное. Рассмотреть окружность и эллипс.

г) Кручение – не аффинное. Рассмотреть винтовую линию, растянуть ее вдоль оси $oz$ в $k$ раз.

д) Нормаль – не аффинное. Рассмотреть параболу $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$ и аффинное отображение $[\mathcal{A}x] = A[x]$, сохраняющее ось $oz$ и меняющее угол между $ox$ и $oy$.

е) Бинормаль – не аффинное. Рассмотреть туже параболу и аффинное отображение $[\mathcal{B}x] = B[x]$

ж) нормальная плоскость – нет. Пример тот же, что и в в)

з) спрямляющаяся плоскость – нет. Пример тот же что и в е)

и) поверхность нулевой полной кривизны – да. Использовать определение развертки поверхности (см. «Развертка поверхности» и задачи 75, 76 и 76.5)

к) полная кривизна, средняя кривизна, минимальная поверхность – не аффинная. Рассмотреть катеноид и растянуть его в k раз вдоль оси Oz.
Тогда одно из главных нормальных сечений (экватор катеноида) не меняет своей кривизны, а меридиан катеноида меняет (второе главное сечение). Линии кривизны при этом перейдут в линии кривизны, исходя из того, что экватор перейдет в ту же линию (все объяснить).

и) линии кривизны – не аффинное. Рассмотреть аффинное отображение $[\mathcal{A}x] = A[x]$, сохраняющее ось Oz и меняющее угол между осью Ox и Oy.
Образы линий кривизны не будут перпендикулярны $\Rightarrow$ они не линии кривизны.

м) омбилические точки – не аффинные.
Рассмотреть параболоид вращения $z = x^2 + y^2$ и точку $O(0,0,0)$. Она омбилическая(доказать). Рассмотреть аффинное отображение $[\mathcal{A}x] = A[x]$, где $A = [\vec{\mathcal{A}}] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Показать, что $O(0,0,0)$ - не омбилическая для поверхности $\mathcal{A}f(u,v)$ $(f(u,v) = (u,\ v,\ u^2 + v^2))$.

н) Ассимптотические линии – аффинное.

Ранее доказано (смотри задачу 2), что $\mathcal{A}(T_p f) = T_p(\mathcal{A}f)$ и $N = \frac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$, $\tilde{N} = \frac{\mathcal{A}f_u \times \mathcal{A}f_v}{|\mathcal{A}f_u \times \mathcal{A}f_v|}$.

Пусть асимптоты линии на $f$ образуют координатную сеть

$\Rightarrow h_{11} \equiv h_{22} \equiv 0 \Rightarrow \langle N, f_{uu} \rangle \equiv 0 \Rightarrow \langle f_u, f_v, f_{uu} \rangle \equiv 0$. Аналогично $\langle f_u, f_v, f_{vv} \rangle \equiv 0$. Далее использовать задачу 76 для пов-ти $\mathcal{A}f$ и тот факт, что

$\det[Ax, Ay, Az] = detA - \det[x, y, z]$ для $x, y, z \in \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ и $A \in R^{3\times 3}$ (см. задачу 79).

л) точки уплощения – аффинное. Показать, что в них $[L_p] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow h_{ij} = 0$ и

использовать рассуждение из (н) задачи 79

м) Эллиптические, гиперболические и параболические – аффинные понятия, поскольку от них зависит количество асимптотических линий (использовать н).