Производные высших порядков. Пример 1

<u>Пример 1.</u> Найти $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ для $y = e^{2x}$.

<u>Решение.</u> $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$,

$$y'' = (2e^{2x})' = 4e^{2x},$$

$$y''' = (4e^{2x})' = 8e^{2x},$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = 2^n e^{2x}$$

Дифференцирование неявной функции. Пример 2

Пример 2. Найти производную функции, заданную неявно уравнением
$x^2 - 4xy + y^2 + 1 = 0$.

Решение. Продифференцируем по x тождество

$$x^2 - 4xy(x) + y^2(x) + 1 = 0:$$

$$2x - 4(x'y(x) + xy'(x)) + 2y(x)y'(x) = 0 \quad (:2)$$

Дифференцирование неявной функции. Пример 2

$$x - 2(y(x) + xy'(x)) + y(x)y'(x) = 0$$

Заменим $y(x)$ и $y'(x)$ на y и y' соответственно и выразим y' через x и y:

$$x - 2(y + xy') + yy' = 0$$

$$x - 2y - 2xy' + yy' = 0$$

$$x - 2y - y'(2x - y) = 0$$

$$y' = \frac{x-2y}{2x-y}$$

Параметрически заданная функции. Определение

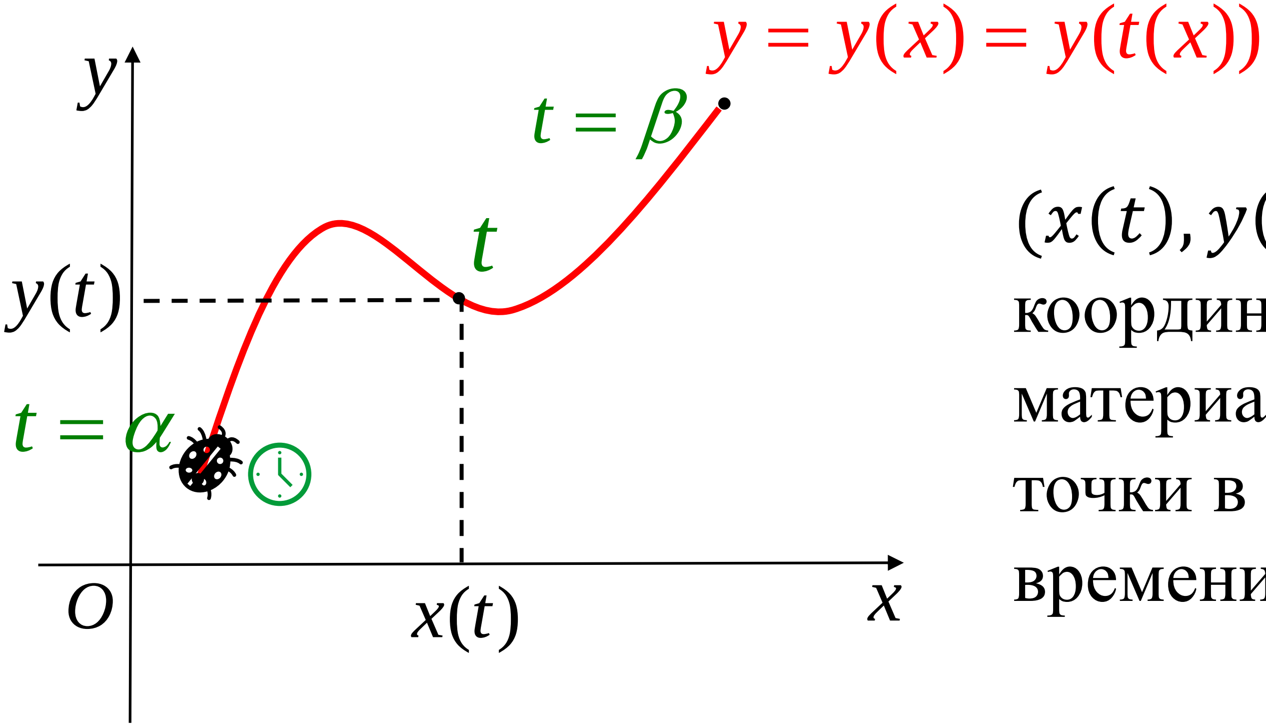
Опр. Функция $y = y(x)$ задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

