ЛИТЕРАТУРА

1. MacMahon B., Pugh T.F. Causes and entities of disease // Preventive Medicine. Boston: Little Brown, 1967. P. 11–18.
2. Rothman K. Causes // Am. J. Epidemiology. 1976. V. 104(6). P. 587–592.
3. Miettinen O. S. Causal and preventive interdependence: Elementary principles // Scand. J. Work. Environ. Health. 1982. V. 8. P. 159–168.
4. VanderWeele T.J., Robins J.M. The identification of synergism in the sufficient-component-cause framework // Epidemiology. 2007. V. 18(3). P. 329–339.
5. VanderWeele T. J., Richardson T. S. General theory for interactions in sufficient cause models with dichotomous exposures // Ann. Statistics. 2012. V. 40. P. 2128–2161.
6. Панов В. Г., Нагребецкая Ю. В. Алгебраическая трактовка двухфакторной теории достаточных причин // Труды СПИИРАН. 2013. Т. 3(26). С. 277–296.
7. Панов В. Г., Нагребецкая Ю. В. Алгебраическая классификация совместного действия n бинарных факторов // Материалы IX междунар. конф. «Системный анализ в медицине». Благовещенск. 2015. С. 31–34.
8. Panov V.G. and Nagrebetskaya J.V. Boolean algebras and classification of interactions in sufficient-component cause model // Int. J. Pure Appl. Math. 2015. V. 98(2). P. 239–259.
9. Panov V. G. and Nagrebetskaya J. V. Classification of combined action of binary factors and Coxeter groups // J. Discr. Math. Sci. & Cryptography. 2018. V. 21(3). P. 661–677.
10. Нагребецкая Ю.В., Панов В.Г. Степень взаимодействия бинарных факторов в теории достаточных причин // Материалы XIII междунар. конф. "Системный анализ в медицине". Благовещенск, 2019. С. 31–34.
11. Нагребецкая Ю.В., Панов В.Г. Обобщение понятия взаимодействия n факторов в теории достаточных причин и его свойства // Материалы XIII междунар. конф. "Системный анализ в медицине». Благовещенск, 2019. С. 35–38.
12. Nagrebetskaya J.V., Panov V.G. Joint action of binary factors in the sufficient causes theory and its classification // Int. J Innov. Tech.&Exploring Eng. V.9(1), 2019. P.: 2146–2153.
13. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
14. Лидл Р., Пильц Г. Прикладная абстрактная алгебра. Екатеринбург, Изд-во Уральского ун-та, 1996.

E-mail: I.V.Nagrebetckaia@urfu.ru, vpanov@ecko.uran.ru

DOI: 10.12737/conferencearticle_5fe01d9b5fef55.02114623

© 2020 **Ю.В. Нагребецкая**, канд. физ.-мат. наук; **В.Г. Панов**, канд. физ.-мат. наук

Уральский федеральный университет, Институт промышленной экологии УрО РАН, Екатеринбург

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ СОВМЕСТНОГО ДЕЙСТВИЯ *k* БИНАРНЫХ ФАКТОРОВ

В формальной модели бинарной теории достаточных причин известны два определения понятия «совместное действие *k* факторов в данном отклике» - одно апеллирует к логической структуре отклика, а другое использует более формализованные понятия теории булевых алгебр. Обсуждаются особенности каждого определения и формулируется результат об эквивалентности обоих понятий.

Ключевые слова: теория достаточных причин, булевы алгебры, булевы функции, ДНФ, логика высказываний, булев куб, простой импликант, тупиковая ДНФ, отклик, причинность в эпидемиологии.

© 2020 **J.V. Nagrebetskaya**, PhD, **V.G. Panov**, PhD

Ural Federal University, Ekaterinburg, Institute of Industrial Ecology, UrB of RAS, Ekaterinburg

EQUIVALENCE OF TWO DEFINITIONS OF JOINT ACTION OF *k* BINARY FACTORS NOTION

In the formal model of the binary sufficient cause theory two definitions of a notion “joint action of *k* factors in a given outcome” are known. One of them appeals to a logical structure of the outcome, and another uses some formal notions of Boolean algebras theory. We discuss peculiarities of either definition and formulate their equivalence statement.

