Правила дифференцирования

1) $\boxed{c' = 0}$

2) $\boxed{(cu)' = cu'}$

3) $\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$

4) $\boxed{(u \cdot v)' = u'v + uv'}$

5) $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$

Производная сложной функции в точке

Тогда сложная функция $y = f\big(u(x)\big)$ определена и дифференцируема на (a, b), и

$$\boxed{y' = f'(u)\, u'}$$

Производная обратной функции в точке

Теорема 8 (производная обратной функции)

Пусть функция $y = y(x)$ определена и обратима и дифференцируема на (a, b).

Тогда обратная функция $x = x(y)$ определена и дифференцируема на (c, d), где $y((a, b)) = (c, d)$, и

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}}$$

Таблица производных

$$1)\ (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$2)\ (e^x)' = e^x$$

$$3)\ (a^x)' = a^x \ln a\,, a > 0, a \neq 1$$

$$4)\ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$5)\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$6)\ (\sin x)' = \cos x$$

$$7)\ (\cos x)' = -\sin x$$

$$8)\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9)\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Таблица производных

$$10)\,(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11)\,(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12)\,(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13)\,(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Таблица производных для сложной функции

$$1)(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$2)(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$3)(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$4)(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$5)(\log_a u)' = \frac{1}{u\mathrm{ln}a} \cdot u'$$

$$6)(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$7)(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

Таблица производных для сложной функции

$$8)(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$9)(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$10)(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$11)(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$12)(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$13)(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Арифметические свойства производной функции в точке

<u>Пример</u>. Найти производную функции $f(x)=\frac{x^2+3x-2}{x^3-1}$ в любой точке $x \neq 1$.

<u>Решение</u>.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+3x-2}{x^3-1}\right)' = \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}\right]$$

$$=\frac{(x^2+3x-2)'(x^3-1)-(x^2+3x-2)(x^3-1)'}{(x^3-1)^2}$$

Арифметические свойства производной функции в точке

$$[u' = (x^2 + 3x - 2)' = (x^2)' + (3x)' - 2' =$$

$$= 2x + 3x' - 0 = 2x + 3]$$

$$[v' = (x^3 - 1)' = 3x^2]$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x^3 - 1) - (x^2 + 3x - 2) \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

Таблица производных для сложной функции

Примеры.

1) $y=(3x-17)^{10}$

$$y=u^{10}, u=3x-17$$

$$y'=10\cdot u^{9}\cdot u'=10\cdot(3x-17)^{9}\cdot(3x-17)'=$$

$$=10\cdot(3x-17)^{9}\cdot 3= 30\cdot(3x-17)^{9}$$

Таблица производных для сложной функции

2) $y = \operatorname{arctg}(7x+1)$

$$y = \operatorname{arctg} u,\ u = 7x+1$$

$$y' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u' = \frac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot(7x+1)' =$$

$$= \frac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot 7 = \frac{7}{1+(7x+1)^2}$$

Таблица производных для сложной функции

3) $y = \sin^2(3x-1)$

$$y = u^2, u = \sin(3x-1)$$

$$y' = 2u \cdot u' = 2\sin(3x-1) \cdot (\sin(3x-1))' =$$

$$= 2\sin(3x-1) \cdot \cos(3x-1)(3x-1)' =$$

$$= 2\sin(3x-1) \cdot \cos(3x-1) \cdot 3 =$$

$$= 6\sin(3x-1) \cdot \cos(3x-1)$$