если функция $x = x(t)$ обратима и для обратной функции $t = t(x)$ справедливо тождество

$$y(x) = y\big(t(x)\big)$$

Параметрически заданная функция. Геометрическая интерпретация



$(x(t), y(t))$ – координаты материальной точки в момент времени t

Дифференцирование параметрически заданной функции

Теорема 1. Производная параметрически заданной функцией задается уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}, \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

Дифференцирование параметрически заданной функции. Пример 3

Пример 3. Найти уравнение касательной к циклоиде

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

в точке $t = \frac{\pi}{2}$.

Дифференцирование параметрически заданной функции. Пример 3

Решение. $x'(t) = [a(t - \sin t)]' = a(1 - \cos t)$

$$y'(t) = [a(1 - \cos t)]' = a\sin t$$

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \left[t = \frac{\pi}{2}\right] = 1$$

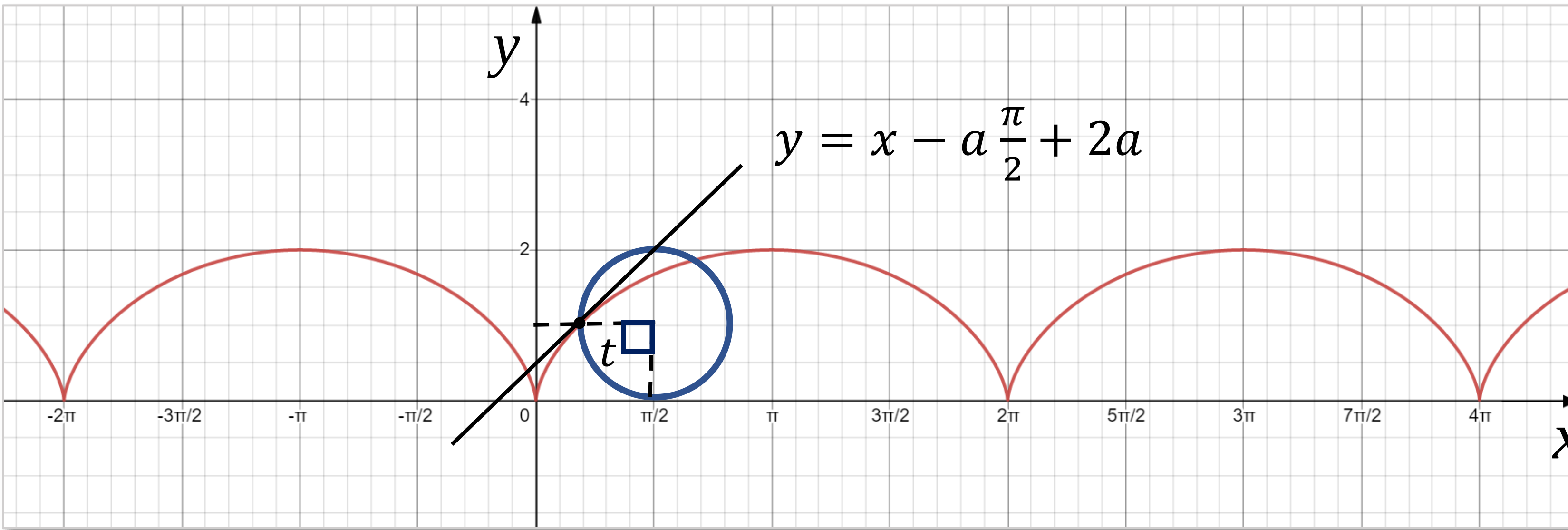
$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_0 = a(t - \sin t) = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$y_0 = a(1 - \cos t) = a \qquad y = x - a\frac{\pi}{2} + 2a$$

$$\Uparrow$$

$$y - y_0 = y'_x(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - a = x - a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Дифференцирование параметрически заданной функции. Пример 3



$a = 1$

Этот слайд можно не конспектировать