Key words: sufficient cause theory, Boolean algebra, Boolean functions, DNF, propositional logic, Boolean cube, prime implicant, outcome, irredundant DNF, causality in epidemiology.

Введение. В эпидемиологической теории достаточных причин (sufficient cause models) [1-4] наиболее разработанной в отношении формального аппарата является задача описания совместного содействия бинарных факторов [4-11]. Содержательно эта задача состоит в определении того, является ли величина данного отклика, зависящий от некоторого набора факторов, больше, меньше или равна сумме величин отклика для отдельно действующих факторов. Однако для бинарных (двухуровневых) факторов и такого же отклика такое понимание затруднительно, так как величина отклика имеет всего два уровня.

Для преодоления этой трудности в работах [2-4] было предложено трактовать предметный смысл тех логических выражений, которые формируют зависимость данного бинарного отклика от действующих бинарных факторов. Рассуждения, приведенные в цитированных работах, показывают, что такой анализ может оставаться дискуссионным и неполным. Кроме того, этот прием практически невозможно применить к более чем двум бинарным факторам, так как возникающие уже в случае трех факторов выражения с точки зрения такого семантического анализа чрезвычайно сложны и неоднозначны. Более перспективным в этом отношении оказался путь построения максимально формализованной модели теории достаточных причин, предпринятый в работе [4]. Однако и эта работа с точки зрения математики остаётся недостаточно строгой, хотя и полезной в отношении обсуждаемых в ней идей и мотиваций.

В работах [5-11] предложена более строгая модель бинарной теории достаточных причин, которая основывается на языке булевых функций и булевых алгебр. В рамках этого подхода многие понятия и конструкции теории достаточных причин находят естественное выражение известными терминами теории булевых алгебр или могут быть построены с помощью таких терминов. Ниже мы приведем некоторые примеры такого рода, адресуя читателя по терминологическим вопросам к стандартным учебникам алгебры, математической логики и теории булевых алгебр и булевых функций (см., например, [15,16]). Приводимые ниже понятия не только важны для демонстрации адекватности языка булевых функций в бинарной теории достаточных причин, но и будут использованы ниже для определения на этом языке понятия «совместного действия k бинарных факторов в отклике, зависящем от большего числа бинарных факторов».

Булева трактовка некоторых понятий теории достаточных причин. Естественным понятием, возникающим в задаче описания взаимодействия в теории достаточных причин, является понятие *минимальной достаточной причины* данного отклика f. Следуя терминологии работ [3,4], можно сказать, что *достаточная причина* данного отклика – это такая конъюнкция литералов (булевых переменных, кодирующих уровни факторов, или их отрицаний), из истинности которой с необходимостью вытекает истинность отклика. А *минимальная достаточная причина* данного отклика – это такая достаточная причина, в которой нет ни одного избыточного литерала (т.е. нет такого литерала, который можно удалить, и полученная конъюнкция останется достаточной причиной). При этом отклик может быть представлен в виде дизъюнкции всех его минимальных достаточных причин, а множество этих причин называется *определяющим множеством минимальных достаточных причин* данного отклика. Однако такое представление может быть избыточным, т.е. содержать лишние простые минимальные достаточные причины, которые можно опустить (но не все одновременно) без потери эквивалентности полученного представления данному отклику. Определяющее множество достаточных причин, не содержащее ни одной избыточной минимальной достаточной причины, называется *неизбыточным определяющим множеством минимальных достаточных причин* [4].

Определение 1 [15,16]. Пусть *f*, *g* – булевы функции от *n* переменных, B^n - *n*-мерный булев куб. Булева функция *g* называется *импликантом* булевой функции *f*, если для любого набора $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{B}^n$ равенство $g(\boldsymbol{\alpha})=1$ влечёт равенство $f(\boldsymbol{\alpha})=1$. Конъюнкция некоторого подмножества литералов, являющаяся *импликантом* булевой функции *f*, называется её *простым импликантом*, если при удалении из этой конъюнкции любого литерала она перестаёт быть импликантом.

Очевидно, что простой импликант является математическим выражением понятия минимальной достаточной причины. Определяющее множество минимальных достаточных причин в теории булевых функций является не чем иным, как множеством простых импликантов, дизъюнкция которых эквивалентна (в смысле логики высказываний) данной булевой функции. Иначе это понятие можно описать как множество простых импликантов, входящих в представление данной булевой функции в виде ДНФ (дизъюнктивной нормальной формы). Математическим выражением понятия неизбыточного определяющего множества минимальных достаточных причин является понятие неприводимого множества простых импликантов в ДНФ, эквивалентной данной булевой функции [16] или (в терминах [15]), множества простых импликантов, входящих в некоторую тупиковую ДНФ, эквивалентную данной булевой функции.

В работе [4] было введено понятие взаимодействия (совместного действия) бинарных факторов в данном отклике. Оригинальное описание этого понятия довольно громоздко, однако его основные идеи можно переформулировать на языке булевых функций, аналогично приведенным примерам. Определение понятия совместного действия факторов в отклике из работы [4] можно сформулировать следующим образом.

Определение 2. Будем говорить, что в отклике *f* имеется *взаимодействие (совместное действие)* факторов $\boldsymbol{x}_I = x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ (здесь $2 \le k \le n,\ \ I=\{i_1,\dots,i_k\},\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$), если существует такой набор $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{B}^k$, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, что для любого представления булевой функции *f* в виде дизъюнкции неприводимого множества простых импликантов конъюнкция $\boldsymbol{x}_I^{\alpha} = x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots x_{i_k}^{\alpha_{i_k}}$ является подконъюнкцией некоторого простого импликанта из этого представления. В этом случае будем говорить, что взаимодействие в отклике *f* достигается при $\boldsymbol{x}_I = \boldsymbol{\alpha}$.

В терминах теории достаточных причин это определение означает, что любое неизбыточное определяющее множество достаточных причин содержит минимальную достаточную причину, истинность которой возможна только если присутствуют (т.е. истинны) все факторы из $\boldsymbol{x}_I$ при некоторых уровнях их значений $\boldsymbol{x}_I = \boldsymbol{\alpha}$. В работе [10] было предложено альтернативное определение этого понятия, более соответствующее общему булеву формализму теории достаточных причин [5-11]. Там же объяснены используемые ниже обозначения.

Определение 3 [10]**.** Будем говорить, что в отклике *f*, зависящем от *n* бинарных факторов, *имеется взаимодействие (совместное действие) k факторов*, если существует *k*-элементное подмножество *I* множества {1,2,…,*n*} и набор $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{B}^{n-k}$ такие, что в отклике $f_{I,\boldsymbol{\beta}}$ есть взаимодействие *k* факторов $\boldsymbol{x}_I$. Если это взаимодействие достигается при $\boldsymbol{x}_I = \boldsymbol{\alpha}$ для некоторого $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{B}^k$, то будем говорить, что имеет место взаимодействие *k* факторов для $\boldsymbol{x}_I = \boldsymbol{\alpha}$ при $\boldsymbol{x}_{\bar{I}} = \boldsymbol{\beta}$.

Основной результат

Теорема 1. В отклике *f* имеется взаимодействие *k* факторов, $2 \le k \le n$, в смысле Определения 2 тогда и только тогда, когда оно присутствует в смысле Определения 3.

Обсуждение. Приведённое выше Определение 2 является булевой переформулировкой оригинального определения из работы [4]. Само это определение мотивировано возможностью предметной трактовки структуры полученного логического выражения. Это делает его более понятным потенциальным пользователям-нематематикам, но, вместе с тем, оно становится неудобным для формальной работы. Например, неясно, каков может быть алгоритм проверки наличия совместного действия k факторов в отклике. Обычное в булевой алгебре геометрическое представление для Определения 2 менее удобно и значительно сложнее, чем для Определения 3 (покрытия вместо графов). В Определении 3 все эти ограничения отсутствуют. Само это определение фактически индуктивно, и сводит понятие взаимодействия k факторов к понятию взаимодействия n факторов при $k = n$, что, в свою очередь, позволяет ввести понятие степени взаимодействия k факторов среди n имеющихся. Здесь мы не можем привести развернутое обсуждение Определения 3, однако некоторые моменты отражены в работах [9-11,17], например, в работе [17] показано, каким образом можно оценить временнýю сложность алгоритма определения наличия взаимодействия k факторов.

Заметим также, что несмотря на бóльшую абстрактность Определения 3, его также можно трактовать как взаимодействие факторов в том же духе, как это имеет место для оригинального определения [4].

Неоднократно цитированная выше работа [4] была полезна не только как отправная точка формально-математических построений, но и как источник некоторых идей, которые привели к Теореме 1. Фактически в этой работе приведено доказательство того, что из Определения 2 следует Определение 3, хотя само это доказательство и используемый в нем вариант Определения 3, опираются на излишние в рассматриваемой части теории теоретико-вероятностные конструкции. Вопросы трактовки Определения 2, обсуждаемые в работе [4], а также замечания из разных мест этой работы позволяют выделить те идеи, формализация которых приводит к Определению 3, формулировке и доказательству Теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rothman K. Causes // Am. J. Epidemiology. 1976. V. 104(6). P. 587–592.
2. Miettinen O.S. Causal and preventive interdependence: Elementary principles // Scand. J. Work. Environ. Health. 1982. V. 8. P. 159–168.
3. VanderWeele T.J., Robins J.M. The identification of synergism in the sufficient-component-cause framework // Epidemiology. 2007. V. 18(3). P. 329–339.
4. VanderWeele T.J., Robins J.M. A theory of sufficient cause interactions // COBRA Preprint Series. 2006. Paper 13.
5. Панов В.Г., Нагребецкая Ю.В. Алгебраическая трактовка двухфакторной теории достаточных причин // Труды СПИИРАН. 2013. Т. 3(26). С. 277–296.
6. Панов В.Г., Нагребецкая Ю.В. Алгебраическая классификация совместного действия n бинарных факторов // Материалы IX междунар. конф. «Системный анализ в медицине». Благовещенск, 2015. С. 31–34.
7. Panov V.G. and Nagrebetskaya J.V. Boolean algebras and classification of interactions in sufficient-component cause model // Int. J. Pure Appl. Math. 2015. V. 98(2). P. 239–259.
8. Panov V.G. and Nagrebetskaya J. V. Classification of combined action of binary factors and Coxeter groups // J. Discr. Math. Sci. & Cryptography. 2018. V. 21(3). P. 661–677.
9. Нагребецкая Ю.В., Панов В.. Степень взаимодействия бинарных факторов в теории достаточных причин // Материалы XIII междунар. конф. "Системный анализ в медицине". Благовещенск, 2019 С. 31–34.
10. Нагребецкая Ю.В., Панов В.Г. Обобщение понятия взаимодействия n факторов в теории достаточных причин и его свойства // Материалы XIII Междунар. Конфер. "Системный анализ в медицине". Благовещенск, 2019. С. 35–38.
11. Nagrebetskaya J.V., Panov V.G. Joint action of binary factors in the sufficient causes theory and its classification // Int. J Innov. Tech.&Exploring Eng. V.9(1), 2019. P. 2146–2153.
15. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.
16. Лидл Р., Пильц Г. Прикладная абстрактная алгебра. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1996.

E-mail: I.V.Nagrebetckaia@urfu.ru, vpanov@ecko.uran.ru